УДК 517.9

ПРО ІСНУВАННЯ T-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СУТТЄВО НЕЛІНІЙНИХ СКАЛЯРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАКСИМУМАМИ

Н.Р. Банцур

Ін-т математики НАН України,
Україна, 252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: natasha@nb.home.te.ua

О.П. Трофимчук

Нац. техн. ун-т України "КПІ"
Україна, 252056, Київ, пр. Перемоги, 37
e-mail: strofim@mail.kar.net

Problem of existence of T-periodic solution of the nonlinear scalar differential equations of the form

$$x'(t) = f(x(t)) + g\Big(\max_{u\in[t-h,t]} x(u)\Big) + p(t), \quad t, x \in R$$

is investigated.

Розглядається питання про існування T-періодичних розв'язків суттєво нелінійних скалярних диференціальних рівнянь з максимумами вигляду

$$x'(t) = f(x(t)) + g\Big(\max_{u\in[t-h,t]} x(u)\Big) + p(t), \quad t, x \in R.$$

Будемо розглядати T-періодичне скалярне рівняння вигляду

$$x'(t) = f(x(t)) + g\Big(\max_{u\in[t-h,t]} x(u)\Big) + p(t), \quad t, x \in R, \tag{1}$$

з неперервними функціями в правій частині. Встановимо умови існування T-періодичних розв'язків цього функціонально-диференціального рівняння з запізненням. Одержані тут результати, зокрема, узагальнюють та посилюють деякі теореми із [1 – 4, 6]. Зауважимо, що на відміну від попередніх робіт ми не накладаємо умови підлінійного росту на функцію $g(x)$. У припущенні локальної ліпшіцевості функцій $f(x)$ та $g(x)$ сформулюємо основний результат роботи.

Теорема. *Припустимо, що функція $p(t)$ є T-періодичною і $f(x)$ задовольняє умову підлінійного росту*

1) $|f(x)| \le c_1|x| + c_2 \quad \forall x \in R, \quad c_1, c_2 \ge 0$

та виконується одна з умов

2_a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty;$

2_b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty.$

Нехай, крім того, існує таке $c \in R$, що рівняння $g(x) = c$ має єдиний розв'язок $x = \omega$. Тоді існує хоча б один T-періодичний розв'язок рівняння (1).

Доведення. Припустимо, що умова теореми виконується для $c = 0$. Розглянемо спочатку сім'ю рівнянь вигляду

$$x'(t) = \varepsilon f(x(t)) + g\Big(\max_{u\in[t-h,t]} x(u)\Big) + \varepsilon p(t), \quad \varepsilon \in [0,1]. \tag{2}$$

Зауважимо, що при $\varepsilon = 1$ рівняння (2) співпадає з (1), а при $\varepsilon = 0$ воно набуває вигляду

$$x'(t) = g\Big(\max_{u\in[t-h,t]} x(u)\Big). \tag{3}$$

Зафіксуємо $p(t) \in CP_T(R)$ та визначимо множини $B_\varepsilon = \{x \in R \mid \exists t^* \in [0,T] : \varepsilon f(x)+$ $+g(x) + \varepsilon p(t^*) = 0\}$. Нехай $\inf B_\varepsilon = \alpha_\varepsilon$ і $\sup B_\varepsilon = \beta_\varepsilon$. Покажемо, що $B_\varepsilon \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon$ та існують $\alpha, \beta \in R : \alpha \le \alpha_\varepsilon \le \beta_\varepsilon \le \beta$ $\forall \varepsilon \in [0,1]$.

Дійсно, в силу виконання умов 1 та 2 функція $g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon f(x)$ має таку ж асимптотичну поведінку при $x \to \pm\infty$, що і $g(x)$, тому при довільному фіксованому $\hat{t} \in [0,T]$ рівняння $g_\varepsilon(x) = -\varepsilon p(\hat{t})$, очевидно, має не менше одного розв'язку.

Далі, в силу умови 2 множина $L = \{|x| \ge 1 : |g(x)| < \lambda|x|\}$, де $\lambda = c_1 + c_2 + |p|_\infty$; $|p|_\infty =$ $= \sup\limits_{t\in R} |p(t)|$ є обмеженою, і тому можна вказати α, $\beta : |\alpha|, |\beta| \ge 1$ такі, що $L \subset [\alpha, \beta]$.

