УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИПШИЦЕВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Ронто

Ин-т математики НАН Украины,
Украина, 252601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: ar@imath.kiev.ua

New solvability conditions for the periodic boundary value problem for a class of differential systems are obtained with a suitable version of A.M. Samoilenko's method of periodic successive approximations.

За допомогою модифікованого варіанта методу послідовних періодичних наближень А.М. Самойленка одержано нові умови розв'язності періодичної крайової задачі для певних класів систем диференціальних рівнянь.

Вопросам изучения условий разрешимости разных классов краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ. Так, для исследования периодических режимов в нелинейных системах с малым параметром имеется хорошо разработанный арсенал асимптотических методов [1, 2]; приближения к решениям фредгольмовых задач часто удается получить с помощью методов аппроксимационно-итеративного типа [3]; разного рода резонансные краевые задачи могут быть рассмотрены с применением аппарата обобщенного обращения линейных операторов [4]. В ряде случаев целесообразным является использование численно-аналитических методов [5]. Обзор исследований в области применения этих методов к двухточечным краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений содержится в статьях [6, 7].

В настоящей статье указано одно обобщение схемы численно-аналитического метода А.М. Самойленко [5], получены условия применимости построенной схемы, а также рассмотрен ряд следствий.

Используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n_+$ — множество векторов с неотрицательными компонентами; $L^1([a,b],\,\mathbb{R}^n)$ — пространство вектор-функций с компонентами, интегрируемыми по Лебегу на промежутке $[a,b]$; $C_A([a,b],\mathbb{R}^n)$ — множество n-векторнозначных функций с абсолютно непрерывными координатами; $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — кольцо линейных операторов в $\mathbb{R}^n$ с единицей I_n (его элементы отождествляются с задающими их матрицами в некотором фиксированном базисе); $\sigma(L)$ — спектр линейного ограниченного оператора L, $r(L) := \sup\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma(L)\}$ — его спектральный радиус; $\Omega^{\cdot}_{\tau}[L]$ — решение задачи Коши вида $X' = LX$, $X(\tau) = I_n$, где $X : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — матричнозначная функция; $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}^n$; $\operatorname{fr}\Omega$ — граница множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $\deg(\Phi,\Omega,p)$ — брауерова степень непрерывного векторного поля $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ относительно точки $p \in \mathbb{R}^n$. Тождественные отображения в различных пространствах обозначаются символом I.

Линейное многообразие функций $x \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию

$x\left(\frac{a+b}{2}\right) = x(b)$, обозначается символом $C_{P+}([a,b], \mathbb{R}^n)$. В случае, когда $-a = b = \omega > 0$, пишем C_{P+} $([-\omega, \omega], \mathbb{R}^n) =: C^n_{P+}(\omega)$. Подпространство пространства $C([-\omega,\omega], \mathbb{R}^n)$, состоящее из сужений на $[-\omega, \omega]$ периодических с периодом ω непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, обозначается символом $C_P([-\omega, \omega], \mathbb{R}^n)$ (кратко C^n_P (ω)). Функции, являющиеся элементами пространства C^n_P (ω), называются *ω-периодическими*.

1. Постановка задачи и основные предположения. При заданном $\omega > 0$ рассмотрим периодическую краевую задачу

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0,\omega], \tag{1}$$

$$x(0) = x(\omega), \tag{2}$$

где $x : [0,\omega] \to \mathbb{R}^n$, а функция $f : [0,\omega] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ в некоторой ограниченной, замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

1) при всех $x \in \Omega$ отображение $f(\cdot, x) : [0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу;

2) при почти всех $t \in [0,\omega]$ функция $f(t,\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ непрерывна;

3) для всех $x \in \Omega$ и почти всех $t \in [0,\omega]$ выполняется неравенство вида $|f(t,x)| \leq \mu(t)$, где $\mu : [0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ — суммируемая функция.

В последней оценке, как и во всех встречающихся ниже соотношениях между векторно- и матричнозначными функциями, операции $\leq$, $|\cdot|$, sup и т. д. понимаются в покоординатном и (почти везде, для элементов L^1) поточечном смысле. Как обычно, решением задачи (1), (2) считается вектор-функция с абсолютно неперерывными на $[0,\omega]$ координатами, почти всюду на этом отрезке удовлетворяющая уравнению (1) и принимающая равные значения в его концах.

Относительно функции f предполагаем также, что

4) найдется $n \times n$-матричнозначная функция $L : [0,\omega] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ с суммируемыми на $[0,\omega]$ элементами такая, что при всех $\{x_1,x_2\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и почти всех $t \in [0,\omega]$ справедлива оценка

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L(t)\,|x_1 - x_2|\,.$$

Естественно считать, что компоненты L отличны от нуля на множестве положительной меры.

Пусть $\Psi : [0,\omega] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ – произвольная матричнозначная функция, компоненты которой абсолютно непрерывны и таковы, что выполняется равенство

$$\Psi(\omega) = \Psi(0) + I_n. \tag{3}$$

Легко видеть, что такой выбор возможен вследствие линейной независимости составляющих вектор-функционала $x \mapsto x(\omega) - x(0)$. Примером Ψ, удовлетворяющей условию (3), является функция, для всех $t \in [0,\omega]$ определенная формулой $\Psi(t) := c_j^{-1} u^j(t) I_n$, в которой $j \in \mathbb{N}$, а $u : [0,\omega] \to [0,1]$ непрерывна и такова, что числа $c_j := u^j(\omega) - u^j(0)$ $(j \in \mathbb{N})$ отделены от нуля. Заметим, что в этом случае члены последовательности $\{\psi_j := c_j^{-1} u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ имеют свойства $\psi_j(\omega) = \psi_j(0) + 1$ $(\forall j \geq 1)$ и $\lim\limits_{j\to\infty} \|\psi_j\|_{L^1[0,\omega]} = 0$.

Определим линейный оператор $\mathcal{K}_\Psi : L^1([0,\omega], \mathbb{R}^n) \to C_A([0,\omega], \mathbb{R}^n)$, для любой суммируемой функции $x : [0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ при почти всех $t \in [0,\omega]$, положив

$$[\mathcal{K}_\Psi x](t) := |I_n - \Psi(t)| \int\limits_0^t x(s)ds + |\Psi(t)| \int\limits_t^\omega x(s)ds. \tag{4}$$

В дальнейшем потребуется дополнительное условие.

5) $\Omega\left(\beta_{\omega,\Psi}\right) \neq \emptyset$, в котором

$$\Omega\left(\beta_{\omega,\Psi}\right) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, B(x, \beta_{\omega,\Psi}) \subset \Omega\right\}$$

и $\beta_{\omega,\Psi} := \max_{t\in[0,\omega]} \left[\mathcal{K}_\Psi \mu\right](t)$, где μ — суммируемая функция в предположении 3. (Здесь для любого $r \in \mathbb{R}^n_+$ полагаем $B(x,r) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |x-\xi| \leq r\}$.)

Условие 5 означает, нестрого говоря, что область Ω, в которой для f выполняются условия Каратеодори и условие Липшица, является „достаточно широкой".

2. Используемый метод. Пусть матричнозначная функция Ψ удовлетворяет условиям, приведенным в п. 1, и $\tau \in [0,\omega]$ — некоторое заданное число.

Теорема 1. *а) Каждое решение $x \in C_A\left([0,\omega], \mathbb{R}^n\right)$ ω-периодической краевой задачи (1), (2) при некотором значении $\xi \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению*

$$x(t) = \xi + \int\limits_\tau^t f(s, x(s))ds - \Psi(t) \int\limits_0^\omega f(s, x(s))ds, \quad t \in [0,\omega]. \tag{5}$$

б) Все решения уравнения (5) ω-периодичны.

в) Решение $x(\cdot,\xi)$ уравнения (5) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) тогда и только тогда, когда значение параметра $\xi \in \mathbb{R}^n$ таково, что $\int_0^\omega f(s,\, x(s, \xi))ds = 0$.

Доказательство проводится непосредственными вычислениями (см. [8], следствие 2.1).

Можно показать, что в принятых предположениях уравнения (5) однозначно разрешимы, и, следовательно, вопрос о разрешимости ω-периодической задачи (1), (2) может быть формально сведен к исследованию нулей некоторого n-мерного векторного поля $\Delta : \Omega(\beta_{\omega,\Psi}) \to \mathbb{R}^n$, заданного формулой

$$\Delta(\xi) := \int\limits_0^\omega f\left(t, x(t,\xi)\right)dt, \qquad \xi \in \Omega(\beta_{\omega,\Psi}), \tag{6}$$

где $x(\cdot,\xi) : [0,\omega] \to \Omega$ — единственное решение интегро-функционального уравнения (5) при фиксированном ξ.

Для простоты предположим, что $\tau = 0$ и $\Psi(0) = 0$ (в силу (3) отсюда следует, что $\Psi(\omega) = I_n$).

