Нелінійні коливання 1 • 1998

УДК 517.9

ОТОБРАЖЕНИЕ ПОСЛЕДОВАНИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ*

Н.А. Перестюк, В.Г. Самойленко

Нац. ун-т им. Т. Шевченко,
Украина, 252033, Киев, ул. Владимирская, 64
e-mail: pmo@mechmat.univ.kiev.ua;
e-mail: svhr@mechmat.univ.kiev.ua

К.К. Елгондиев

Нукус. ун-т,
Узбекистан, 742012, Нукус, ул. Университетская, 1

We study sequence mapping associated to differential equations with impulse effects. The theorem on connection between existence of periodic points of Poincare mapping and periodic solutions to differential equations with impulse effects is proved.

Вивчається відображення наслідування, що асоційоване з диференціальними рівняннями з імпульсною дією, для якого доведено теорему про зв'язок між періодичними точками такого відображення та періодичними розв'язками диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

В последнее время большой интерес вызывает исследование дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1 – 6]. Поведение траекторий систем, заданных некоторыми дифференциальными уравнениями и условиями импульсного воздействия, является по своей сути таким, как в существенно нелинейных задачах (даже в случае линейных дифференциальных уравнений) и значительно отличается от поведения траекторий данного дифференциального уравнения в отсутствие импульсного воздействия.

Система с импульсным воздействием в общем случае задается [3] с помощью некоторого дифференциального уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

($x \in M \subset \mathbf{R}^n$, M — фазовое пространство системы (1), $t \in \mathbf{R}$ — время) и условий импульсного воздействия, которые определяются заданием некоторого множества $\mathcal{T}_t \subset \mathbf{R} \times M$ и оператора $\mathcal{A}_t$, определенного на $\mathcal{T}_t$ и отображающего $\mathcal{T}_t$ в расширенное фазовое пространство $\mathbf{R}\times M$ согласно правилу $(t,x) \to (t, \mathcal{A}_t x)$. Последнее условие можно записать следующим образом [3]:

$$\Delta x\Big|_{(t,x)\in\mathcal{T}_t} = \mathcal{A}_t x - x = I(x). \tag{2}$$

* Частично поддержана программой INTAS (Grant 96-0915).

Для качественного исследования периодических режимов в системе (1), (2) можно использовать отображение последования (функцию Пуанкаре) [6,3]. С этой целью рассмотрим движение фазовой точки, которое в данной системе происходит следующим образом [3]: если в некоторый начальный момент $t = t_0$ фазовая точка $x = x(t)$ находится в состоянии x_0, причем $(t_0, x_0) \notin \mathcal{T}_t$, то с течением времени t эта точка будет двигаться по кривой $\{(t,x) : x = \varphi(t, x_0, t_0), t \geq t_0\}$, где $\varphi(t, x_0, t_0)$ – решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, x_0, t_0) = x_0$, до первого момента времени $t = t_1 > t_0$, когда эта точка попадает в множество $\mathcal{T}_t$. Значение t_1 определяется из условия $t_1 = \min\limits_{t \geq t_0}\{t : (t, \varphi(t, x_0, t_0)) \in \mathcal{T}_t\}$. При $t = t_1$ происходит мгновенное изменение положения фазовой точки, вследствие которого эта точка попадает в точку $(t_1, \mathcal{A}_{t_1}\varphi(t_1, x_0, t_0)) \in \mathbf{R} \times M$, и дальнейшее движение происходит по кривой $\{(t,x) : x = \varphi(t, \mathcal{A}_{t_1}\varphi(t_1, x_0, t_0), t_1), t > t_1\}$ до следующего момента времени, когда эта точка снова попадает в множество $\mathcal{T}_t$, т.е. до момента времени t_2, значение которого определяется из условия $t_2 = \min\limits_{t > t_1}\{t : (t, \varphi(t, \mathcal{A}_{t_1}\varphi(t_1, x_0, t_0), t_1)) \in \mathcal{T}_t\}$.