Покажемо, що $B_\varepsilon \subset [\alpha, \beta]$. Справді, якщо $z \in B_\varepsilon$ і $|z| \le 1$, то, очевидно, $z \in [\alpha, \beta]$. Якщо ж $z \in B_\varepsilon$ і $|z| \ge 1$, то таке z при деякому $\hat{t} \in [0,T]$ задовольняє рівняння

$$\frac{g(z)}{z} = -\left(\frac{\varepsilon f(z)}{z} + \frac{p(\hat{t})}{z}\right),$$

звідки $\left|\dfrac{g(z)}{z}\right| \le \left|\dfrac{\varepsilon f(z)}{z} + \dfrac{p(\hat{t})}{z}\right| \le \lambda$, тобто $z \in L \subset [a,b]$.

Доведемо рівномірну відносно $\varepsilon \in [0,1]$ обмеженість зверху всіх T-періодичних розв'язків $x^*(t,\varepsilon)$ сім'ї (2). Справді, нехай $s_{\max}$ — точка абсолютного максимуму T-періодичного розв'язку $x^*(t,\varepsilon) : x^*(s_{\max},\varepsilon) = M$. Тоді $\dfrac{dx^*(s_{\max},\varepsilon)}{dt} = 0$, $\max\limits_{u\in[s-h,s]} x^*(u,$ $\varepsilon) = x^*(s_{\max},\varepsilon)$ і $\varepsilon f(M)+ g(M)+ \varepsilon p(t) = 0$, звідки $M \in B_\varepsilon \subset L$, тому $\alpha \le M \le \beta$. На жаль, подібна техніка не працює при оцінюванні мінімуму. У цьому випадку доведення рівномірної відносно $\varepsilon \in [0,1]$ обмеженості знизу всіх T-періодичних розв'язків системи (2) дещо складніше. Нехай $s_{\min} \ge s_{\max}$ — точка абсолютного мінімуму функції $x^*(t,\varepsilon)$. Для оцінювання $|x^*(s_{\min},\varepsilon)|$ застосуємо до диференціального рівняння із запізненням (2) метод кроків на інтервалі $[s_{\max}, s_{\min}]$; при цьому зауважимо, що число кроків не перевищує $\left[\dfrac{T}{h}\right] + 1$.

Розглянемо інтервал $[s_{\max}, s_{\max} + h] = I_1$. На ньому функція $x^*(t,\varepsilon)$ є розв'язком задачі Коші:

$$x'(t) = \varepsilon f(x(t)) + g(M) + \varepsilon p(t), \quad x(s_{\max}) = M.$$

Тому

$$|x(t)| \le |M| + \int_{s_{\max}}^{t} (\varepsilon c_1|x(t)| + \varepsilon c_2 + |g(M)| + \varepsilon|p|_\infty)dt,$$

звідки, використовуючи нерівність Гронуолла – Беллмана, одержуємо

$$|x(t)| \le (|M| + \varepsilon c_2 h + h|g(M)| + \varepsilon h|p|_\infty)e^{\varepsilon c_1 h} \le$$
$$\le (|M| + c_2 h + h|g(M)| + h|p|_\infty)e^{c_1 h} \quad \forall t \in I_1.$$

Таким чином,

$$|x^*(t,\varepsilon)| \le \nu_1(M,h) \quad \forall t \in I_1.$$

Припустимо тепер, що

$$|x^*(t,\varepsilon)| \le \nu_k(M,h) \qquad \forall t \in I_k = [s_{\max} + h(k-1), s_{\max} + hk],$$

і покажемо, що знайдеться додатна константа $\nu_{k+1}(M,h)$, яка неперервно залежить лише від M та h така, що

$$|x^*(t,\varepsilon)| \le \nu_{k+1}(M,h) \qquad \forall t \in I_{k+1}.$$

Справді, на інтервалі I_{k+1} функція $x^*(t,\varepsilon)$ є розв'язком наступної задачі Коші:

$$x'(t) = \varepsilon f(x(t)) + g(\max_{u\in[t-h,t]} x^*(u,\varepsilon)) + p(t),$$
$$x(s_{\max} + hk) = x^*(s_{\max} + hk, \varepsilon).$$

При цьому, очевидно, що $M \ge \max\limits_{u\in[t-h,t]} x^*(u,\varepsilon) \ge x^*(s_{\max} + hk,\varepsilon)$ $\forall t \in I_{k+1}$, і тому $\left|\max\limits_{u\in[t-h,t]} x^*(u,\varepsilon)\right| \le \max\{|M|, \nu_k(M,h)\} = \nu_k(M,h) \overset{\text{def}}{=} \nu_k$ $\forall t \in I_{k+1}$.