Теорема 2. *В предположении справедливости условий 1 – 5 существует матричнозначная функция $\Psi : [0,\omega] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ с абсолютно непрерывными компонентами такая, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(\omega) = I_n$, и уравнение (5) при каждом значении $\xi \in \Omega\left(\beta_{\omega,\Psi}\right)$ имеет единственное решение $x(\cdot,\xi) \in C_A([0,\omega],\mathbb{R}^n)$, совпадающее с равномерным пределом рекуррентной последовательности*

$$x_m(t,\xi) = \xi + \int\limits_0^t f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds - \Psi(t) \int\limits_0^\omega f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds, \tag{7}$$

где (непрерывное) начальное приближение $x_0 : [0,\omega] \times \Omega\left(\beta_{\omega,\Psi}\right) \to \Omega$ может быть выбрано произвольным образом. При этом для всех $m \geq 1$ справедлива поточечная и покоординатная оценка

$$|x - x_m| \leq \left(\mathcal{K}_\Psi \circ L\right)^m \left(I - \mathcal{K}_\Psi \circ L\right)^{-1} |x_1 - x_0|, \tag{8}$$

где L означает оператор умножения на одноименную матрицу.

Замечание 1. Как следует из приводимой ниже леммы 1, в условиях теоремы 2 можно считать, что $r(\mathcal{K}_\Psi \circ L) < 1$, и, значит, резольвента $(I - \mathcal{K}_\Psi \circ L)^{-1}$ определена.

Теорема 2 и следствие 2 в силу принципа обобщенного сжатия [9, с. 94] вытекают из следующей леммы 1, следствие 1 которой аналогично соответствующим утверждениям из работ [10, 11].

Лемма 1. *$r(\mathcal{K}_\Psi \circ L) \to 0$ при $\Psi \xrightarrow{L^1} 0$.*

Доказательство аналогично рассуждению, приведенному в [8].

Предположим противное, т.е. найдется некоторое число $\delta > 0$ такое, что $\varrho := := r(\mathcal{K}_\Psi \circ L) \geq \delta$, какова бы ни была матричнозначная функция Ψ с описанными выше свойствами. Покажем, что такое предположение неверно.

Несложно проверить, что $\mathcal{K}_\Psi \circ L$ является вполне непрерывным линейным преобразованием $L^1([0,\omega], \mathbb{R}^n)$ в себя, положительным [9] относительно естественного (покоординатного, почти везде поточечного) частичного упорядочения этого пространства. Очевидно, что конус почти везде неотрицательных векторнозначных функций с суммируемыми компонентами воспроизводящий [12] в том смысле, что наименьшим полностью содержащим его линейным многообразием является все пространство $L^1([0,\omega], \mathbb{R}^n)$. Следовательно, в силу теоремы М.Г. Крейна и М.А. Рутмана [12] (теорема 6.1) о позитивных собственных значениях вполне непрерывных линейных операторов, оставляющих инвариантным замкнутое и почти воспроизводящее коническое подмножество банахова пространства, можно заключить, что спектральный радиус $\varrho := r(\mathcal{K}_\Psi \circ L)$ оператора $\mathcal{K}_\Psi \circ L$ является его собственным значением, которому соответствует некоторая неотрицательная собственная функция $y \in L^1([0,\omega], \mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$\varrho y(t) = [1 - \Psi(t)] \int_0^t L(s)y(s)ds + \Psi(t) \int_t^\omega L(s)y(s)ds, \quad t \in [0,\omega],$$

откуда

$$\varrho Y'(t) = [1 - \Psi(t)] L(t)Y(t) + L(t)\Psi(t) [Y(\omega) - Y(t)], \quad t \in [0,\omega],$$

где $Y(t) := \int_0^t L(s)y(s)ds$, $t \in [0,\omega]$. (Для определенности здесь рассматривается случай, когда Ψ — диагональная матрица, значения элементов которой принадлежат отрезку $[0,1]$.)

Последнее равенство, очевидно, эквивалентно соотношению

$$\varrho Y'(t) = [1 - 2\Psi(t)] L(t)Y(t) + L(t)\Psi(t)Y(\omega), \quad t \in [0,\omega], \tag{9}$$

которое можно рассматривать как систему n линейных дифференциально-функциональных уравнений с суммируемыми коэффициентами. Решение же Y уравнения (9) с начальным значением $Y(0) = 0$ допускает представление вида

$$Y(t) = \frac{1}{\varrho} \int_0^t \Omega_\sigma^t \left[\frac{1}{\varrho}(1 - 2\Psi)L\right] L(\sigma)\Psi(\sigma)d\sigma \cdot Y(\omega), \quad t \in [0,\omega]. \tag{10}$$

Отметим, что $Y(\omega) = \int_0^\omega L(\sigma)y(\sigma)d\sigma$ и, следовательно, $Y(\omega) \neq 0$, поскольку в противном случае $y(t) = 0$ для почти всех $t \in [0,\omega]$, что невозможно, так как y — нетривиальная собственная функция линейного положительного оператора $\mathcal{K}_\Psi \circ L$. Таким образом, справедливо равенство

$$a = \frac{1}{\varrho} M_\Psi(\varrho) a, \tag{11}$$

в котором $a := \int_0^\omega L(\sigma) y(\sigma) d\sigma \neq 0$ и при положительных ϱ

$$M_\Psi(\varrho) := \int_0^\omega \Omega_\sigma^\omega \left[\frac{1}{\varrho}(1 - 2\Psi) L \right] L(\sigma) \Psi(\sigma) d\sigma. \tag{12}$$

Нетрудно показать, что $M_\Psi(\varrho) \to 0$ при $\int_0^\omega |\Psi(\sigma)| d\sigma \to 0$ равномерно по $\varrho \geq \delta$ для каждого $\delta > 0$. (Указанное утверждение следует из того факта, что компоненты матрицы $\Omega_\sigma^\omega \left[\varrho^{-1}(1 - 2\Psi) L \right]$ ограничены для $\varrho \geq \delta > 0$.) Итерируя (11), получаем соотношения

$$a = \frac{1}{\varrho^k} M_\Psi^k(\varrho) a \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

которые в совокупности с предположением, что $\varrho \geq \delta > 0$, при подходящим образом подобранной функции Ψ обусловливают выполнение равенства

$$a = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\varrho^k} M_\Psi^k(\varrho) a = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что на самом деле $r(\mathcal{K}_\Psi \circ L) \to 0$, когда к нулю устремляются элементы матрицы $\int_0^\omega |\Psi(\sigma)| d\sigma$.

Замечание 2. Заключение леммы 1 непосредственно следует из равенства

$$r\left(\mathcal{K}_\Psi \circ L\right) = \max\{\varrho > 0 \ : \ \varrho \in \sigma_+\left(M_\Psi(\varrho)\right)\}, \tag{13}$$

где $M_\Psi(\varrho)$ — $n \times n$-матрица, определенная для $\varrho > 0$ по формуле (12), и

$$\sigma_+(M) := \{\varrho > 0 \ : \ \exists v \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}, \ Mv = \varrho v\}$$

при $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (для произвольных M не исключается возможность $\sigma_+(M) = \emptyset$). Справедливость формулы (13) вытекает из приведенного выше рассуждения.

Следствие 1. *Предположим, что матричнозначная функция Ψ имеет вид $\Psi(t) = \psi(t) I_n$, $t \in [0, \omega]$, где $\psi : [0, \omega] \to [0, 1]$ абсолютно непрерывна и такова, что $\psi(\omega) = \psi(0) + 1$. Пусть условие Липшица 4 выполняется с $L(t) = l(t) I_n$, $t \in [0, \omega]$, где $l \in L^1([0, \omega], \mathbb{R})$.*

Тогда справедлива формула

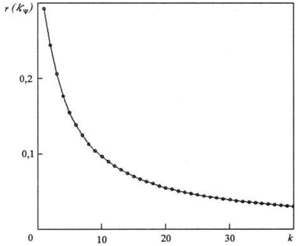
$$r\left(\mathcal{K}_\Psi \circ L\right) = \max\left\{ \varrho > 0 \ : \ \varrho = \int_0^\omega l(t) \psi(t) \exp\left(\frac{\varphi(t)}{\varrho} \right) dt \right\},$$

где

$$\varphi(t) := \int_t^\omega \{1 - 2\psi(\sigma)\} \, l(\sigma) d\sigma, \qquad t \in [0, \omega]. \tag{14}$$

Доказательство этого утверждения получаем из леммы 1 с учетом явной формулы для матрицантов $\Omega_{\sigma}^{\cdot}[\varrho^{-1}(1-2\Psi)L]$, поскольку в этом случае множество решений соответствующего уравнения (9) определяется совокупностью линейных дифференциальных систем типа Лаппо – Данилевского.

На рисунке показано изменение числа $r\left(\mathcal{K}_{\Psi}\right)$ относительно Ψ в случае, когда $\omega=1$, $\Psi(t)=t^{k}I_{n}$, $t\in[0,1]$, $k=1,2,\ldots,40$. Вычисления выполнены с помощью следствия 1, для применения которого достаточно положить $l(t)=1$ для всех $t\in[0,\omega]$.



