УДК 517.9

ПРО НЕОБМЕЖЕНУ ПРОДОВЖУВАНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ З ВИПАДКОВОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

А.А. Мосейко

Київ. нац. екон. ун-т,
Україна, 252056, Київ, пр. Перемоги, 54
e-mail: angela.moseyko@usa.net

Using Lyapunov's functions, conditions of unlimited duration of solutions of usually differential equations systems with random right sides and random impulsive influence in fixed moments of time then $t \geq 0$.

Метод функцій Ляпунова застосовано для знаходження умов необмеженої продовжуваності розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною та випадковою імпульсною дією у фіксовані моменти часу при $t \geq 0$.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною і випадковою імпульсною дією у фіксовані моменти часу вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(t,x) + \sigma(t,x)\,\zeta(t), \qquad && t \neq t_i, \\ \Delta x &= I_i(x) + J(x)\,\eta_i(\omega), && t = t_i, \end{aligned} \tag{1}$$

де функції F і I_i, а також матриці σ, J розміру $n \times k$ визначені та неперервні по $t \geq 0$, $x \in R^n$, $\zeta(t)$ — k-вимірний випадковий процес, η_i — k-вимірні випадкові величини, задані на ймовірнісному просторі (Ω, F, P).

Будемо вивчати умови необмеженої продовжуваності розв'язків системи (1) при $t \geq 0$. Ці умови наведемо в термінах функції Ляпунова вкороченої детермінованої системи

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(t,x), \qquad && t \neq t_i, \\ \Delta x &= I_i(x), && t = t_i. \end{aligned} \tag{2}$$

Позначимо через $\dfrac{d^{(1)}}{dt}$ оператор Ляпунова для системи (1), а через $\dfrac{d^{(0)}}{dt}$ — оператор Ляпунова для системи (2). (Визначення оператора Ляпунова див., наприклад, в [1, с. 22].) Припустимо також, що послідовність імпульсних моментів $\{t_i\}$ не має скінченних граничних точок.

Перед тим, як сформулювати основну теорему, доведемо лему, яка дає оцінку оператора для функції Ляпунова в силу системи (1) через відповідний оператор $\dfrac{d^{(0)}}{dt}$.

Будемо говорити, що невід'ємна функція Ляпунова належить класу C_0, якщо вона абсолютно неперервна при $t \geq 0$ і задовольняє глобальну умову Ліпшіца по $x \in R^n$ з константою B.

Лема. *Якщо $V(t,x) \in C_0$, то для майже всіх t з імовірністю 1 виконуються співвідношення*

$$\frac{d^{(1)}V(t,x)}{dt} \le \frac{d^{(0)}V(t,x)}{dt} + B\,\|\sigma(t,x)\|\,|\zeta(t)| \quad \text{при} \quad t \neq t_i\,,$$
$$V(t_i, x + I_i(x) + J_i(x)\,\eta_i(\omega)) \le V(t_i, x + I_i(x)) + B\,|\eta_i|\,\|J_i(x)\|\,. \tag{3}$$

Доведення. Перше із співвідношень (3) випливає з відповідного твердження з [1, с. 28].

Друге твердження випливає із наступних міркувань:

$$V(t_i, x + I_i(x) + J_i(x)\,\eta_i(\omega)) \le V(t_i, x + I_i(x) + J_i(x)\,\eta_i) - V(t_i, x + I_i(x)) +$$
$$+ V(t_i, x + I_i(x)) \le V(t_i, x + I_i(x)) + B\,|\eta_i|\,\|J_i(x)\|\,.$$

Доведемо тепер теорему про умови необмеженої продовжуваності розв'язків системи (1) вправо.

Теорема. *Нехай випадковий процес $\zeta(t)$ з імовірністю 1 є абсолютно інтегровним на будь-якому скінченному інтервалі півосі $t \ge 0$, вектор F та матриця σ задовольняють локальну по x умову Ліпшіца, причому $F(t,0)$ є локально абсолютно інтегровним і*

$$\sup_{R^n \times \{t \ge t_0\}} \{\|\sigma(t,x)\|\} < C_1\,,$$
$$\|J_i(x)\| \le LV(t_i, x)\,, \quad L = \mathrm{const}\,, \quad L > 0\,, \quad x \in R^n\,, \quad i \ge 0\,. \tag{4}$$

Припустимо, що для системи (2) існує функція Ляпунова $V(t,x) \in C_0$, для якої виконуються умови:

$$V_R = \inf_{\overline{U}_R \times \{t \ge t_0\}} V(t,x) \to \infty \quad \text{при} \quad R \to \infty\,, \tag{5}$$

де $\overline{U}_R$ — зовнішність кулі радіуса R;

$$\frac{d^{(0)}V}{dt} \le C_2 V(t,x)\,,$$
$$V(t_i, x + I_i(x)) - V(t_i, x) \le C_3 V(t_i, x)\,, \tag{6}$$

де C_2, C_3 — деякі додатні сталі, $t \ge t_0$, $x \in R^n$.

