УДК 517.927

ПРО ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ МОДИФІКОВАНОГО КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

В. Б. Поселюжна

Тернопіл. акад. народ. госп-ва
Ін-т підприємництва і бізнесу
Україна, 48500, Чортків, вул. С. Бандери, 46

The use of collocation-iteration method for solving nonlinear integral equations is considered. The algorithm of the method is constructed and sufficient conditions for convergence are found.

Розглядається питання застосування колокаційно-ітеративного методу до розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь. Побудовано алгоритм методу та встановлено достатні умови його збіжності.

Найбільш поширеними аналітичними методами розв'язування інтегральних та диференціальних рівнянь є ітераційні та проекційні методи. На основі синтезу цих методів виникли проекційно-ітеративні методи. Загальну теорію даних методів та їх застосування найбільш повно викладено в роботах [1 – 3].

У даній роботі пропонується варіант модифікованого проекційно-ітеративного методу — колокаційно-ітеративний метод для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь та встановлюються достатні умови його збіжності.

Розглянемо інтегральне рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt + \lambda \int_a^b G(x,t)F\left(t, y(t)\right)\,dt, \tag{1}$$

в якому:

1) функція $f \in C\,[a,b]$;

2) лінійні інтегральні оператори

$$(Ky)(x) := \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt, \tag{2}$$

$$(Gy)(x) := \int_a^b G(x,t)y(t)\,dt \tag{3}$$

відображають простір $C[a,b]$ в себе і

$$K^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dx \, dt < \infty, \qquad G^2 = \int_a^b \int_a^b |G(x,t)|^2 \, dx \, dt < \infty;$$

3) функція $F(t,y)$ — неперервна функція своїх аргументів в області $\{a < t < b, -\infty < y < \infty\}$ і задовольняє умову Ліпшиця, тобто

$$|F(t,y_1) - F(t,y_2)| < \mu \, |y_1 - y_2| \quad \forall \{y_1, y_2\} \in R, \tag{4}$$

де μ — деяка додатна стала; λ — малий параметр.

Застосуємо до рівняння (1) модифікований колокаційно-ітеративний метод, згідно з яким наближені розв'язки рівняння (1) будуються за формулами

$$y_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) z_k(t) \, dt + \lambda \int_a^b G(x,t) F(t, y_{k-1}) \, dt, \tag{5}$$

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), \tag{6}$$

$$w_k(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^k \varphi_j(x). \tag{7}$$

Невідомі параметри a_j^k, $j = \overline{0,n}$, в кожній ітерації визначаємо з умови

$$w_k(x_i) = y_k(x_i) - y_{k-1}(x_i), \quad i = \overline{0,n}, \tag{8}$$

де $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{n}$ — система лінійно незалежних, неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій, $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ — вузли колокації.

Звичайним способом для визначення параметрів a_j^k, $j = \overline{0,n}$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^k \left(\varphi_j(x_i) - \int_a^b K(x_i,t) \varphi_j(t) \, dt \right) = \varepsilon_k(x_i), \quad i = \overline{0,n}, \tag{9}$$

в якій

$$\varepsilon_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) y_{k-1}(t) \, dt + \lambda \int_a^b G(x,t) F(t, y_{k-1}(t)) \, dt - y_{k-1}(x). \tag{10}$$

Якщо система (9) однозначно розв'язна, то наближені розв'язки рівняння (1) згідно з колокаційно-ітеративним методом (5) – (8) будуються однозначно.

Припустимо, не обмежуючи загальності, що $\{\varphi_j(x)\}$ — фундаментальна система функцій на відрізку $[a, b]$. Встановимо достатні умови збіжності методу (5) – (8).

Виконавши нескладні перетворення на основі формул (7), (8) і врахувавши попереднє зауваження, поправку $w_k(x)$ можна подати у вигляді

$$w_k(x) = \int_a^b S_n(x,t)\Delta_k(t)\,dt, \tag{11}$$

де

$$S_n(x,t) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x)\delta(t - x_j), \tag{12}$$

$$\Delta_k(x) = y_k(x) - y_{k-1}(x), \tag{13}$$

$\delta(t - x_j)$ — функція Дірака.