Доказательство теоремы 2. Зададим некоторое $\xi\in\Omega\left(\beta_{\omega,\Psi}\right)$. Легко проверить, что в принятых условиях для любой непрерывной функции $x:[0,\omega]\to\Omega$ функция

$$y_{\xi}(t):=\xi+\int_{0}^{t}f(s,x(s))ds-\Psi(t)\int_{0}^{\omega}f(s,x(s))ds,\qquad t\in[0,\omega],$$

для почти всех $t\in[0,\omega]$ удовлетворяет неравенству $|y_{\xi}(t)-\xi|\leq\left[\mathcal{K}_{\Psi}\mu\right](t)$, где μ определено свойством 3. Согласно способу построения множества $\Omega\left(\beta_{\omega,\Psi}\right)$, последнее влечет $y_{\xi}:[0,\omega]\to\Omega$, и, следовательно, все члены последовательности (7) определены.

Можно считать, что надлежащий выбор матричнозначной функции Ψ обеспечивает неравенство $r\left(\mathcal{K}_{\Psi}\circ L\right)<1$ (см. замечание 1). Следовательно, применяя соответствующий вариант принципа сжимающих отображений (см., например, теорему 6.2 из [9]), доказываем однозначную разрешимость интегро-функционального уравнения (5) в пространстве $L^{1}([0,\omega],\mathbb{R}^{n})$ при произвольном $\xi\in\Omega\left(\beta_{\omega,\Psi}\right)$. Наконец, ввиду специальной формы этого уравнения очевидно, что его решение $x(\cdot,\xi)$ принадлежит пространству $C_{A}([0,\omega],\mathbb{R}^{n})$.

Оценку (8) (из которой, в частности, следует, что сходимость последовательности (7) к решению уравнения (5) равномерна по $t\in[0,\omega]$ при каждом фиксированном $\xi\in$ $\in\Omega\left(\beta_{\omega,\Psi}\right)$), можно получить с помощью стандартных рассуждений.

При $t\in[0,\omega]$, $\xi\in\Omega(\beta_{\omega,\Psi})$, $m\geq0$ и $l\geq1$ положим

$$\delta_{m,l}\left(t,\xi\right):=\left|x_{m+l}\left(t,\xi\right)-x_{m}\left(t,\xi\right)\right|.$$

Из (7) непосредственно следует

$$\delta_{m,l}(t,\xi) \le |I_n - \Psi(t)| \int\limits_0^t |f(s, x_{m+l-1}(s,\xi)) - f(s, x_{m-1}(s,\xi))| ds +$$

$$+ |\Psi(t)| \int\limits_t^\omega |f(s, x_{m+l-1}(s,\xi)) - f(s, x_{m-1}(s,\xi))| ds \le$$

$$\le |I_n - \Psi(t)| \int\limits_0^t L(s)\delta_{m-1,l}(s,\xi) ds + |\Psi(t)| \int\limits_t^\omega L(s)\delta_{m-1,l}(s,\xi) ds,$$

т. е. выполняется неравенство $\delta_{m,l} \le \mathcal{K}_\Psi \circ L \delta_{m-1,l}$. Отсюда вытекает

$$\delta_{m,l} \le (\mathcal{K}_\Psi \circ L)^m \delta_{0,l} \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Поскольку $\delta_{0,l} \le \sum\limits_{\nu=0}^{l-1} \delta_{\nu,1}$, имеем

$$\delta_{0,l} \le \sum_{\nu=0}^{l-1} (\mathcal{K}_\Psi \circ L)^\nu \delta_{0,1} \le (I - \mathcal{K}_\Psi \circ L)^{-1} \delta_{0,1}. \tag{16}$$

(В принятых условиях ряд $I + \mathcal{K}_\Psi \circ L + (\mathcal{K}_\Psi \circ L)^2 + \ldots$, образованный итерациями линейного положительного оператора, равномерно сходится.) Подставляя (16) в (15), получаем

$$\delta_{m,l} \le (\mathcal{K}_\Psi \circ L)^m (I - \mathcal{K}_\Psi \circ L)^{-1} \delta_{0,l}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

и остается перейти в соотношении (17) к пределу при $m \to \infty$.

Следствие 2. *Пусть в (1) функция f удовлетворяет условиям 1 – 4, приведенным в п. 1, при $\Omega = \mathbb{R}^n$. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.*

3. Некоторые теоремы о разрешимости периодической задачи. Как показано в п. 2, ω-периодическая краевая задача (1), (2) при сформулированных в п. 1 условиях 1 – 5 в определенном смысле равносильна вопросу о нулях векторного поля (6). Естественно, что исчерпывающее исследование в явном виде неизвестной функции Δ может быть проведено лишь в отдельных случаях. Одно общее соображение, восходящее к работам А.М. Самойленко [13, 14], состоит в том, чтобы изучать свойства упомянутой функции на основе информации, известной о некоторых ее приближениях, строящихся по конечному числу членов рекуррентной последовательности вида (7). Применение этой идеи в рассматриваемой здесь ситуации приводит к задаче исследования условий разрешимости определяющего уравнения $\Delta(\xi) = 0$ в терминах функций

$$\Delta_m(\xi) := \int\limits_0^\omega f(t, x_m(t,\xi))\, dt, \qquad \xi \in \Omega(\beta_{\omega,\Psi}), \tag{18}$$

где x_m — m-й элемент последовательности (7). Оказывается, что с использованием указанной в п. 2 схемы на этом пути можно получить более общие условия разрешимости задачи (1), (2), чем приведенные в работах [13 – 16].

Определение 1. *Пусть* Ω — *область* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathcal{O}$ — *некоторое ее непустое подмножество. Для заданной пары* $\{x_1, x_2\} \subset C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $x_\nu = (x_\nu^j)_{j=1}^n$ $(\nu = 1, 2)$ *будем писать, что* $x_1 \rhd_{\mathcal{O}} x_2$, *тогда и только тогда, когда найдется некоторое отображение* $k : \Omega \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *такое, что для каждого* $\xi \in \mathcal{O}$ *выполняется строгое неравенство* $x_1^{k(\xi)}(\xi) > x_2^{k(\xi)}(\xi)$.

Замечание 3. Легко видеть, что отношение $\rhd_{\mathcal{O}}$ антирефлексивно, а также для всех $\{x_1, x_2\} \subset C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $(x_1 \rhd_{\mathcal{O}} x_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2 \rhd_{\mathcal{O}} 0)$, причем для любого x соотношение $x \rhd_{\mathcal{O}} 0$ исключает возможность того, что $x(\xi) = 0$ при каком-либо $\xi \in \mathcal{O}$. Отметим также, что $\rhd_{\mathcal{O}}$ для $n > 1$ является собственным подмножеством поточечного и покоординатного бинарного отношения „$>$" в $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Пример 1. Пара функций $x_1(\xi) := (\cos \xi_1, \ \sin \xi_2)$ и $x_2(\xi) := \left(\dfrac{2}{3}\cos^2 \xi_1, -1\right)$, где $\xi = (\xi_1, \ \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, находится в отношении $\rhd_{\mathcal{O}}$ при $\mathcal{O} = [0, 2\pi]^2$, т. е. $x_1 \rhd_{[0,2\pi]^2} x_2$ (выбор $k : [0, 2\pi]^2 \to \{1, 2\}$ в определении 1 произволен). При этом также справедливо соотношение $x_1 \rhd_{[0,2\pi]^2} 0$, поскольку в определении 1 для всех $\xi \in [0, 2\pi]^2$ можно положить

$$k(\xi) := \chi_{[0,\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \times [0,2\pi]}(\xi) + 2 \cdot \chi_{[0,2\pi] \times [0,\pi]}(\xi).$$

Теорема 3. *Пусть в уравнении (1) функция* f *удовлетворяет условиям 1 – 4 и, если* $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, — *также условию 5 из п. 1. Пусть матричнозначная функция* Ψ *во вспомогательном уравнении (5) выбрана таким образом, что* $r(\mathcal{K}_\Psi \circ L) < 1$. *Предположим, что в* $\Omega(\beta_{\omega,\Psi})$ *существует некоторая ограниченная подобласть* $\mathcal{O}$ *такая, что при каком-либо* $m \geq 0$ *выполняется условие*

$$|\Delta_m| \rhd_{\mathrm{fr}\, \mathcal{O}} \int_0^\omega L(\sigma)\, |x(\sigma, \cdot) - x_m(\sigma, \cdot)|\, d\sigma. \tag{19}$$

Пусть, кроме того, $\deg(\Delta_m, \mathcal{O}, 0) \neq 0$.

Тогда ω*-периодическая краевая задача (1), (2) имеет решение.*

Доказательство аналогично доказательствам теоремы 7.1 [15] и теоремы 21 [16].

Как следует из теоремы 2, в принятых предположениях определяющая функция (6) однозначна, непрерывна и $\lim_{m\to\infty} \Delta_m(\xi) = \Delta(\xi)$, каково бы ни было $\xi \in \mathcal{O}$.