Таким чином,

$$|x(t)| \le \nu_k(M,h) + \int\limits_{s_{\max}+hk}^{t} (c_1|x(t)| + c_2 + |p|_\infty + \max_{|u|\in\nu_k} |g(u)|)dt \quad \forall t \in I_{k+1},$$

звідки

$$|x(t)| \le (\nu_k + (c_2 + |p|_\infty)h + \max_{|u|\in\nu_k} |g(u)|)e^{c_1 h} \overset{\text{def}}{=} \nu_{k+1}(|M|,h),$$

що і треба було довести. Оскільки, $s_{\min} \in I_j$ при деякому $j \le \left[\dfrac{T}{h}\right] + 1$, то ми тим самим довели рівномірну обмеженість всіх T-періодичних функцій $|x^*(t,\varepsilon)|$ константою, яка не залежить від $\varepsilon \in [0,1]$.

Покажемо тепер, що рівняння

$$x'(t) = g\left(\max_{u\in[t-\sigma h,t]} x(u)\right), \quad h \ge 0,\ \sigma \in [0,1], \tag{4}$$

має єдиний періодичний розв'язок $x(t) = \omega$ для будь-якого t. Нехай $z(t)$ — довільний інший періодичний розв'язок рівняння (4), причому $K = \max\limits_{t\in R} z(t)$. Тоді $g(K) = 0$, звідки випливає $z(t) \le K = \omega$. Розглянемо випадок, коли $g(x) < 0$ при $x < \omega$. Оскільки $z'(t) = g\left(\max\limits_{u\in[t-\sigma h,t]} z(u)\right) \le 0$, функція $z(t)$ є незростаючою, а тому за необхідністю $z(t) =$

$= \text{const}$. В результаті $z(t) = x(t) = \omega$ — єдиний періодичний розв'язок рівняння (4). Випадок, коли $g(x) > 0$ для $x > \omega$, розглядається аналогічно.

Розглянемо сім'ю рівнянь вигляду

$$x'(t) = \varepsilon f(x(t)) + g\Big(\max_{u\in[t-\sigma h,t]} x(u)\Big) + \varepsilon p(t), \tag{5}$$

де $\varepsilon \in [0,1]$, $\sigma \in [0,1]$. Зауважимо, що при $\sigma = 1, \varepsilon = 1$ рівняння (5) співпадає з (1), а при $\sigma = 0, \varepsilon = 0$ воно набуває вигляду

$$x'(t) = g(x(t)). \tag{6}$$

Зафіксуємо параметр $\sigma = 1$ і будемо змінювати параметр ε від 1 до 0, а потім, зафіксувавши $\varepsilon = 0$, таким же чином будемо змінювати параметр σ від 1 до 0. В результаті ми „гомотопіюємо" рівняння (1) в рівняння (6). При цьому вище ми показали рівномірну обмеженість всіх періодичних розв'язків $x^*(t)$ рівнянь (5) константою $\max\{|\omega|, \nu_{[T/h]+1}(M,h)\} + 1 \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa$.