Тоді розв'язок задачі Коші для системи (1) з початковими умовами $x(t_0) = x_0(\omega)$ ($(x_0(\omega))$ — випадкова величина) існує і є кусково абсолютно неперервним випадковим процесом при $t \ge t_0$.

Доведення. В умовах теореми, очевидно, справедливі умови локального існування і потраєкторної єдиності розв'язків системи (1). Нехай $x(t, x_0)$ — розв'язок системи (1) такий, що $x(t_0, x_0) = x_0(\omega)$. Покажемо, що він необмежено продовжуваний вправо при $t \ge t_0$. Із умов теореми випливає, що функція $V(t, x(t, x_0))$ кусково абсолютно неперервна по t. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $t_0 = 0$. Згідно з [1, с. 28], на інтервалі $[0, t_1]$ маємо оцінку для майже всіх t, ω:

$$\frac{dV(t, x(t,x_0))}{dt} \le \frac{d^{(0)}V(t, x(t,x_0))}{dt} + B\,\|\sigma(t, x(t,x_0))\|\,|\zeta(t)| \le C_2 V(t,x) + BC_1|\zeta(t)|\,. \tag{7}$$

При $t = t_1$ на підставі другої нерівності (6) отримуємо

$$V(t_1, x(t, x_0) + I_1(x(t_1, x_0)) + J_1(x(t_1, x_0))\, \eta_1(\omega)) \leq$$

$$\leq V(t_1, x(t, x_0) + I_1(x(t_1, x_0))) + B|\eta_1|\, \|J_1(x(t_1, x_0))\| \leq$$

$$\leq V(t_1, x(t_1, x_0) + I_1(x(t_1, x_0))) + BLV(t_1, x(t_1, x_0))|\eta_1| \leq$$

$$\leq (C_3 + 1)V(t_1, x(t_1, x_0)) + BLV(t_1, x(t_1, x_0))|\eta_1|\,. \tag{8}$$

Із нерівності (7), згідно з лемою з [1, с. 23], маємо

$$V\left(t, x(t, x_0)\right) \leq e^{C_2(t-t_0)} \left[V\left(t_0, x_0\right) + BC_1 \int\limits_0^t |\zeta(s)|\, ds \right], \quad t \in [0, t_1]\,.$$

Тому

$$V\left(t_1 + 0, x(t_1 + 0, x_0)\right) \leq \left(C_3 + 1 + BL\left|\eta_1\right|\right) V\left(t_1, x(t_1, x_0)\right) \leq$$

$$\leq \left(C_3 + 1 + BL\left|\eta_1\right|\right) e^{C_2 t_1} \left(V(0, x_0) + BC_2 \int\limits_0^{t_1} \zeta\left(s\right) ds \right)\,. \tag{9}$$

Таким чином, на $[t_1, t_2]$ для будь-якого t справедлива оцінка

$$V\left(t, x(t, x_0)\right) \leq e^{C_2(t-t_1)} \Big[(C_3 + 1 + BL|\eta_1|) e^{C_2 t_1} \left(V(0, x_0) + \right.$$

$$\left. + BC_2 \int\limits_0^{t_1} \zeta(s) ds \right) + BC_1 \int\limits_{t_1}^{t} \zeta(s) ds \Bigg]\,. \tag{10}$$

Звідси

$$V(t_2 + 0, x(t_2 + 0, x_0)) \leq (C_3 + 1 + BL|\eta_2|)V(t_2, x(t_2, x_0)) \leq$$

$$\leq (C_3 + 1 + BL|\eta_2|)e^{C_2(t_2-t_1)} \Big[(C_3 + 1 + BL|\eta_1|)e^{C_1 t_1} \times$$

$$\times \left(V(0, x_0) + BC_2 \int\limits_0^{t_1} \zeta(s) ds \right) + BC_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \zeta(s) ds \Bigg]\,.$$

Отже, при $t \in [t_2, t_3]$ одержуємо

$$V(t, x(t, x_0)) \leq e^{C_2(t-t_1)} (C_3 + 1 + BL|\eta_2|)\, e^{C_2(t_2-t_1)} \Big[(C_3 + 1 + BL|\eta_1|)e^{C_1 t_1} \times$$

$$\times \left(V(0, x_0) + BC_2 \int\limits_0^{t_1} \zeta(s) ds \right) + BC_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \zeta(s) ds + BC_1 \int\limits_{t_2}^{t} \zeta(s) ds \Bigg]\,. \tag{11}$$