Определим отображение $\Theta : [0, 1] \times \mathrm{fr}\, \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ согласно формуле

$$\Theta(\lambda, \xi) := \Delta_m(\xi) + \lambda \left[\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)\right], \qquad \lambda \in [0, 1],\ \xi \in \mathrm{fr}\, \mathcal{O}.$$

Очевидно, $\Theta(0, \cdot) = \Delta_m$ и $\Theta(1, \cdot) = \Delta$, т. е. $[0, 1] \ni \lambda \mapsto \Theta(\lambda, \cdot)$ является непрерывной деформацией векторного поля $\Delta_m|_{\mathrm{fr}\, \mathcal{O}}$ в поле $\Delta|_{\mathrm{fr}\, \mathcal{O}}$. В силу условия Липшица 4 выполняется оценка

$$|\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| \leq \left| \int_0^\omega \left[f(\sigma, x(\sigma, \xi)) - f(\sigma, x_m(\sigma, \xi))\right] d\sigma \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\omega L(\sigma)\, |x(\sigma, \xi) - x_m(\sigma, \xi)|\, d\sigma, \quad \xi \in \mathrm{fr}\, \mathcal{O}. \tag{20}$$

Поскольку

$$\min_{\lambda\in[0,1]} |\Theta(\lambda,\xi)| \geq |\Delta_m(\xi)| - |\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)|,$$

из (20) следует, что для всех $\xi \in \operatorname{fr} \mathcal{O}$

$$|\Theta(\lambda,\xi)| \geq |\Delta_m(\xi)| - \int_0^\omega L(\sigma)\,|x(\sigma,\xi) - x_m(\sigma,\xi)|\,d\sigma.$$

Последнее неравенство в силу предположения (19) обеспечивает выполнение соотношения

$$\min_{\lambda\in[0,1]} |\Theta(\lambda,\cdot)| \rhd_{\operatorname{fr}\mathcal{O}} 0,$$

и, следовательно, ввиду замечания 3, $\Theta(\lambda,\xi)$ не обращается в нуль ни для каких $\lambda \in [0,1]$ и $\xi \in \operatorname{fr} \mathcal{O}$. Векторное поле $\Delta_m|_{\operatorname{fr}\mathcal{O}}$, таким образом, гомотопно полю $\Delta|_{\operatorname{fr}\mathcal{O}}$ посредством невырожденной линейной деформации Θ. Согласно свойству топологической степени (см., например, [9], лемма 14.2), найдется некоторое $\xi_{\langle m\rangle} \in \mathcal{O}$ такое, что $\Delta_m(\xi_{\langle m\rangle}) = 0$. Применяя принцип продолжения по параметру Лере – Шаудера [9], находим, что Δ также обращается в нуль в некоторой точке ξ^* области $\mathcal{O}$. Наконец, из теоремы 1 с учетом свойств функции Ψ следует, что существование корня $\xi = \xi^*$ уравнения $\Delta(\xi) = 0$ влечет существование хотя бы одного решения ω-периодической задачи (1), (2) с начальным данным ξ^* в 0.

Замечание 4. В условиях теоремы 3 каждый нуль $\xi_{\langle m\rangle} \in \mathcal{O}$ m-й определяющей функции (18) может рассматриваться как приближение к начальному значению ω-периодического решения $x(\cdot)$ уравнения (1). Из теорем 2 и 3 следует, что $x(t) \approx \approx x_m(t,\xi_{\langle m\rangle})$ для всех $t \in [0,\omega]$ в том смысле, что соответствующая абсолютная погрешность оценивается неравенством (8).

Следствие 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 3, кроме неравенства (19), вместо которого предполагается, что*

$$|\Delta_m| \rhd_{\operatorname{fr}\mathcal{O}} \int_0^\omega L(\sigma)\phi_m(\sigma,\cdot)d\sigma, \tag{21}$$

где $\phi_m := (I - \mathcal{K}_\Psi \circ L)^{-1}(\mathcal{K}_\Psi \circ L)^m|x_1 - x_0|$.

Тогда справедливо заключение теоремы 3.

Доказательство следствия 3 состоит в непосредственном применении теоремы 3 с учетом оценки (8).

В случае диагональной матрицы Ψ условия следствия 3 можно несколько упростить. Предварительно докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Пусть функция* $\Psi : [0,\omega] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *определяется формулой* $\Psi(t) = \psi(t)\cdot I_n$, $t \in [0,\omega]$, *в которой функция* $\psi : [0,\omega] \to [0,1]$ *абсолютно непрерывна, удовлетворяет условию* $\psi(\omega) = \psi(0) + 1$ *и такова, что величина* $\int_0^\omega \psi(\sigma)d\sigma$ *достаточно мала. Пусть* $z : [0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ — *произвольная суммируемая функция, и* $y := (I - \mathcal{K}_\Psi \circ L)^{-1} z$, *где* L *означает оператор левого умножения на некоторую* $n\times n$-*матрицу* L *с неотрицательными суммируемыми компонентами.*

Тогда функция $Y := \int\limits_0^{\cdot} L(\sigma)y(\sigma)d\sigma$ *удовлетворяет уравнению*

$$Y(t) = \int\limits_0^t \Phi(\sigma,t)\,[\psi(\sigma)Y(\omega) - z(\sigma)]\,d\sigma, \quad t \in [0,\omega],$$

где $\Phi(\sigma,t) := \Omega_\sigma^t\,[(1-2\psi)L]\,L(\sigma), \ \ (\sigma,t) \in [0,\omega]^2.$

В частности, справедливо равенство

$$Y(\omega) = \left[I_n - \int\limits_0^\omega \Phi(\sigma,\omega)\psi(\sigma)d\sigma\right]^{-1} \int\limits_0^\omega \Phi(\sigma,\omega)z(\sigma)d\sigma. \tag{22}$$

Замечание 5. В условиях леммы 2 можно считать, что спектральный радиус матрицы $\int\limits_0^\omega \Phi(\sigma,\omega)\ \psi(\sigma)\ d\sigma$ меньше единицы, и, следовательно, правая часть (22) имеет смысл.

Доказательство леммы 2. По определению функции Y, для каждого $t \in [0,\omega]$ имеем

$$[1-\psi(t)]\int\limits_0^t L(\sigma)y(\sigma)d\sigma + \psi(t)\int\limits_t^\omega L(\sigma)y(\sigma)d\sigma = y(t) - z(t),$$

откуда

$$Y'(t) - L(t)z(t) = (1-\psi(t))L(t)Y(t) + \psi(t)L(t)\,[Y(\omega) - Y(t)]\,,$$

или, что то же самое,

$$Y'(t) = (1-2\psi(t))L(t)Y(t) + L(t)\,[\psi(t)Y(\omega) + z(t)]\,. \tag{23}$$

Решение уравнения (23) с начальным значением $Y(0) = 0$ допускает представление вида

$$Y(t) = \int\limits_0^t \Omega_\sigma^t[(1-2\psi)L]\,L(\sigma)\,\{\psi(\sigma)Y(\omega) + z(\sigma)\}\,d\sigma, \tag{24}$$

справедливое при всех $t \in [0,\omega]$. Полагая в (24) $t = \omega$, получаем (22).

Лемма 3. *Предположим, что* $L(t) = l(t)I_n$, $t \in [0,\omega]$, *где* $l : [0,\omega] \to \mathbb{R}_+$ — *неотрицательная суммируемая функция. Пусть, как и в условии леммы 2,* $\Psi(t) = \psi(t)I_n$, $t \in [0,\omega]$, *где* $\psi : [0,\omega] \to [0,1]$, $\psi(\omega) = \psi(0) + 1$, *причем*

$$\int\limits_0^\omega e^{\varphi(\sigma)}\psi(\sigma)l(\sigma)d\sigma < 1,$$

где $\varphi : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ — *функция, определенная по формуле (14).*

Тогда для $z \in L^1[0,\omega]$ *и* $y := (I - \mathcal{K}_\Psi \circ L)^{-1}\, z$ *значение функции* $Y := \int\limits_0^{\cdot} l(\sigma)y(\sigma)d\sigma$ *в точке* ω *дается формулой*

$$Y(\omega) = \frac{1}{c_{\psi,l}}\int\limits_0^\omega z(\sigma)\exp\varphi(\sigma)d\sigma, \tag{25}$$

где $c_{\psi,l} := 1 - \int\limits_0^\omega \psi(\sigma) l(\sigma) \exp\varphi(\sigma) d\sigma$.

Доказательство следует из леммы 2 и того факта, что в рассматриваемом случае $\Phi(\sigma,t) = \exp\{\int\limits_\sigma^\omega [1-2\psi(\sigma)]\, l(\sigma) d\sigma\} \cdot I_n$ при всех $\{t,\sigma\} \subset [0,\omega]$.

Замечание 6. Если функции l и ψ таковы, что справедливо уравнение $\psi' + 2\psi^2 l = 0$, то в (25) $c_{\psi,l} = 2 + \psi(0)\,[1 - \exp\varphi(0)]$.

Из лемм 2 и 3 вытекает такое утверждение.