Описанная ситуация является весьма общей. Для того чтобы получить более конкретные качественные свойства траекторий систем с импульсным воздействием, уточним свойства дифференциального уравнения (1), оператора $\mathcal{A}_t$ и вид множества $\mathcal{T}_t$. А именно, предположим, что:

1^0) дифференциальное уравнение (1) удовлетворяет условиям, гарантирующим существование и единственность его решений, и таким образом определяет некоторую динамическую систему;

2^0) множество M фазовых состояний уравнения (1) не пусто;

3^0) множество $\mathcal{T}_t$ является гиперповерхностью в пространстве $\mathbf{R} \times M$, определяемой соотношением $g(t,x) = 0$, где $g(t,x)$ — некоторая функция, непрерывная по t и x, причем $G = \{(t,x) \in \mathbf{R} \times M : \ g(t,x) = 0\} \neq \emptyset$;

4^0) гиперповерхность $\mathcal{T}_t$ трансверсальна потоку (1);

5^0) оператор $\mathcal{A}_t$, действующий согласно правилу $G \ni (t,x) \to (t, Ax) \in G$, является непрерывным по переменным $x \in \mathbf{R}^n$, что, очевидно, эквивалентно непрерывности по x оператора $\mathcal{A} : M \to M$.

Определение. *Если множество G состоит из гиперплоскостей, определяемых уравнениями $t = t_k$, $k \in \mathbf{Z}$, то система, описываемая уравнением (1) и условиями импульсного воздействия (2), называется системой дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени.*

Если множество G определяется соотношением вида $g(x) = 0$ или поверхностью $t = t_k(x)$, то моменты импульсного воздействия не фиксированы. Соответственно, система (1), (2) называется системой с импульсным воздействием с нефиксированными моментами импульсного воздействия.

Качественное поведение траекторий уравнения (1) с импульсным воздействием (2) при условиях $1^0 - 5^0$ совпадает с описанным выше. Вместе с тем, с учетом дополнительных предположений относительно вида уравнений в (1) и вида импульсного воздействия, в данном случае можно определить отображение последования [7] ϑ согласно правилу: $x \xrightarrow{\vartheta} \mathcal{A}_{t_1}\varphi(t_1, x, t_0) \xrightarrow{\vartheta} \mathcal{A}_{t_2}\varphi(t_2, \mathcal{A}_{t_1}\ \varphi(t_1, x, t_0), t_1) \xrightarrow{\vartheta} \ldots$, изучение свойств которого позволяет установить существование периодических решений для систем дифференциальных уравнений (1) с импульсным воздействием (2), а также исследовать устойчивость этих решений.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия* $1^0 - 5^0$, *а* n *– некоторое натуральное число. Система дифференциальных уравнений (1) с импульсным воздействием (2) имеет периодическое движение периода* $T(n)$, *испытывающее* n *импульсных воздействий за период, тогда и только тогда, когда отображение* ϑ *имеет неподвижную точку периода* n.

Следствие. *Если выполняются условия* $1^0 - 5^0$ *и отображение* ϑ *имеет неподвижную точку, то система дифференциальных уравнений (1) с импульсным воздействием (2) имеет периодическое движение с некоторым периодом* T.

Доказательство теоремы базируется на свойствах отображения последования.

Необходимость. Пусть система дифференциальных уравнений (1) с импульсным воздействием (2) имеет разрывную периодическую траекторию $\varphi^*(t)$ с периодом $T(n)$, при движении по которой фазовая точка подвергается импульсному воздействию ровно n раз за период $T(n)$, где n — некоторое натуральное число. Покажем, что у отображения ϑ существует хотя бы одна неподвижная точка периода n, т.е. такая точка x_0, что $\vartheta^n(x_0) = \vartheta(\vartheta(\ldots\vartheta(x_0))) = x_0$.