Для визначення функції $w_k(x)$ на основі формул (5), (11) – (13) отримаємо інтегральне рівняння з виродженим ядром

$$w_k(x) = g_k(x) + \int_a^b H_n(x,t)w_k(t)\,dt, \tag{14}$$

де

$$g_k(x) = \int_a^b S_n(x,t)\varepsilon_k(t)\,dt, \tag{15}$$

$$H_n(x,t) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x)K(x_j,t). \tag{16}$$

Інтегральне рівняння (14) рівносильне системі рівнянь (9). Алгоритм (5) – (8) рівносильний таким співвідношенням:

$$\Delta_k(x) = \int_a^b M_n(x,t)v_{k-1}(t)\,dt + \lambda\int_a^b E_n(x,t)\Delta F_{k-1}(t)\,dt,$$

$$v_k(x) = \int_a^b L_n(x,t)v_{k-1}(t)\,dt + \lambda\int_a^b D_n(x,t)\Delta F_{k-1}(t)\,dt,$$

де

$$v_k(x) = \Delta_k(x) - w_k(x),$$

$$\Delta F_{k-1}(x) = F\left(x, y_{k-1}(x)\right) - F\left(x, y_{k-2}(x)\right),$$

а ядра операторів переходу обчислюються за формулами

$$M_n(x,t) = K(x,t) + \int_a^b K(x,\tau) R_n(\tau,t)\, d\tau, \tag{17}$$

$$L_n(x,t) = M_n(x,t) - \int_a^b S_n(x,\tau) M_n(\tau,t)\, d\tau, \tag{18}$$

$$E_n(x,t) = G_n(x,t) + \int_a^b M_n(x,\tau) G_n(\tau,t)\, d\tau, \tag{19}$$

$$D_n(x,t) = E_n(x,t) - \int_a^b S_n(x,\tau) E_n(\tau,t)\, d\tau. \tag{20}$$

Тут $R_n(x,t)$ — резольвента ядра $H_n(x,t)$, що задовольняє рівняння

$$R_n(x,t) = H_n(x,t) + \int_a^b H_n(x,\tau) R_n(\tau,t)\, d\tau, \tag{21}$$

$$R_n(x,t) = H_n(x,t) + \int_a^b R_n(x,\tau) H_n(\tau,t)\, d\tau. \tag{22}$$

Розглянемо функцію

$$E(x,t) = G(x,t) + \int_a^b R(x,\tau) G(\tau,t)\, d\tau, \tag{23}$$

де $R(x,t)$ — резольвента ядра $K(x,t)$, і введемо такі позначення:

$$p_n = \|M_n\|, \quad q_n = \|L_n\|, \quad \gamma_n = \|E_n\|, \quad \eta_n = \|D_n\|, \quad \gamma^* = \|E\|, \tag{24}$$

$$r_n = \lambda\mu\gamma_n, \quad l_n = \lambda\mu\eta_n, \quad A_n = \begin{pmatrix} r_n & p_n \\ l_n & q_n \end{pmatrix}, \tag{25}$$

в яких M_n, L_n, E_n, D_n, E — інтегральні оператори, ядра яких визначаються формулами (17) – (20) та (23).

Теорема. *Нехай одиниця — регулярне значення лінійного інтегрального оператора (2), система функцій $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^n$ та вузли колокації підібрані таким чином, що*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t) - H(x,t)|^2 \, dx\, dt = 0, \tag{26}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \int\limits_a^b |G(x,t) - G_n(x,t)|^2 \, dx\, dt = 0, \tag{27}$$

де

$$G_n(x,t) = \sum_{j=0}^n \varphi_j(x) G(x_j, t),$$

і $\lambda\mu\gamma^* < 1$. *Тоді існує такий номер* n_0, *що для будь-якого* $n \geq n_0$ *система (9) однозначно розв'язна і послідовність* $\{y_k(x)\}$, *побудована згідно з методом (5) – (8), збігається до єдиного розв'язку рівняння (1).*