Следствие 4. *Пусть условия теоремы 4 выполнены с матрицей* L *вида* $L(t) = l(t) I_n$, $t \in [0,\omega]$, *где* $l \in L^1([0,\omega], \mathbb{R}^n)$, *и предположением (19), замененным условием*

$$|\Delta_m| \rhd_{\mathrm{fr}\,\mathcal{O}} \frac{1}{c_{\psi,l}} \int\limits_0^\omega e^{\varphi(t)} \left[(\mathcal{K}_\Psi \circ L)^m \,|x_1 - x_0|\right](t,\cdot)\, dt, \tag{26}$$

в котором функция φ *определена формулой (14),* $c_{\psi,l}$ *— константа в (25), а* $\mathcal{O}$ *— подобласть* Ω, *введенная в теореме 3.*

Тогда верно заключение теоремы 3.

Доказательство. В силу леммы 3, неравенство (26) влечет выполнение условия (21), поэтому можно применить следствие 3.

Замечание 7. Применение более простого, по сравнению с теоремой 3 и следствием 3, условия следствия 4 затрудняется тем обстоятельством, что последнее предполагает диагональную структуру матрицы Липшица в условии 4. Возможное разрешение этого вопроса (естественно, с некоторой потерей точности оценок) состоит в переходе к неравенствам по какой-либо из норм в $\mathbb{R}^n$, что, в сущности, соответствует проведению всех вычислений в скалярном случае ($n = 1$).

4. Периодические решения „симметричных" систем. Приведем некоторые утверждения об ω-периодических решениях дифференциально-функционального уравнения

$$x' = \mathfrak{f}\, x, \tag{27}$$

в котором $\mathfrak{f}$ — некоторый нелинейный оператор на пространстве непрерывных функций, имеющий определенные „симметрийные" свойства. Отметим, что одновременно с изучением периодических решений такого рода уравнений представляется целесообразным рассматривать специальную задачу

$$x'(t) = [\mathfrak{f}\, x](t), \;\; t \in [-\omega,\omega]; \qquad x(0) = x(\omega), \tag{28}$$

которую ниже будем называть *ω-периодической краевой задачей.*

Для исследования задачи (28) нам потребуются несколько более общие формулировки основных утверждений из п. 2.

По некоторой фиксированной непрерывно дифференцируемой функции $\Psi : [-\omega,\omega] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ с условием (3) зададим оператор $\mathcal{P}_{\omega,\Psi}$ проектирования $C^n(\omega) := C([-\omega,\omega], \mathbb{R}^n)$ на линейное пространство $C^n_{P+}(\omega)$ функций $y \in C^n(\omega)$, удовлетворяющих условию $y(0) = y(\omega)$:

$$[\mathcal{P}_{\omega,\Psi} x](t) := x(t) - \Psi(t)[x(\omega) - x(0)], \qquad t \in [-\omega,\omega]. \tag{29}$$

Заметим, что при $\Psi(t) = t\omega^{-1} I_n$ отображение (29) превращается в проектор А.М. Самойленко, используемый (чаще всего в неявной форме) в [6, 13 – 17].

Определим также оператор интегрирования $\mathcal{J}$, положив

$$[\mathcal{J}x](t) := \int\limits_0^t x(\sigma)\,d\sigma, \qquad t \in [-\omega, \omega]$$

для любой (непрерывной) вектор-функции x.

Следующая лемма распространяет идею модифицированного метода последовательных периодических приближений из п. 2 на случай дифференциально-функционального уравнения вида (27).

Лемма 4. *а) Каждое из решений ω-периодической краевой задачи (28) при каком-либо $\xi \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению*

$$x = \xi + \mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\,x, \tag{30}$$

где $\mathcal{P}_{\omega,\Psi}$ — соответствующий выбранной функции Ψ оператор (29).

б) Все решения x интегро-функционального уравнения (30) принадлежат $C^n_{P+}(\omega)$, и те и только те из них удовлетворяют уравнению (27), для которых справедливо тождество

$$\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\,x = 0, \tag{31}$$

где $\mathcal{Q}_{\omega,\Psi} := I - \mathcal{P}_{\omega,\Psi}$ — проектор, дополнительный к $\mathcal{P}_{\omega,\Psi}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что (31) играет роль определяющего уравнения численно-аналитического метода; в этом контексте (многозначное) отображение Δ, согласно которому вектору ξ сопоставляется выражение в левой части (31) (x здесь означает решение (30)), можно назвать *определяющей функцией.*

Лемма 5. *Пусть найдется некоторый положительный [9] относительно конуса неотрицательных функций пространства $C^n(\omega)$ линейный оператор L такой, что для произвольных двух непрерывных функций x_1, x_2 справедливо поточечное и покоординатное соотношение*

$$|\mathfrak{f}\,x_1 - \mathfrak{f}\,x_2| \le L\,|x_1 - x_2|\,. \tag{32}$$

Пусть при этом соблюдается неравенство

$$r(\mathcal{J} \circ L) < 1. \tag{33}$$

Тогда при надлежащим образом подобранной функции Ψ уравнение (30) для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет единственное решение $x(\cdot, \xi)$ и задана однозначная определяющая функция

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \longmapsto \Delta(\xi) := \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\,x(\cdot,\xi). \tag{34}$$

Доказательство следует из несколько модифицированных рассуждений п. 2. Действительно, с учетом изложенного выше достаточно показать, что в принятых условиях спектр композиции операторов (4) и L, рассматриваемой на пространстве $C^n(\omega)$, содержится внутри круга единичного радиуса. Наметим план доказательства этого факта. При этом для простоты будем считать, что $\Psi = \psi I_n$, где $\psi \in C^{(1)}([-\omega, \omega], \mathbb{R}^1)$ неотрицательна и удовлетворяет условию $\psi(\omega) = \psi(0) + 1$.

Опираясь на теорему 2 из [18], можно утверждать, что L — непрерывное преобразование $C^n(\omega)$ в себя. В силу соответствующего утверждения теории положительных операторов (см. [9], лемма 5.1), число* $\varrho := r(\mathcal{K}_\Psi \circ L)$ принадлежит $\sigma(\mathcal{K}_\Psi \circ L)$, и при некотором неотрицательном y справедливо тождество $y = \frac{1}{\varrho}\mathcal{K}_\Psi L y$. Полагая $Y := Ly$ и используя свойства Ψ, отсюда получаем, что Y является непрерывно дифференцируемым решением начальной задачи

$$\varrho Y' = L(1-2\psi)Y + L\psi Y(\omega), \qquad Y(0) = 0,$$

или, что равносильно, интегро-функционального уравнения

$$Y = \frac{1}{\varrho}\mathcal{J}L(1-2\psi)Y + \frac{1}{\varrho}\mathcal{J}L\psi Y(\omega). \tag{35}$$

Полагая, например, $\psi = \psi_m$, $m \in \mathbb{N}$, где $\psi_m(t) = 0$ при $t \in [-\omega, 0]$, $\psi_m\ (\omega) = 1$, $\lim_{m\to\infty}\psi_m = 0$ поточечно на $[0,\omega)$ и при $0 < \delta < \omega$, равномерно на $[0,\ \omega - \delta]$, можно добиться выполнения неравенства $r_m := r(\mathcal{J}L\psi_m) < \eta$ для произвольно малого $\eta > 0$. (Действительно, в силу тех же аргументов, что и выше, при любом m найдется неотрицательная функция u_m такая, что $u_m = \dfrac{1}{r_m}\mathcal{J}L\psi_m u_m$, и, следовательно, $u_m = \dfrac{1}{r_m^k}(\mathcal{J}L\psi_m)^k u_m$ для всех $k \in \mathbb{N}$, где ψ_m — оператор умножения на одноименную функцию. Таким образом, $\|u_m\| \le \dfrac{1}{r_m^k}\|(\mathcal{J}L\psi_m)^k\|\cdot\|u_m\|$, где символ $\|\cdot\|$ означает равномерную норму в $C^n(\omega)$ и соответствующую ей операторную норму, и, поскольку u_m не равна нулю тождественно, $\|(\mathcal{J}L\psi_m)^k\| \ge r_m^k$. При больших k из последнего неравенства следует, что для $\{\psi_m\}$ с указанными свойствами числа $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ не могут быть отделены от нуля.)

В силу изложенного и согласно условию (33), при подходящем выборе ψ для решения Y уравнения (35) справедливо представление

$$Y = \left[\varrho I - \mathcal{J}L(1-2\psi)\right]^{-1}\mathcal{J}L\psi Y(\omega). \tag{36}$$

Полагая $c := Y(\omega)$, из (36) получаем равенство $c = D_\psi(\varrho)c$, где $D_\psi\ (\varrho)$ — неотрицательная матрица, элементы которой произвольно малы при $0 < \int\limits_0^\omega \psi(s)ds \ll 1$ и $\varrho \ge 1$. Повторяя теперь рассуждения заключительной части доказательства леммы 1 и учитывая то, что $c \ne 0$, получаем противоречие, из которого в конечном итоге следует неравенство $r(\mathcal{K}_\Psi \circ L) < 1$ для надлежащим образом заданного Ψ. Применяя теорему 6.2 из [9], доказываем однозначную разрешимость уравнения (30) при любом значении входящего в него параметра.