Пусть t_0 — некоторый момент времени, когда движущая по данной периодической траектории φ^* точка подвергается импульсному воздействию. Выберем t_0 в качестве нового начального момента времени. Покажем, что точка $x_0 = \varphi^*(t_0 - 0)$ будет искомой. В самом деле, пусть $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_{n-1} < t_n < \ldots$ — последовательные моменты времени, когда точка, движущаяся по траектории $\varphi^*(t)$, подвергается импульсному воздействию. Ясно, что в момент времени $t^* = t_0 + T(n)$ рассматриваемая точка также подвергается импульсному воздействию, следовательно, значение $t^* = t_0 + T(n)$ принадлежит множеству $\mathcal{T}_t = \{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$, причем очевидно, что $t_n = t_0 + T(n)$. Если предположить, что это не так, то при движении по траектории $\varphi^*(t)$ точка будет подвергаться меньше чем n раз (если $t_n > t_0 + T(n)$) или больше чем n раз (если $t_n < t_0 + T(n)$) импульсному воздействию за период.

Рассмотрим последовательность состояний системы, соответствующих моментам времени $t_0, t_1, t_2, \ldots$. Обозначим $x_0 = \varphi^*(t_0)$, $x_1 = \varphi^*(t_1)$, ..., $x_n = \varphi^*(t_n)$, ... Очевидно, что в соответствии с описанным выше характером движений в системах, определяемых дифференциальными уравнениями (1) с импульсным воздействием (2), имеем $x_1 = \vartheta(x_0)$, $x_2 = \vartheta(x_1)$, $\ldots, x_{k+1} = \vartheta(x_k)$, $\ldots$, причем $x_n = \varphi^*(t_n) = \varphi^*(t_0 + T(n)) = \varphi^*(t_0) = x_0$. Следовательно, $\vartheta^n(x_0) = x_0$, что и следовало доказать.

Достаточность. Предположим, что отображение $\vartheta : M \to M$ имеет периодическую точку периода n, т. е. такую точку x_*, что $\vartheta^n(x^*) = x^*$. Рассмотрим множество вида $S = \{x_0 = x^*,\ x_1,\ \ldots, x_{n-1}\}$, где $x_1 = \vartheta(x_0)$, $x_2 = \vartheta(x_1)$, $\ldots, x_{k+1} = \vartheta(x_k)$, $\ldots$. Очевидно, что $x_n = \vartheta(x_{n-1}) = \vartheta(\vartheta(x_{n-2})) = \ldots = \vartheta(\vartheta(\ \ldots\ \vartheta(x_0))) = x_0$. Выберем x_0 в качестве начального значения для некоторого решения $\varphi^*(t, x_0, t_0)$, где t_0 — начальный момент времени. Тогда в соответствии с определением отображения ϑ и выбором точек множества S фазовая точка, двигаясь по траектории, выходящей из точки (t_0, x_0), претерпев n раз импульсное воздействие, попадает в точку $(t_0 + T(n), x_0)$. Следовательно, $\varphi^*(t, x_0, t_0)$ — периодическое движение, имеющее разрывы в точках (t_k, x_k), где $x_k = \vartheta(x_{k-1})$, $t_k = \min\limits_{t > t_{k-1}} \{t : \varphi(t, x_{k-1}, t_{k-1}) = x_k\}$, причем это движение происходит по указанному выше разрывному циклу, каждая часть траектории которого определяется системой дифференциальных уравнений (1) при соответствующих начальных условиях, определенных заданием начальной точки вида (t_k, x_k), где $x_k = \vartheta(x_{k-1}) =$

$= \mathcal{A}\varphi^*(t_k, x_{k-1}, t_{k-1})$, что и следовало доказать.

Теорема доказана.

Рассмотрим в качестве примера линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0, \quad p, q \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени вида

$$\Delta \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=\tau_k} = \frac{dx(\tau_k + 0)}{dt} - \frac{dx(\tau_k - 0)}{dt} = I_k, \tag{4}$$

где I_k, $k \in \mathbf{Z}$, — некоторые постоянные числа, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \delta > 0$, $k \in \mathbf{N}$, δ — некоторое действительное число [7, 8].