Зауважимо, що існування T-періодичного розв'язку кожного з цих рівнянь при $h \le T$ зводиться до питання про існування нерухомих точок $\Phi(x,\ \sigma,\ \varepsilon) = x$ цілком неперервного відображення Пуанкаре $\Phi(x,\ \sigma,\ \varepsilon)$ для рівняння (5). Розглянемо кулю $U_\varkappa = \{x \in \in C \stackrel{\text{def}}{=} C([-h,0],R) : |x(t)| \le \varkappa\}$. Відмітимо, що цілком неперервне поле $\Phi(x,\sigma,\varepsilon) - x$ не має нулів на границі кулі $U_\varkappa$ для всіх $\sigma \in [0,1]$ при $\varepsilon = 0$ та всіх $\varepsilon \in [0,1]$ при $\sigma = 1$ на підставі першої частини доведення. Оскільки $\Phi(x,\sigma,\varepsilon)$ неперервне за сукупністю аргументів, обертання γ векторних полів $\Phi(x,1,1) - x$ та $\Phi(x,0,0) - x$ на $U_\varkappa$ співпадають. Підрахуємо індекс $\gamma(\Phi(x,0,0) - x,\ U_\varkappa)$. Оскільки рівняння, що асоційоване з $\Phi(x,0,0)$, є скалярним звичайним диференціальним рівнянням, то цілком неперервне поле $\Phi(x,0,0)$ є також скінченновимірним (скалярним). Тому, по суті, нам необхідно знайти обертання для одновимірного відображення Пуанкаре для рівняння (6) (див. § 20, п. 20.1 [5]). Умова 2 теореми гарантує існування додатного числа $r > \varkappa$ такого, що права частина (5) є знакосталою на множинах $I_-(R) = [0,T]\times(-\infty;R]$ та $I_+(R) = [0,T]\times[R;+\infty)$, і має там протилежні знаки. Можна вказати таке $r_1 \ge r$, що сегмент $I_1 = [-r_1, r_1]$ або строго покриває образ $\Phi([-r_1,r_1],0,0)$, або строго міститься в ньому. Це означає відповідно, що або $\gamma(\Phi(x,0,0) - x,\ I_1) = -1$, або $\gamma(\Phi(x,0,0) - x, I_1) = +1$ (див. §3, [5]). Але $\gamma(\Phi(x,0,0) - x,\ I_1) = \gamma(\Phi(x,0,0) - x, U_\varkappa)$ завдяки тому, що на множині $I_1 \setminus U_\varkappa$ поле $\Phi(x,0,0) - x$ невироджене. Підсумовуючи, зауважимо, що рівність $|\gamma(\Phi(x,1,1) - x, U_\varkappa)| = 1$ забезпечує існування хоча б однієї особливої точки у відображення $\Phi(x,1,1) - x$: $C \to C$, тобто існування T-періодичного розв'язку рівняння (1). Розглянемо тепер випадок $h \ge T$. Нехай $x^*(t)$ — T-періодичний розв'язок рівняння (1). Оскільки $\max\limits_{u\in[t-T,t]} x^*(u) = \max\limits_{u\in[t-h,t]} x^*(u)$, функція $x^*(t)$ буде також і розв'язком (1). Відмітимо, що випадок довільного $c \in R$ зводиться до випадку, який розглядався, якщо покласти $g_1(x) = g(x) - c$ та $f_1(x) = f(x) + c$. Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо рівняння вигляду

$$x'(t) = -\delta x(t) + p\Big(\max_{u\in[t-h,t]} x(u)\Big)^{2n+1} + f(t), \tag{7}$$

де $\delta, p \in R$, $n \in N \cup 0$. При $n = 0$ це рівняння детально розглядалось в роботі [5], де було доведено існування періодичного розв'язку при $p \neq \delta$. Із основного результату цієї роботи випливає, що рівняння (7) має не менше одного T-періодичного розв'язку при довільних p, δ за умови, що вони одночасно не дорівнюють нулю. Зрозуміло, що при додаванні суми вигляду $\sum\limits_{j=0}^{2n} p_k \Big(\max\limits_{u\in[t-h,t]} x(u) \Big)^j$, $p_k \in R$, у праву частину рівняння (7) твердження про існуванння T-періодичного розв'язку у (7) залишається справедливим.

1. *Sarafova G.Kh., Bainov D.D.* Application of A.M. Samoilenko's numerical-analitic method to the investigation of periodic linear differential equations with maxima //Stud.-sci. math. hung. – 1982. – **17**, № 1–4. – P. 221–228.

2. *Самойленко А.М., Трофимчук О.П., Банцур Н.Р.* Періодичні та майже періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь з максимумами //Допов. НАН України. – 1998. – № 1. – С. 53-57.

3. *Рябов Ю.А., Магомедов А.Р.* О периодических решениях линейных дифференциальных уравнений с максимумами //Мат. физика. – 1978. – Вып. 23. – С. 3–9.

4. *Xu H., Liz E.* Boundary value problems for differential equations with maxima //Nonlinear Stud. – 1996. – **3**, № 2. – P. 231–241.

5. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

6. *Шпакович В.П., Мунтян В.И.* Метод усреднения для дифференциальных уравнений с „максимумами" //Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 662–665.

Одержано 25.01.98