Замечание 8. Условие (33) всегда выполнено, если (27) — система обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку в этом случае действие оператора Липшица L в (32) состоит в умножении на некоторую матрицу с суммируемыми компонентами, и, следовательно, $r(\mathcal{J} \circ L) = 0$, так как эта композиция является вполне непрерывным линейным оператором типа Вольтерры [19, с. 144].

Введем оператор $\mathcal{S}$ „отражения" относительно начала координат, для любой непрерывной вектор-функции x, заданной на $[-\omega,\omega]$, положив

$$[\mathcal{S}x](t) := -x(-t), \qquad -\omega \le t \le \omega. \tag{37}$$

*Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $\varrho > 0$.

В приводимых ниже леммах 6 и 8 содержатся некоторые элементарные свойства операторов $\mathcal{J}, \mathcal{S}$ и $\mathcal{P}_{\omega,\Psi}$.

Лемма 6. *Справедливы следующие утверждения:*

а) функция x нечетная (соответственно четная) тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}x = x$ (соответственно $\mathcal{S}x = -x$);

б) $\mathcal{S}^2 = I$;

в) $\mathcal{S}$ оставляет инвариантными множества четных и нечетных функций;

г) $\mathcal{S}\mathcal{J} = -\mathcal{J}\mathcal{S}$;

д) для $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ равенство $\mathcal{S}x = \varepsilon x$ влечет $\mathcal{S}\mathcal{J}x = -\varepsilon\mathcal{J}x$.

Доказательство. Утверждения а) – в) очевидны. Утверждение г) вытекает из равенства $-\int\limits_0^{-t} x(s)ds = \int\limits_0^{t} x(-\sigma)d\sigma$, а д) следует непосредственно из г).

Далее используется следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть функция $y \in C^n_P(\omega)$ такова, что $-y(-t) = y(t)$ для любого $t \in [0, \omega]$. Тогда:*

а) $y\left(\frac{1}{2}\nu\omega\right) = 0$ при $\nu = 0, \pm1, \pm2$, и y может быть продолжена до периодической периода ω нечетной функции на $(-\infty, \infty)$;

б) справедливы равенства $\int\limits_{-\omega}^{0} y(s)ds = \int\limits_0^{\omega} y(s)ds = 0$;

в) $\mathcal{J}y \in C^n_P(\omega)$.

Доказательство очевидно.

Лемма 8. *Предположим, что для оператора $\mathfrak{f} : C^n(\omega) \to C^n(\omega)$ при некотором $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ выполнено следующее условие:*

$$\textit{равенство} \quad \mathcal{S}x = \varepsilon x \quad \textit{влечет} \ \mathcal{S}\mathfrak{f}x = -\varepsilon\mathfrak{f}x. \tag{38}$$

Пусть функция $\Psi : [-\omega, \omega] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ выбрана так, что при указанном значении ε справедливо соотношение

$$\mathcal{S}\Psi = \varepsilon\Psi. \tag{39}$$

Тогда композиция $\mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}$ оставляет инвариантным множество четных $(\varepsilon = -1)$ или нечетных $(\varepsilon = 1)$ функций.

Замечание 9. В равенстве (39) Ψ означает оператор умножения на одноименную матрицу. Отметим, что (39) не препятствует выполнению условия (3).

Доказательство леммы 8. Пусть в условиях (38) и (39) $\varepsilon = -1$. Тогда для произвольной четной функции x в силу условия (38) функция $\mathfrak{f}x$ будет нечетной, и, по лемме 6, $\mathcal{J}\mathfrak{f}x$ — четная. Далее, очевидно, что для любого $y \in C^n(\omega)$

$$[\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}y](t) = \Psi(t)\int\limits_0^{\omega} y(\sigma)d\sigma, \qquad t \in [-\omega, \omega],$$

причем выполняется равенство $\mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}x = \mathcal{J}\mathfrak{f}x - \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}x$.

Согласно условию (39), функция $\Psi : [-\omega, \omega] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — четная. Следовательно, $\mathcal{S}\mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}x = \mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}x$, т. е. $\mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}x$ также является четной функцией, что и требовалось проверить.

Случай $\varepsilon = 1$ рассматривается аналогично.

Пример 2. Свойство (38) имеет оператор Немыцкого вида $[\mathfrak{f}x](t) := f(t, x(t))$, $t \in$ $\in [-\omega, \omega]$, порожденный непрерывной на $[-\omega, \omega] \times \mathbb{R}^n$ функцией f, для некоторого $\varepsilon \in$ $\{-1, 1\}$ и всех $t \in [-\omega, \omega]$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию

$$f(-t, -\varepsilon x) = \varepsilon f(t, x). \tag{40}$$

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{f}$ действует в пространстве $C^n_P(\omega)$, преобразуя четные функции в нечетные. Тогда оператор $\mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}$ отображает множество четных ω-периодических функций в себя.*

Доказательство. Достаточно применить леммы 6, 7 и учесть тот факт, что совокупность нечетных ω-периодических функций принадлежит ядру линейного оператора $\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}$.

Следствием лемм 8 и 9 является такое предложение.

Предложение 1. *а) Пусть оператор $\mathfrak{f}$ преобразует четные функции пространства $C^n(\omega)$ в нечетные, и при этом для него выполнены условия (32) и (33). Тогда все решения ω-периодической задачи (28) являются четными.*

б) Пусть оператор $\mathfrak{f}$ удовлетворяет условиям леммы 9 и, кроме того, условию (32), так, что соблюдается неравенство (33). Тогда все решения уравнения (27) в $C^n(\omega)$ принадлежат $C^n_P(\omega)$.

Доказательство предложения 1. Справедливо условие (38) с $\varepsilon = -1$, поэтому достаточно обеспечить выполнение вспомогательного предположения (39) ($\varepsilon = -1$) и применить к соответствующему уравнению (30) лемму 8, учтя тот факт, что любая константа является четной функцией. Действительно, в условиях пункта а) итерационная последовательность четных функций $x_k(\cdot, \xi) = \xi + \mathcal{P}_{\omega,\Psi}\ \mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_{k-1}(\cdot, \xi)$, $k = 1, 2, \ldots$, начинающаяся с четной функции x_0, при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$ равномерно сходится к единственному решению $x(\cdot, \xi)$ уравнения (30) (см. лемму 5), которое, в свою очередь, является четной функцией. Так как, в силу леммы 4, решение ω-периодической краевой задачи (28) непременно удовлетворяет одному из уравнений (30), отсюда получаем утверждение а).

Утверждение б) следует из лемм 4 и 7, поскольку в рассматриваемых условиях

$$\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x(\cdot, \xi) = \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_k(\cdot, \xi) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е. определяющая функция (34) тождественно равна нулю как интеграл по периоду от нечетной периодической функции $\mathfrak{f}x(\cdot, \xi)$.

Пример 3. Пусть на $C([-\omega, \omega], \mathbb{R}^n)$ задан оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$

$$[\mathfrak{f}x](t) := f(t, x(g(t))), \qquad -\omega \le t \le \omega,$$

где функция f при некотором $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ имеет свойство (40), а g — непрерывное преобразование отрезка $[-\omega, \omega]$ в себя. Пусть при том же значении ε справедливо равенство

$$\mathcal{S}g = \varepsilon g, \tag{41}$$

где $\mathcal{S}$ — оператор, определенный формулой (37). Тогда для $\mathfrak{f}$ выполнено условие (38) (с тем же ε, что и в (40), (41).

Оператор $\mathfrak{f}$ имеет свойство (32), если порождающая его функция f удовлетворяет покоординатному условию Липшица типа 4 из п. 1. При этом $\mathfrak{f}$ действует в пространстве $C^n_P(\omega)$, если функции g и $f(\cdot, x)$ (при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$) принадлежат $C^n_P(\omega)$.

Действительно, в силу (41) при каждом $t \in [-\omega, \omega]$ имеем

$$f(-t, x(g(-t))) = f(-t, x(-\varepsilon g(t))).$$

Если в принятых условиях $\varepsilon = -1$ и x — четная функция, то отсюда вытекает $f(-t,x(-g(t))) = f(-t, x(g(t)))$. Вследствие (40) последнее равно $-f(t, x(g(t)))$, т.е. $\mathcal{S}\mathfrak{f}\, x = \mathfrak{f}\, x$. Аналогично, при $\varepsilon = 1$ для нечетного x получаем

$$f\left(-t, x(g(-t))\right) = f\left(-t, x(-g(t))\right) = f\left(-t, -x(g(t))\right),$$

откуда в силу (40) следует $\mathcal{S}\mathfrak{f}\, x = -\mathfrak{f}\, x$.

Заметим, что при $\varepsilon = -1$ оператор $\mathfrak{f}$ удовлетворяет условию (38) и в более общем случае: для g достаточно предполагать выполнение соотношения (41) со значением числа ε, возможно, отличным от использованного в (40).

Используя некоторые идеи работ [6, 20], результаты, использующие рассмотренное ограничение (38), можно несколько обобщить.

Пусть Π — некоторая идемпотентная ($\Pi^2 = I_n$) постоянная матрица.