В рассматриваемом случае множество $\mathcal{T}_t \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ имеет вид $\mathcal{T}_t = \{\tau_k : \; k \in \mathbf{Z}\}$. Решения задачи (3), (4) несложно записать в квадратурах [9]. Используя явный вид решений задачи (3), (4), отображе́ние последования можно построить в явном виде. Пусть $(x, \dot{x})$ — произвольная точка фазового пространства M. Под действием потока, определенного автономным дифференциальным уравнением (3), фазовая точка $(x, \dot{x})$ при отсутствии импульсных воздействий будет двигаться по кривой $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$, где $\varphi(t)$ — решение дифференциального уравнения (3), имеющее при $t = t_0$ своим начальным значением точку $(x, \dot{x})$. Это движение будет продолжаться до момента импульсного воздействия $t_* = \min\limits_k \{\tau_k : \tau \in \mathcal{T}_t, \tau_k > t_0\}$ (в дальнейшем, не умаляя общности, полагаем $t_* = \tau_1$), когда фазовая точка под влиянием импульсного воздействия *мгновенно* перейдет в точку $\varphi(\tau_1, \dot{\varphi}(\tau_1) + I_1)$ и продолжит движение по кривой $(\varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t))$, где $\varphi_1(t)$ – решение дифференциального уравнения (3), имеющее при $t = \tau_1$ своим начальным значением точку $(\varphi(\tau_1), \dot{\varphi}(\tau_1) + I_1)$.

Отображение последования можно получить после определения в явном виде секущей поверхности в пространстве переменных $(t, x, \dot{x}) \in \mathbf{R}^3$. Пусть в качестве такой секущей поверхности определена гиперплоскость $t = t_0 + T$, где T – некоторое действительное число. Тогда в силу условия $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \delta > 0$, $k \in \mathbf{N}$, при $T \geq \delta$ на интервале $[t_0, t_0 + T]$ содержится лишь конечное число элементов множества $\mathcal{T}_t$, количество которых обозначим посредством $m \in \mathbf{N}$. Таким образом, отображение последования можна записать с помощью следующей формулы: $\vartheta(x, \dot{x}) = (\psi(T, x, \dot{x}), \partial\psi(T, x, \dot{x})/\partial T)$, где функция $\psi(T, x, \dot{x})$ в зависимости от типа особой точки и характеристических корней для дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$\psi(T, x, \dot{x}) = \frac{\lambda_2 x - \dot{x}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 T} - \frac{\lambda_1 x - \dot{x}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 T} + $$
$$+ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{k=1}^{m} \left[e^{\lambda_1 (t_0 + T - \tau_k)} - e^{\lambda_2 (t_0 + T - \tau_k)} \right] I_k \tag{5}$$

(характеристические корни λ_1, λ_2 для дифференциального уравнения (3) действительные и различны, т. е. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$);

$$\psi(T, x, \dot{x}) = [x + T(\dot{x} - \lambda x)]e^{\lambda T} + \sum_{k=1}^{m} (t_0 + T - \tau_k) e^{\lambda (t_0 + T - \tau_k)} I_k \tag{6}$$

(характеристические корни λ_1, λ_2 для дифференциального уравнения (3) действительные и кратные, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbf{R}$);

$$\psi(T, x, \dot{x}) = \left[x \cos \omega T + \frac{\dot{x} - \alpha x}{\omega} \sin \omega T\right] e^{\alpha T} +$$

$$+ \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{m} I_k e^{\alpha(t_0 + T - \tau_k)} \sin \omega (t_0 + T - \tau_k) \tag{7}$$

(характеристические корни λ_1, λ_2 для дифференциального уравнения (3) комплексные, т. е. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\omega, \alpha, \omega \in \mathbf{R}$, причем $\alpha = \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$, $\omega > 0$);

$$\psi(T, x, \dot{x}) = x \cos \omega T + \frac{\dot{x}}{\omega} \sin \omega T + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{m} I_k \sin \omega (t_0 + T - \tau_k) \tag{8}$$

(характеристические корни λ_1, λ_2 для дифференциального уравнения (3) комплексные и чисто мнимые, т. е. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = i\omega, \omega \in \mathbf{R}$, $\omega > 0$).