Доведення. Спочатку покажемо, що рівняння (14), а отже і система (9), має єдиний розв'язок. Для цього скористаємось методикою, викладеною в [3], і розглянемо рівняння

$$w(x) = g(x) + \int\limits_a^b H_n(x,t) w(t)\, dt. \tag{28}$$

Рівняння (28) рівносильне рівнянню

$$w(x) - \int\limits_a^b K(x,t) w(t)\, dt = g(x) + \int\limits_a^b (H_n(x,t) - K(x,t))\, w(t)\, dt. \tag{29}$$

Нехай

$$r(x) = g(x) + \int\limits_a^b (H_n(x,t) - K(x,t))\, w(t)\, dt, \tag{30}$$

тоді рівняння (29) запишемо у більш компактному вигляді

$$w(x) = r(x) + \int\limits_a^b K(x,t) w(t)\, dt. \tag{31}$$

Оскільки одиниця — регулярне значення інтегрального оператора (2), то рівняння (31) однозначно розв'язне і справедливе зображення

$$w(x) = r(x) + \int_a^b R(x,t)r(t)\,dt, \tag{32}$$

де $R(x,t)$ — резольвента ядра $K(x,t)$.

Підставивши співвідношення (30) у (32), отримаємо інтегральне рівняння для визначення функції $w(x)$

$$w(x) = b(x) + \int_a^b N_n(x,t)w(t)\,dt, \tag{33}$$

в якому

$$b(x) = g(x) + \int_a^b R(x,t)g(t)\,dt, \tag{34}$$

$$N_n(x,t) = H_n(x,t) - K(x,t) + \int_a^b R(x,\tau)\left(H_n(\tau,t) - K(\tau,t)\right)\,d\tau. \tag{35}$$

Оцінимо ядро $N_n(x,t)$ за нормою простору $L_2[a,b]$. Маємо

$$\left\{\int_a^b\int_a^b N_n^2(x,t)\,dx\,dt\right\}^{1/2} \le \left\{\int_a^b\int_a^b \left|H_n(x,t) - K(x,t)\right|^2\,dx\,dt\right\}^{1/2} +$$
$$+\left\{\int_a^b\int_a^b R^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\right\}^{1/2}\left\{\int_a^b\int_a^b \left|H_n(\tau,t) - K(\tau,t)\right|^2\,d\tau\,dt\right\}^{1/2} = (1+R)\delta_n, \tag{36}$$

де

$$\delta_n = \left\{\int_a^b\int_a^b \left|H_n(x,t) - K(x,t)\right|^2\,dx\,dt\right\}^{1/2},$$

$$R = \left\{\int_a^b\int_a^b R^2(x,t)\,dx\,dt\right\}^{1/2}.$$

В силу умови (26) $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Отже, існує такий номер n_1, що для будь-якого $n \geq n_1$ буде виконуватись нерівність $(1+R)\delta_n < 1$.

Тоді при $n \geq n_1$ рівняння (33), а отже, і рівняння (28) однозначно розв'язні, причому розв'язок рівняння (28) має вигляд

$$w(x) = g(x) + \int\limits_a^b R_n(x,t)g(t)\,dt. \tag{37}$$

При цьому справедлива оцінка

$$\|w\| \leq c_n \|g\|, \tag{38}$$

де

$$c_n = \frac{1+R}{1-(1+R)\delta_n},$$

яка безпосередньо випливає із (33) з урахуванням (34) та (36).

Оскільки (14) і (28) мають лише різні вільні члени, то рівняння (14) має єдиний розв'язок, і тим самим однозначно розв'язана і система (9).

В [3] встановлено, що умова $\rho(A_n) < 1$ забезпечує збіжність колокаційно-ітеративного методу. З'ясуємо, при яких значеннях n дана умова буде виконуватись.