Определение 2. *Оператор $\mathfrak{f} : C^n(\omega) \to C^n(\omega)$ назовем Π-симметричным, если для любой вектор-функции $x \in C^n(\omega)$ такой, что $\Pi\mathcal{S}x = x$, верно тождество*

$$\Pi\mathcal{S}\mathfrak{f}\, x = -\mathfrak{f}\,\Pi\mathcal{S}x. \tag{42}$$

Легко видеть, что любой оператор $\mathfrak{f}$, при каком-либо $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ удовлетворяющий условию (38), является εI_n-симметричным в смысле определения 2.

Предложение 2. *Пусть Π-симметричный оператор $\mathfrak{f}$ оставляет инвариантным множество $C^n_{\mathcal{P}}(\omega)$ и удовлетворяет условию (32) с некоторым оператором L таким, что верно неравенство (33). Пусть Ψ — некоторая нечетная матричнозначная функция с достаточно малыми по L^1-норме непрерывно дифференцируемыми компонентами, для которой выполняется соотношение (3).*

Тогда единственное решение $x(\cdot, \xi)$ каждого из тех уравнений семейства (30), для которых $\Pi\xi = -\xi$, удовлетворяет условию

$$\Pi\mathcal{S}x(\cdot, \xi) = x(\cdot, \xi). \tag{43}$$

Доказательство. Пусть x_0 — какая-либо функция из $C^n_{\mathcal{P}}(\omega)$, для которой верно (43) (например, $x_0 \equiv \xi$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$ таково, что $\Pi\xi = -\xi$). Положим

$$x_1 := \xi + \mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0.$$

При $\xi \in \ker(\Pi + I_n)$ функция x_1 удовлетворяет условию (43). Действительно, в силу Π-симметричности оператора $\mathfrak{f}$, а также указанного в лемме 6 свойства г) операторов $\mathcal{J}$ и $\mathcal{S}$, имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + \mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 = \xi + \mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 - \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 = \\ &= \xi + \mathcal{J}\mathfrak{f}\,\Pi\mathcal{S}x_0 - \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\,\Pi\mathcal{S}x_0 = \xi + \mathcal{J}[-\Pi\mathcal{S}\mathfrak{f}\, x_0] - \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}[-\Pi\mathcal{S}\mathfrak{f}\, x_0] = \\ &= \xi - \mathcal{J}\Pi\mathcal{S}\mathfrak{f}\, x_0 + \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\Pi\mathcal{S}\mathfrak{f}\, x_0 = \xi - \Pi\mathcal{J}\mathcal{S}\mathfrak{f}\, x_0 + \Pi\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathcal{S}\mathfrak{f}\, x_0 = \\ &= \xi + \Pi\mathcal{S}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 - \Pi\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{S}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0. \end{aligned} \tag{44}$$

Согласно определению проектора $\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}$, для $y := \mathfrak{f} x_0$ при всех t

$$[\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{S}\mathcal{J}y](t) = \Psi(t)\int\limits_0^{-\omega} y(\sigma)d\sigma, \quad [\mathcal{S}\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}y](t) = -\Psi(-t)\int\limits_0^{\omega} y(\sigma)d\sigma.$$

В силу сделанного предположения, при действии оператора $\mathfrak{f}$ на функцию x_0 сохранилось ее свойство ω-периодичности; следовательно, определенный интеграл от $\mathfrak{f} x_0$ вместо отрезка $[-\omega, 0]$ может быть вычислен по любому другому сегменту длины ω, в частности по $[0, \omega]$. Кроме того, функция Ψ считается нечетной. Поэтому

$$\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{S}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 = \mathcal{S}\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0,$$

в результате чего цепочка равенств (44) продолжается следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + \Pi\mathcal{S}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 - \Pi\mathcal{S}\mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 = \xi + \Pi\mathcal{S}\left[\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 - \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0\right] = \\ &= (\xi - \Pi\mathcal{S}\xi) + \Pi\mathcal{S}\xi + \Pi\mathcal{S}\left[\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 - \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0\right] = \\ &= \xi + \Pi\xi + \Pi\mathcal{S}\left[\xi + \mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0 - \mathcal{Q}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0\right] = \xi + \Pi\xi + \left[\xi + \mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_0\right] = \\ &= \xi + \Pi\xi + \Pi\mathcal{S}x_1. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\Pi\xi = -\xi$, получаем $x_1 = \Pi\mathcal{S}x_1$, т. е. для x_1 выполняется условие (43).

Рассуждая аналогично, по каждому ξ с указанным свойством строим рекуррентную последовательность функций $\{x_m(\cdot,\xi)\}_{m=0}^{\infty}$,

$$x_m(\cdot,\xi) := \xi + \mathcal{P}_{\omega,\Psi}\mathcal{J}\mathfrak{f}\, x_{m-1}(\cdot,\xi), \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{45}$$

каждый член которой имеет свойство (43). Из теоремы 5 (доказываемой методом последовательных приближений) следует, что при надлежащем выборе компонентов матричнозначной функции Ψ последовательность (45) равномерно сходится к единственному решению уравнения (48), которое удовлетворяет условию (43). Тем самым предложение 2 доказано.

Из предложения 2 непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 5 (ср. с [6, с. 109]). *Пусть*

$$\Pi = \operatorname{diag}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\},$$

где $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^n \subset \{-1, 1\}$, *и в уравнении (27)* $\mathfrak{f}$ *является* Π*-симметричным оператором, удовлетворяющим условиям предложения 2.*

Тогда определяющая система (31) сходящейся схемы описываемого леммой 4 модифицированного метода последовательных периодических приближений состоит из n^- *уравнений, где* n^- *— количество „*-1*” в диагональной матрице* Π; *при этом остальные* $n - n^-$ *уравнений удовлетворяются тождественно.*

Доказательство опускается.

В заключение отметим, что приведенным в данном пункте построениям можно было бы придать локальный характер, рассматривая функции, липшицевые в ограниченных областях, и предполагая выполнение условий типа условия 5 из п. 1. Заметим также, что, в силу в определенном смысле общего характера ряда рассмотренных выше условий и утверждений, возможно их распространение на некоторые классы дифференциальных уравнений в абстрактном банаховом пространстве. Детали такой формализации применительно к стандартной схеме метода последовательных периодических приближений описаны в [17]; в настоящей работе этот вопрос подробно не исследуется.

5. Многоточечные задачи. Часть утверждений из пп. 2, 3 можно обобщить на случай краевой задачи с аффинным многоточечным условием,

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0,1], \\ &\ell\,(x) := \textstyle\sum_{\nu=1}^{r} A_\nu x(t_\nu) = \alpha, \end{aligned} \tag{46}$$

где $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{r-1} < t_r = 1$, $\{A_\nu\}_{\nu=1}^r \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, и функция $f : [0,1]\times \times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям 1, 2 и 4 из п. 1. Относительно краевого условия в (46) предполагается только, что

6) *существует $n \times n$-матричнозначная функция $\Psi : [0,1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ с абсолютно непрерывными элементами такая, что*

$$A_1\Psi\,(t_1) + A_2\Psi\,(t_2) + \ldots + A_r\Psi\,(t_r) = I_n.$$

Замечание 10. Можно показать (см. [8, 21]), что предположение 6 равносильно каждому из следующих условий:

а) некоторая матричнозначная функция $\Psi : [0,1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ с элементами класса $C_A([0,1],\mathbb{R})$ такова, что

$$\det\left[A_1\Psi\,(t_1) + A_2\Psi\,(t_2) + \ldots + A_r\Psi\,(t_r)\right] \neq 0;$$

б) координаты вектор-функционала ℓ в многоточечном краевом условии (46) линейно независимы на $C_A\,([0,1],\mathbb{R}^n)$;

в) $\operatorname{im}\ell = \mathbb{R}^n$;

г) оператор $\ell : C_A\,([0,1],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ обратим;

д) $\operatorname{rank}\,[A_1, A_2, \ldots, A_r] = n$.

Теорема 4. *Пусть функция Ψ в условии 6 подобрана так, что последовательность*

$$x_m(t,\xi) := \xi + \Psi(t)\left[d - \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu\xi\right] + \int_\tau^t f(\sigma, x_{m-1}(\sigma,\xi))d\sigma -$$

$$-\Psi(t)\sum_{\nu=1}^{r} A_\nu \int_\tau^{t_\nu} f(\sigma, x_{m-1}(\sigma,\xi))d\sigma, \qquad m \in \mathbb{N},\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

равномерно на $[0,1]$ сходится к некоторому пределу $x(\cdot,\xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и каких-либо фиксированных $\tau \in [0,1]$, $x_0 : [0,1]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Предположим, что для некоторого $m \geq 0$ функция

$$\Delta_m(\xi) := \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu \left[\xi + \int_\tau^{t_\nu} f(\sigma, x_m(\sigma,\xi))d\sigma\right], \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

обращается в нуль в некоторой точке $\xi = \xi_{\langle m\rangle}$, *причем некоторая ограниченная область* $\mathcal{O}$ *не содержит других нулей* Δ_m. *Пусть, кроме того,* $\deg(\Delta_m, \mathcal{O}, 0) \neq 0$, *и выполняется условие*

$$|\Delta_m| \rhd_{\mathrm{fr}\,\mathcal{O}} \sum_{\nu=1}^{r} \left| A_\nu \int_\tau^{t_\nu} L(\sigma)d\sigma \right| \max_{\sigma\in[0,1]} |x_m(\sigma,\cdot) - x(\sigma,\cdot)|, \tag{47}$$

где L — *матричнозначная функция в условии Липшица 4 из п. 1.*

Тогда r-точечная задача (46) имеет решение.

