Физика низких температур, 1997, т. 23, № 2, с. 197–207

Посвящается памяти И. М. Лифшица

Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами

М. М. Богдан, И. В. Герасимчук*, А. С. Ковалев

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua

* *Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 25 июля 1996 г.

В рамках нелинейного уравнения Шредингера изучены солитонные состояния, локализованные на точечном дефекте, при различном знаке нелинейности и разном характере дефекта. Дана квантовая интерпретация этих нелинейных локализованных мод на языке связанных состояний большого числа бозе-частиц. Исследованы динамические свойства и устойчивость таких состояний при различном характере взаимодействия элементарных возбуждений между собой и с дефектом. Определены границы области существования и устойчивости «примесных» солитонов в зависимости от «мощности» дефекта и найдена частота малых колебаний солитона вблизи примеси.

В межах нелінійного рівняння Шредінгера досліджено солітонні стани, які локалізовані на точечному дефекті, при різнім характері дефекту. Дано квантову інтерпретацію цих нелінійних локалізованих мод в термінах зв'язаних станів великої кількості бозе-часток. Досліджено динамічні властивості та стійкість таких станів при різнім характері взаемодії елементарних збуджень між собою та з дефектом. Визначено межі існування та стійкості «домішкових» солітонів в залежності від «потужності» дефекту, та знайдено частоту малих коливань солітона поблизу домішки.

PACS: 61.72.–y, 63.20.PW, 63.20.Ry

Введение

50 лет назад в работах И. М. Лифшица впервые были рассмотрены состояния, локализованные вблизи примеси [1,2]. В последние годы эта проблема вновь стала актуальной на новом, «нелинейном» уровне. Появление экспериментальных данных по низкотемпературной диффузии и внутреннему трению в квантовых кристаллах придало новый импульс теоретическим исследованиям нелинейных локальных колебательных состояний в идеальных и дефектных ангармонических упругих средах [3–10]. Впервые подобные возбуждения обсуждались в работах [11,12], в которых были рассмотрены долгоживущие колебательные состояния молекул в простых молекулярных кристаллах. Стабильность таких локализованных колебаний была связана с ангармонизмом внутримолекулярных колебаний. Частоты этих колебаний лежат вне зоны сплошного спектра и зависят от амплитуды колебаний.

С другой стороны, известно, что в среде с дефектами даже в линейном пределе также возможны локальные колебания, но локализованные вблизи примеси. Их частота фиксирована и определяется знаком и «мощностью» дефекта (например, знаком и величиной дефекта массы). Поэтому представляется интересным исследование локальных колебаний при одновременном учете ангармонизмов и дефектов. Впервые этот вопрос изучался в работе [13], в которой было рассмотрено влияние ангармонизмов на поведение изотопического дефекта в квантовых кристаллах (возникновение в случае тяжелой примеси локальных колебаний с низкими частотами).

В работах [14,15] данная проблема обсуждалась в одномерной модели в рамках солитонного подхода. Для случая изотопической примеси в ангармонической цепочке асимптотическим методом были найдены солитонные решения, частоты которых лежали как выше, так и ниже зоны сплошного спектра линейных волн. Было показано, что нелинейность может привести к возникновению специфических локальных мод в дефектных кристаллах даже при таком знаке дефекта, когда в линейном пределе локальные колебания отсутствуют. Однако в этих работах вопрос об устойчивости локаль-

© М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев, 1997

ных мод разного типа не обсуждался и квазиклассическая трактовка этих состояний отсутствовала. Затем в работе [16] было проведено квазиклассическое квантование самолокализованных упругих колебаний в идеальной (бездефектной) одномерной ангармонической цепочке и сформулирована концепция упругих солитонов огибающей как связанного состояния большого числа фононов (см. также [17]).

Позднее в работе [18] в рамках несколько иной модели (синус-уравнения Гордона) для фиксированного знака ангармонизмов и определенного знака дефекта было проведено квазиклассическое квантование малоамплитудных нелинейных колебаний, локализованных вблизи примеси, и высказано предположение о характере устойчивости локальных мод разного типа. Наконец, в работе [19] вопрос о взаимодействии солитона с примесью был рассмотрен в модели, описываемой нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) с δ-образным потенциалом, моделирующим дефект.

В настоящей работе в рамках одномерного нелинейного уравнения Шредингера с произвольным знаком ангармонизмов исследованы возбуждения, локализованные вблизи точечных дефектов разного знака. Проведено квазиклассическое квантование всех типов полученных решений. Показано, что результат можно трактовать на языке квазичастиц, взаимодействующих между собой и с дефектом.