В [3] показано, що умова $\rho_n = \rho(A_n) < 1$ рівносильна умові

$$\rho_n = 0,5\left(q_n + r_n + \sqrt{(q_n - r_n)^2 + 4p_n l_n}\right) < 1, \tag{39}$$

де $\rho(A_n)$ — спектральний радіус матриці A_n. Покажемо, що при $n \to \infty \quad q_n \to \infty$, $p_n \to \to p^*$, $l_n \to 0$, $r_n \to r^*$. Із співвідношень (16) – (18) маємо

$$\int\limits_a^b L_n(x,t)v(t)\,dt = \int\limits_a^b \left(K(x,t) - H_n(x,t)\right)u_n(t)\,dt, \tag{40}$$

де

$$u_n = v(x) + \int\limits_a^b R_n(x,t)v(t)\,dt. \tag{41}$$

Із співвідношення (41) з урахуванням співвідношення (37) та оцінки (38) отримуємо

$$\|u_n\| \leq c_n \|v\|, \quad n \geq n_1. \tag{42}$$

Тоді на підставі (40), (42) знаходимо

$$\|L_n v\| \le \left\{ \int_a^b \int_a^b (K(x,t) - H_n(x,t))^2 \, dx\, dt \right\}^{1/2} \|u_n\| = c_n \delta_n \|v\| . \tag{43}$$

Оскільки при $n \to \infty$ $\delta_n \to 0$, а c_n — обмежена, то $q_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Із співвідношення (20) з урахуванням (17) – (19) отримуємо

$$\int_a^b D_n(x,t) v(t)\, dt = \int_a^b (G(x,t) - G_n(x,t)) \, v(t)\, dt +$$

$$+ \int_a^b \int_a^b L_n(x,\tau) G_n(\tau,t) v(t)\, dt\, d\tau. \tag{44}$$

Тоді із формул (44), (43) маємо

$$\|D_n v\| \le \left\{ \int_a^b \int_a^b (G(x,t) - G_n(x,t))^2 \, dx\, dt \right\}^{1/2} \|v\| + \left\{ \int_a^b \int_a^b L_n^2(x,\tau)\, dx\, d\tau \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \int_a^b G_n^2(\tau,t)\, d\tau\, dt \right\}^{1/2} \|v\| \le (g_n + \delta_n c_n m_n) \|v\|, \tag{45}$$

$$g_n = \left\{ \int_a^b \int_a^b (G(x,t) - G_n(x,t))^2 \, dx\, dt \right\}^{1/2}, \tag{46}$$

$$m_n = \left\{ \int_a^b \int_a^b G_n^2(x,t)\, dx\, dt \right\}^{1/2}. \tag{47}$$

Покажемо, що при виконанні умови (27) $m_n \le m \quad \forall n \ge n_2$.

Справді, із співвідношення (47) одержуємо

$$m_n = \left\{ \int_a^b \int_a^b (G_n(x,t) - G(x,t) + G(x,t))^2 \, dx\, dt \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \left\{ \int_a^b \int_a^b (G_n(x,t) - G(x,t))^2 \, dx\, dt \right\}^{1/2} + \left\{ \int_a^b \int_a^b G^2(x,t)\, dx\, dt \right\}^{1/2} = g_n + G,$$

де G — величина, що фігурує в умові 2. Оскільки за умовою (27) $g_n \to 0$ при $n \to \infty$, то існує n_2 таке, що для будь-якого $n \geq n_2$ $m_n \leq m$. Тоді оцінка (45) набере вигляду

$$\|D_n v\| \leq (\delta_n + \delta_n c_n m)\,\|v\| \quad \forall n \geq \max\{n_1, n_2\}.$$

Оскільки при $n \to \infty$ $g_n \to 0$, $\delta_n \to 0$, а c_n — обмежена, то $\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Із співвідношень (17), (41) та оцінки (42) знаходимо

$$\|M_n v\| \leq \left\{\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt\right\}^{1/2} \|u_n\| \leq Kc_n\,\|v\| \quad \forall n \geq n_1.$$

Якщо $n \to \infty$, то $p_n \to p^*$.