Используя построенное отображение последования (5) – (8), можно получить [8] необходимые и достаточные условия существования периодических решений задачи (3), (4).

Необходимые условия существования периодических решений задачи (3), (4) можно сформулировать следующим образом [8]: *для того чтобы задача (3), (4) имела периодическое решение с периодом T, необходимо, чтобы существовало натуральное число m такое, что для всех целых чисел $k \in \mathbf{Z}$ выполняются условия* $I_{k+m} = I_k$, $\tau_{k+m} = = \tau_k + T$.

Существование периодических и, в частности, неподвижных точек у отображения последования ϑ является достаточным условием наличия периодических решений для задачи (3), (4). При этом неподвижным точкам отображения $(x, \dot{x}) \to \vartheta(x, \dot{x})$ соответствуют периодические решения задачи, заданной дифференциальным уравнением (3) и условиями импульсного воздействия (4). В частности, можно показать, что данная задача в зависимости от типа особой точки $(0, 0)$ уравнения (3) может иметь [8]:

i) единственное T-периодическое решение;

ii) однопараметрическое семейство T-периодических решений;

iii) двупараметрическое семейство T-периодических решений.

Ситуация i) возможна в случае, когда $\operatorname{Re} \lambda_1 \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$ или $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$, где $\omega \in \mathbf{R}_+$ и $\omega T \neq 2\pi q$ для всех $q \in \mathbf{N}$.

Ситуация ii) возможна в случае, когда $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ и $\sum_{k=1}^{m} I_k = 0$.

Ситуация iii) возможна в случае, когда $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$, $\omega \in \mathbf{R}_+$, причем $\omega T = 2\pi q_0$ для некоторого натурального числа q_0, а моменты τ_k, $k \in \mathbf{Z}$, и величины импульсного воздействия I_k, $k \in \mathbf{Z}$, удовлетворяют условиям вида

$$\sum_{k=1}^{m} I_k \cos \omega \tau_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{m} I_k \sin \omega \tau_k = 0.$$

Здесь λ_1, λ_2 – решения характеристического уравнения для дифференциального уравнения (3), m – количество импульсных воздействий на интервале времени длительности периода T.

Несложно показать [7], что если моменты $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$, и величины импульсного воздействия $I_k, k \in \mathbf{Z}$, удовлетворяют указанным выше условиям периодичности, то все периодические решения задачи, определяемой дифференциальным уравнением (3) и условиями импульсного воздействия (4), образуют m-параметрическое относительно параметров $\{x_0, \dot{x}_0, I_1, \dots, I_m\}$ множество, где $m \geq 1$ в случае i), $m \geq 2$ в случае ii) и $m \geq 3$ в случае iii).

Рассмотрим теперь случай системы, движение в которой описывается линейным дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega \in \mathbf{R}_+, \tag{9}$$

причем фазовая точка системы подвергается воздействию мгновенных сил в моменты прохождения некоторого фиксированного положения $x = x_0$. Условия импульсного воздействия записываются следующим образом:

$$\Delta \frac{dx}{dt}\Big|_{x=x_0} = \frac{dx}{dt}\Big|_{x=x_0+0} - \frac{dx}{dt}\Big|_{x=x_0-0} = I(\dot{x}). \tag{10}$$

Качественное поведение решений системы (9), (10) детально описано в [3]. Для системы (9), (10) ниже построим отображение последования.