Следуя методике, изложенной в работе [20], проведен анализ устойчивости найденных солитонных решений и показано, что наличие притягивающей примеси является фактором, стабилизирующим солитон. При этом солитон существует и устойчив как в случае притяжения между квазичастицами, так и при их отталкивании. В первом случае (притяжение) в спектре малых возбуждений солитона существует мода колебаний его центра тяжести относительно примеси. Во втором случае (отталкивание) такой «внутренней моды» нет, а существует лишь сплошной спектр возбуждений, соответствующий свободным квазичастицам.

Отталкивающая примесь не разрушает самолокализованный вследствие притяжения между квазичастицами солитон, а лишь деформирует его и отталкивает от себя. Этот процесс описывается линейной модой неустойчивого солитона.

Таким образом, нами проведено полное исследование устойчивости солитона, локализованного на дефекте, для случая произвольного характера взаимодействия квазичастиц между собой и с примесью.

Приложение полученных результатов не ограничивается теорией ангармонических кристаллов, поскольку НУШ с притяжением и отталкиванием широко используется в теории магнитоупорядоченных сред, нелинейной оптике, динамике сверхтекучего жидкого гелия и т. д.

1. Солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера при наличии примеси

В теории кристаллической решетки локальным дефектом считается дефект с размерами порядка межатомных. При изучении солитонных возбуждений, эффективный размер которых зависит от частоты солитона и может меняться в широких пределах, локальным (или точечным) дефектом естественно считать такое возмущение характеристик среды, которое сосредоточено на расстояниях, значительно меньших ширины солитона.

При наличии точечного дефекта НУШ для полевой переменной u имеет вид

$$i\,\partial u/\partial t + \partial^2 u/\partial z^2 - \omega_0 u + \beta u|u|^2 = Q\delta(z)u \ , \quad (1.1)$$

где β — константа взаимодействия элементарных возбуждений ($\beta > 0$ соответствует их взаимному притяжению, $\beta < 0$ — отталкиванию); ω_0 — минимальная частота элементарных возбуждений линейной системы; Q — характеристика величины дефекта (его «мощность»). При $Q > 0$ элементарные возбуждения «отталкиваются» от дефекта, а при $Q < 0$ — эффективно притягиваются к нему.

В линейном пределе при $Q < 0$ в системе существуют локализованные на примеси колебания. Их частота равна $\omega_l = \omega_0 - Q^2/4$. При $Q > 0$ такие локальные колебания отсутствуют.

Уравнение движения (1.1) является эйлеровым уравнением для лагранжиана со следующей плотностью:

$$L = i/2\,[u^*\partial u/\partial t - u\partial u^*/\partial t] - |\partial u/\partial z|^2 -$$

$$- \omega_0|u|^2 + \beta/2\,|u|^4 - Q\delta(z)|u|^2 \ . \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.1) сводится к решению однородного уравнения

$$i\partial u/\partial t + \partial^2 u/\partial z^2 - \omega_0 u + \beta u|u|^2 = 0 \quad (1.3)$$

в областях $z > 0$ и $z < 0$ с граничными условиями при $z = 0$:

$$u|_{+0} = u|_{-0} \ , \quad (1.4)$$

$$\partial u/\partial z|_{+0} = \partial u/\partial z|_{-0} + Qu|_0 \ . \quad (1.5)$$

Будем искать стационарные решение уравнения (1.3) в виде

$$u(z, t) = u(z) \exp(-i\omega t) , \qquad (1.6)$$

где $u(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. В результате в случае $\beta > 0$ получим следующее выражение для решения, удовлетворяющего граничным условиям

$$\tilde{u}(z, t) = (2/\beta)^{1/2} \varepsilon \operatorname{ch}^{-1} \{\varepsilon(|z| - z_0)\} \exp(-i\omega t) , \qquad (1.7)$$

где параметр $\varepsilon \equiv (\omega_0 - \omega)^{1/2}$ характеризует частоту возбуждения, а параметры ε и z_0 связаны соотношением, следующим из второго граничного условия

$$2\varepsilon \operatorname{th}(\varepsilon z_0) = Q . \qquad (1.8)$$

Из (1.8) видно, что $\operatorname{sgn} z_0 = \operatorname{sgn} Q$ и максимально возможная частота решения при любом знаке Q совпадает с частотой локальных колебаний в соответствующей линейной системе:

$$\omega_l = \omega_0 - Q^2/4 , \qquad (1.9)$$

а интервал допустимых частот не ограничен снизу.