На основі співвідношень (17), (19) отримуємо

$$\int\limits_a^b E_n(x,t)v(t)\,dt = \int\limits_a^b G(x,t)v(t)\,dt + \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,\tau)G_n(\tau,t)v(t)\,dt\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_a^b \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,\tau)R_n(\tau,\eta)G_n(\eta,t)v(t)\,dt\,d\eta\,d\tau. \tag{48}$$

На підставі співвідношень (48), (23) та того факту [4], що резольвента $R(x,t)$ ядра $K(x,t)$ задовольняє рівняння

$$R(x,t) = K(x,t) + \int\limits_a^b K(x,\tau)R(\tau,t)\,d\tau,$$

маємо

$$\int\limits_a^b (E_n(x,t) - E(x,t))\,v(t)\,dt = \int\limits_a^b K(x,t)z_n(t)\,dt + \int\limits_a^b K(x,t)y_n(t)v(t)\,dt, \tag{49}$$

$$z_n(x) = \int\limits_a^b (G_n(x,t) - G(x,t))\,v(t)\,dt +$$
$$+ \int\limits_a^b \int\limits_a^b R_n(x,\tau)\,(G_n(\tau,t) - G(\tau,t))\,v(t)\,dt\,d\tau, \tag{50}$$

$$y_n(x) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b \left(R_n(x,\tau) - R(x,\tau)\right) G(\tau,t) v(t)\, dt\, d\tau. \tag{51}$$

Із співвідношення (50) з урахуванням формули (37), вважаючи в ній $g(x) = \int\limits_a^b (G_n(x,t) - -G(x,t))v(t)\, dt$, оцінки (38) і позначення (46) одержуємо

$$\|z_n\| \le c_n g_n \|v\|. \tag{52}$$

Співвідношення (51) подамо у вигляді

$$y_n(x) = \int\limits_a^b R_n(x,t)h(t)\, dt - \int\limits_a^b R(x,t)h(t)\, dt,$$

де

$$h(x) = \int\limits_a^b G(x,t)v(t)\, dt. \tag{53}$$

Тоді на основі співвідношень (21), (25) отримуємо

$$y_n(x) = \int\limits_a^b K(x,t)y_n(t)\, dt + \int\limits_a^b \left(H_n(x,t) - K(x,t)\right) h(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_a^b \int\limits_a^b \left(H_n(x,\tau) - K(x,\tau)\right) R_n(\tau,t) h(t)\, dt\, d\tau,$$

або

$$y_n(x) = \int\limits_a^b K(x,t)y_n(t)\, dt + \int\limits_a^b \left(H_n(x,t) - K(x,t)\right) k_n(t)\, dt, \tag{54}$$

$$k_n(x) = h(x) + \int\limits_a^b R_n(x,t)h(t)\, dt. \tag{55}$$

Із співвідношення (54), як і при доведенні оцінки (38), маємо

$$\|y_n\| \le (1+R)\delta_n \|k_n\|. \tag{56}$$

Із співвідношення (55) з урахуванням формул (37), (38), (53) отримуємо

$$\|k_n\| \leq c_n G \|v\| . \tag{57}$$

Підставляючи оцінку (57) в (56), остаточно одержуємо

$$\|y_n\| \leq (1+R) G \delta_n c_n \|v\| . \tag{58}$$

Тоді на основі співвідношення (49) і оцінок (52), (58) отримуємо

$$\|(E_n - E)\, v\| \leq K \left(c_n g_n + (1+R) G \delta_n c_n\right) \|v\| .$$

Оскільки за умовою теореми $g_n \to 0$, $\delta_n \to 0$, а c_n — обмежена, то $q_n^* = c_n K(g_n + (1+R) G \delta_n) \to 0$, $n \to \infty$. Отже, при $n \to \infty$ $E_n(x,t) \to E(x,t)$, $i\gamma_n \to \gamma^*$.

Переходячи у співвідношенні (39) до границі при $n \to \infty$, з урахуванням позначень (25) маємо $\lim_{n\to\infty} \rho_n = r^*$, $r^* = \lambda\mu\gamma^*$.

Оскільки за умовою $r^* < 1$, то, очевидно, існує такий номер n_0, що для будь-якого $n \geq n_0$ $\rho_n < 1$, а отже, метод (5)–(8) збігається. Теорему доведено.

1. *Курпель Н.С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1968. — 244 с.
2. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1980. — 262 с.
3. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.
4. *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965. — 127 с.

Одержано 06.03.2001