Если начальные условия рассматриваемого движения материальной точки находятся в области $D = \{(x, \dot{x}) : \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 < \omega^2 x_0^2\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, то с течением времени эта точка не подвергается импульсному воздействию, а осуществляет периодические движения с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Пусть начальные значения находятся вне области D. Если в некоторый момент времени фазовая точка рассматриваемой системы имеет координаты $(x_1, \dot{x}_1)$ такие, что $\dot{x}_1^2 + \omega^2 x_1^2 = \dot{x}^2 + \omega^2 x_0^2$, где $\dot{x} \in \mathbf{R}$ – некоторое действительное число, то с течением времени она пересечет прямую $x = x_0$ в точке с координатами $(x_0, \dot{x})$, после чего мгновенно попадет в точку $(x_0, -\dot{x} + I(-\dot{x}))$, а затем снова пересечет прямую $x = x_0$ в точке $(x_0, \dot{x} - I(-\dot{x}))$, где в очередной раз подвергнется импульсному воздействию (10), и т. д.

Поверхность G имеет вид $G = \{(t, x, \dot{x}) : (t, x, \dot{x}) \in \mathbf{R^3}, \ x = x_0\}$. Пусть в качестве секущей определена гиперповерхность $t = t_0 + T$, где T – некоторое действительное число. Тогда отображение последования $\vartheta : L \to L$, где $L = \{(x, y) : x = x_0, y \in \mathbf{R}\}$, определяется с помощью формулы

$$\vartheta(y) = -y + I(-y). \tag{11}$$

Неподвижным точкам y_* отображения последования $\vartheta : L \to L$ в колебательной системе (9), (10) соответствуют периодические режимы $x(t, y_*, t_0)$, где $x(t_0, y_*, t_0) = y_*$. Более того, при таких колебательных режимах рассматриваемая система подвергается импульсному воздействию только один раз за период T.

Если отображение (11) имеет периодическую точку y_0 периода $n \in \mathbf{N}$, т. е. $\vartheta^n(y_0) = \vartheta(\vartheta(\dots \vartheta(y_0))) = y_0$, то точке y_0 соответствует некоторый T-периодический режим системы (9), (10), причем такой, что при данном режиме рассматриваемая система подвергается импульсному воздействию ровно n раз за период T.

В этом случае начальные значения, в качестве которых можно взять неподвижные или периодические точки отображения последования, и период T соответствующих колебательных режимов взаимосвязаны определенным образом. При этом период колебаний

T сравнительно несложно вычислить, если известно соответствующее начальное значение рассматриваемого периодического решения, в то время как задача определения соответствующих начальных значений для периодического решения с заданным периодом намного сложнее.

Устойчивость описанных периодических режимов задачи (9), (10) адекватным образом определяется [3] устойчивостью соответствующих неподвижных точек отображения $\vartheta^n(y_0)$. В частности, при

$$\left|\frac{d}{dy_0}\vartheta^n(y_0)\right| < 1$$

указанное выше периодическое решение задачи (9), (10) является устойчивым, а при

$$\left|\frac{d}{dy_0}\vartheta^n(y_0)\right| > 1$$

— неустойчивым.

1. *Халанай А., Вэкслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
2. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е.* Динамические системы с импульсной структурой. – Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1983. – 112 с.
3. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
4. *Laksmikantan V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 520 p.
5. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive differential equations //World Scientific Series on Nonlinear Sciences. Ser. A. – Singapore etc.: World Sci., 1995. – Vol. 14. – 462 p.
6. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.;Л.: Гостехиздат, 1947. – 390 с.
7. *Самойленко В.Г., Єлгондиев К.К.* Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією //Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 1. – С. 141–148.
8. *Самойленко В.Г., Елгондиев К.К.* Периодические и почти-периодические решения линейных однородных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием //Мат. физика и нелинейн. механика. – 1991. – Вып. 15(49). – С. 13–20.
9. *Самойленко В.Г., Елгондиев К.К.* Исследование линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в $\mathbf{R}^2$. – Киев, 1989. – 31 с. – (Препринт /АН УССР. Ин-т математики; 89.59).

Получено 25.04.98