Замечание 11. Аналогично п. 2 можно доказать (см. [8]), что функции $\Psi : [0,1] \to \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ с описанными в теореме 4 свойствами существуют.

Для получения верхней оценки величины $|x_m - x|$ и, следовательно, достаточного условия выполнения соотношения (47) можно воспользоваться следующим утверждением.

Лемма 10. *При указанных выше условиях для всех* $m \geq 1$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *справедлива оценка*

$$|x_m(\cdot,\xi) - x(\cdot,\xi)| \leq (\mathcal{R}_\Psi \circ L)^m (I - \mathcal{R}_\Psi \circ L)^{-1} |x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|,$$

где аддитивный, положительно однородный оператор $\mathcal{R}_\Psi$ *задан на множестве неотрицательных функций* $x \in L^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ *по формуле*

$$[\mathcal{R}_\Psi x](t) := \left| \int_\tau^t x(\sigma)d\sigma \right| + \left| \sum_{\nu=1}^{r} \Psi(t) A_\nu \int_\tau^{t_\nu} x(\sigma)d\sigma \right|, \qquad t \in [0,1].$$

Сформулированные теорема 4 и лемма 10 доказываются аналогично утверждениям из пп. 2, 3 на основании теории, изложенной в [9, 12].

Пользуясь подобными алгоритмами, можно получить также некоторые теоремы о разрешимости краевых задач вида (46) в условиях „отсутствия резонанса", когда сумма $A := \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu$ матриц, задающих многоточечное ограничение в (46), является невырожденной.

Лемма 11. *При выполнении условия* $\det A \neq 0$ *множество решений задачи (46) состоит из тех и только тех функций* $x \in C_A([0,1],\mathbb{R}^n)$, *которые удовлетворяют интегро-функциональному уравнению*

$$x(t) = A^{-1}\alpha + A^{-1} \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu \int_t^{t_\nu} f(\sigma, x(\sigma))d\sigma, \quad t \in [0,1]. \tag{48}$$

Это утверждение следует из теоремы 2.1 статьи [8].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия 1 - 4 с* $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\omega = 1$ *и* $L(t) = l(t)I_n$ *для* $0 \leq t \leq 1$, *где* $l \in L^1([0,1], \mathbb{R})$. *Пусть* $\det A \neq 0$, *и, кроме того, выполняется неравенство*

$$\max \left\{ \varrho > 0 \;:\; \varrho = \sum\nolimits_{\nu=1}^{r} \left\| A^{-1} A_\nu \right\| \int_\tau^{t_\nu} \Phi_\nu(\varrho, t) l(t)dt \right\} < 1,$$

в котором $\|\cdot\|$ — *некоторая норма в* $\mathbb{R}^n$, *а*

$$\Phi_\nu(\varrho, t) := \operatorname{sign}(\nu - \nu_\tau) \exp\left[\varrho^{-1} \operatorname{sign}(\nu_\tau - \nu) \int_{t_\nu}^{t} l(\sigma)d\sigma \right], \quad \nu = 1, 2, \ldots, r,$$

где $\nu_\tau \in \{1, 2, \ldots, r\}$ — *такой номер, что* $t_{\nu_\tau - 1} \le \tau \le t_{\nu_\tau}$.

Тогда задача (46) имеет единственное решение, и рекуррентная последовательность

$$x_m(t) := A^{-1}\alpha + A^{-1}\sum_{\nu=1}^{r} A_\nu \int_{t}^{t_\nu} f(\sigma, x_{m-1}(\sigma))d\sigma, \quad t \in [0,1],\ m \in \mathbb{N}$$

при любом $x_0 \in C([0,1], \mathbb{R}^n)$ *равномерно сходится к этому решению.*

Доказательство основано на использованном выше обобщенном принципе сжимающих отображений [9] и здесь не приводится.

Аналоги сформулированных в п. 5 утверждений могут быть получены также для некоторых классов дифференциально-функциональных уравнений.

6. Примечания. Схема, описываемая теоремой 1, представляет собой модификацию схемы, предложенной А.М. Самойленко [13, 14] в 1965–1966 гг. для исследования одного класса задач (1), (2), в которых нормальная система дифференциальных уравнений принадлежит классу „ω-систем" [15]. Основная цель предложенной здесь модификации состоит в том, чтобы в некотором смысле освободиться от условия „достаточной малости" постоянных Липшица в неравенстве условия 4; ограничения такого типа, в частности, отсутствуют в теореме 2. Подобная идея используется в статье [11], где содержится утверждение, аналогичное первой части теоремы 2.

Лемма 1 и следствие 1 являются распространением на случай алгоритма из п. 2 соответствующих утверждений [10, 22]. Теоремы 2, 3 и следствия 3, 4 представляют собой развитие некоторых результатов работы [16].

Условие, эквивалентное использованному в лемме 8 условию (38), в случае, указанном в примере 2 ($\varepsilon = -1$), рассматривал А.М. Самойленко [15, с. 37]. Определение 2 навеяно „условием Е", введенным Дж. Хейлом [20, с. 60] при исследовании метода Чезари и относящимся к случаю системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В связи с методом последовательных периодических приближений упомянутое условие Дж. Хейла рассматривалось в [6].

Предложение 1 усиливает теорему 8.1 из [15], позволяя, в частности, в глобальной ее версии, отбросить ограничение величины константы Липшица правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Предложение 2 содержит в себе теорему 7 [6].

Аналог леммы 11 и утверждение, близкое к теореме 5, содержатся в статье [23]. В линейном случае встречающееся в лемме 11 (и полученное независимо от упоминаемых работ) уравнение (48) совпадает с использованным в [24] при анализе некритических линейных многоточечных задач методом функций Грина.

Утверждения, подобные указанному в замечании 10, содержатся в [19, с. 52; 25, с. 17]. Выполнение условия 6 в случае двухточечного краевого ограничения вида $A_1x(t_1) + A_2x(t_2) = \alpha$ со свойством rank $[A_1, A_2] = n$ доказано в лемме 5.4 [26, с. 155].

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.

2. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.

3. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.

4. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.

5. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 274 с.

6. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I //Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 102–117.

7. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. II //Там же. – № 3. – С. 225–244.

8. *Ronto A.* On the boundary value problems with linear multipoint restrictions //Publ. Univ. Miskolc. Ser. D. Natur. Sci. Math. – 1995. – **36**, № 1. – P. 81–89.

9. *Приближенное* решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

10. *Трофимчук Е.П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений //Мат. физика и нелинейн. механика. – 1990. – **13**. – С. 31–36.

11. *Kwapisz M.* On modification of the integral equation of Samoilenko's numerical-analytic method //Math. Nachr. – 1992. – **157**. – P. 125–135.

12. *Крейн М.Г., Рутман М.А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха //Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1 (23). – С. 3–95.

13. *Самойленко А.М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I //Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 82–93.

14. *Самойленко А.М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II //Там же. – 1966. – **18**, № 2. – С. 50–59.

15. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.

16. *Rontó M., Trofimchuk S.I.* Numerical-analytic method for non-linear differential equations. – Miskolc, 1996. – 19 p. – (Preprint /Univ. Miskolc. Inst. Math.; 96.01).

17. *Rontó M., Ronto A.N., Trofimchuk S.I.* Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach spaces, and some applications. – Miskolc, 1996. – 60 p. – (Preprint /Univ. Miskolc. Inst. Math.; 96.02).

18. *Бахтин И.А., Красносельский М.А., Стеценко В.Я.* О непрерывности линейных положительных операторов //Сиб. мат. журн. – 1962. – **3**, № 1. – С. 156–160.

19. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.

20. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 1966. – 230 с.

21. *Perestyuk M., Ronto A.* Numerical-analytic method for the equation of non-linear oscillator //Publ. Univ. Miskolc. Ser. D. Natur. Sci. Math. – 1995. – **36**, № 2. – P. 115–124.

22. *Евхута Н.А., Забрейко П.П.* О сходимости метода последовательных периодических приближений А.М. Самойленко отыскания периодических решений // Докл. АН БССР. – 1985. – **19**, № 1. – С. 15–18.

23. *Трофимчук Е.П., Коваленко А.В.* Численно-аналитический метод А.М. Самойленко без определяющего уравнения //Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 138–140.

24. *Самойленко А.М., Кенжебаев К., Лаптинский В.Н.* Итерационные методы построения решений многоточечных краевых задач. – Киев, 1990. – 31 с. – (Препринт /АН УССР. Ин-т математики; 90.52).

25. *Бурмистрова А.Б.* Краевые задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в случае резонанса: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 1990. – 134 с.

26. *Кигурадзе И.Т.* Начальная и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Мецниереба, 1997. – 213 с.

Получено 15.03.98