Міркуючи аналогічно, при $n \geq 1$ маємо

$$V(t, x(t, x_0)) \leq e^{C_2(t-t_n)}\Big\{(C_3 + 1 + BL|\eta_n|)e^{C_2(t_2-t_1)}\times$$

$$\times\Big[(C_3 + 1 + BL|\eta_{n-1}|)e^{C_2(t_{n-1}-t_{n-2})}\Big(\dots e^{C_1 t_1}\Big(V(0, x_0) + BC_2\int\limits_0^{t_1}\zeta(s)ds\Big)+$$

$$+BC_1\int\limits_{t_1}^{t_2}\zeta(s)ds\dots + BC_1\int\limits_{t_n}^{t}\zeta(s)ds\dots\Big)\Big]\Big\} \quad \forall\, t \in [t_n, t_{n+1}]. \tag{12}$$

Праву частину нерівності (12) позначимо через $G(t)$, а розв'язок рівняння

$$G(\tau_R) = V_R \tag{13}$$

— через $\tau_R(\omega)$. Оскільки $\zeta(t)$ є локально абсолютно інтегровним, а число імпульсів на будь-якому скінченному інтервалі часу скінченне, то з умови (5) випливає, що $\tau_R \to \infty$ при $R \to \infty$ з імовірністю 1.

Отже, враховуючи (5), маємо

$$\inf_t \{|x(t, x_0)| \geq R\} \geq \tau_R \to \infty\,, \quad R \to \infty\,. \tag{14}$$

Із співвідношення (14) випливає доведення теореми.

Як приклад розглянемо збурене рівняння Льєнара з імпульсною дією вигляду

$$\begin{aligned} &x'' + f(x)\,x' + g(x) = \sigma(x, x')\,\zeta(t), \qquad t \neq t_i\,,\\ &\Delta x' = I_i(x, x') + J_i(x, x')\,\eta_i(\omega)\,, \qquad t = t_i\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Воно описує процес „на вході" багатьох реальних радіотехнічних систем, на вхід яких надходить випадковий процес і які в процесі еволюції зазнають впливу імпульсних випадкових сил. Зокрема, при

$$f(x) = 1 - x^2\,, \quad g(x) = x\,, \quad \sigma(x, x') = 1$$

одержимо відоме рівняння Ван-дер-Поля. Нехай функція $f(x)$ обмежена знизу і виконані умови

$$|\sigma(x, x')| < C_1\,, \quad \Big|\frac{g(x)}{x}\Big| < C_2\,, \quad I_i^2(x, y) \leq K(x^2 + y^2)\,.$$

Введемо функцію Ляпунова $V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \in C_0$. Якщо $|J_i(x, y)| \leq L\sqrt{x^2 + y^2}$, то дана функція задовольняє умови теореми.

Дійсно, перейшовши в (15) до еквівалентної системи, одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y\,, & t \neq t_i\,,\\ \dfrac{dy}{dt} = -f(x)y - g(x) + \sigma(x, y)\zeta(t)\,, & t \neq t_i\,,\\ \Delta\, y = I_i(x, y) + J_i(x, y)\eta_i(\omega)\,, & t = t_i\,. \end{cases} \tag{16}$$

Тоді

$$\frac{d^0V}{dt} = \frac{xy}{\sqrt{(x,y)}} + \frac{yy'}{\sqrt{(x,y)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}y +$$

$$+\frac{y(-f(x)y - g(x))}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{Cy^2 + C_1xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \le C_2\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

отже, перша з нерівностей виконана.

Для виконання другої нерівності достатньо встановити, що при деякому $C_3 > 0$

$$\sqrt{x^2 + (y + I_i(x,y))^2} - \sqrt{x^2+y^2} \le C_3\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (17)$$

Нерівність (17) рівносильна такій:

$$x^2 + (y + I_i)^2 \le (C+1)^2(x^2+y^2)\,.$$

Але

$$x^2 + y^2 + 2yI_i + I_i^2 \le x^2 + 2y^2 + 2I_i^2 \le x^2 + 2y^2 + 2K(x^2+y^2) \le$$

$$\le (1+2K)x^2 + (2+2K)y^2 \le (2+2K)(x^2+y^2)$$

і якщо $(C+1)^2 > (2+2K)$, або $C > \sqrt{2+2K} - 1$, то виконана і друга нерівність (6). А тому, застосовуючи теорему, одержуємо, що процес, визначений рівнянням (15), існує при всіх $t \ge t_0$, якщо $\zeta(t)$ — абсолютно локально інтегровний випадковий процес.

1. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

Одержано 21.04.98