В случае отрицательных значений параметра β решение, удовлетворяющее граничным условиям, будет иметь вид

$$\tilde{u}(z, t) = (2/|\beta|)^{1/2} \varepsilon \operatorname{sh}^{-1} \{\varepsilon(|z| - z_0)\} \exp(-i\omega t) . \qquad (1.10)$$

При этом величина z_0 может принимать только отрицательные значения, а связь между параметрами ε и z_0 теперь имеет вид

$$2\varepsilon \operatorname{cth}(\varepsilon z_0) = Q . \qquad (1.11)$$

Таким образом, при $\beta < 0$ величина Q может быть только отрицательной, т.е. связанное состояние, локализованное на примеси, реализуется лишь в случае притягивающего дефекта.

Теперь интервал допустимых частот имеет верхнюю и нижнюю границы: минимальному значению соответствует частота локальных колебаний линейной системы ω_l, максимальному — граница спектра линейных волн ω_0.

Итак, нелинейные локализованные состояния существуют при следующих соотношениях параметров β и Q: 1) $\beta > 0$, $Q < 0$; 2) $\beta > 0$, $Q > 0$ и 3) $\beta < 0$, $Q < 0$. Рассмотрим подробнее структуру решений в этих трех случаях.

1) При $\beta > 0$, $Q < 0$ максимум амплитуды колебания находится в точке расположения примеси ($z_0 < 0$) и решение имеет вид, приведенный на рис. 1,*а* на вставке 1. В малоамплитудном пределе,

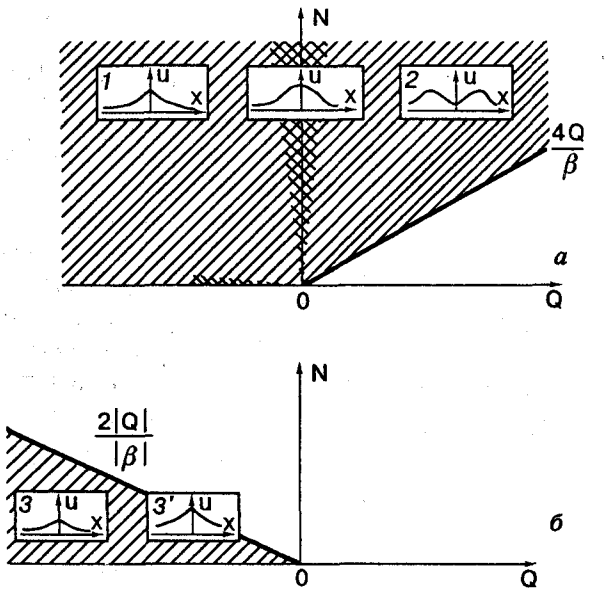

Рис. 1. Области существования нелинейных локализованных состояний (заштрихованы на рисунке) при разном характере нелинейности: $\beta > 0$ (*а*) и $\beta < 0$ (*б*). Двойной штриховкой отмечены области применимости теории возмущений при анализе устойчивости решений. На вставках изображены характерные профили огибающей локализованных солитонных состояний.

когда $\omega_l - \omega << \omega_l$, параметр z_0 стремится к бесконечности ($z_0 \approx -Q^{-1} \ln(\omega_l - \omega)$) и амплитуда локального возбуждения зависит от частоты стандартным для солитонов образом:

$$u(z = 0)|_{\omega \to \omega_l} \approx (2/\beta)^{1/2} (\omega_l - \omega)^{1/2} . \qquad (1.12)$$

При $\omega = \omega_l$ нелинейная локальная мода превращается в обычные локальные колебания линейной теории.

В противоположном предельном случае $\omega \to -\infty$ параметр z_0 стремится к нулю ($z_0 \approx -Q/\omega$) и решение становится сингулярным.

2) При $\beta > 0$, $Q > 0$ максимум амплитуды колебания не совпадает с местом расположения дефекта и локальное возбуждение представляет собой связанное состояние двух солитонов, симметрично расположенных по обе стороны дефекта с центрами в точках $\mp z_0$ (см. вставку 2 на рис. 1,*а*). При этом предел $\omega \to -\infty$ практически совпадает с предыдущим случаем, но на максимально возможной частоте ω_l вид решения существенно иной. При $\omega_l - \omega << \omega_l$ расстояние между связанными солитонами стремится к бесконечности: $2z_0 \approx$ $\approx -2Q^{-1} \ln(\omega_l - \omega)$ и амплитуда колебаний дефекта стремится к нулю согласно (1.12). Однако амплитуда солитонов стремится к конечной величине

$$A|_{\omega=\omega_l} = (2/\beta)^{1/2}Q/2 \ , \qquad (1.13)$$

и этот предел не является малоамплитудным.

3) В случае $\beta < 0$, $Q < 0$ профиль локализованного возбуждения имеет примерно такой же вид, как и при $\beta > 0$, $Q < 0$ (случай 1), — максимум амплитуды колебания находится в точке расположения дефекта (см. вставку 3 на рис. 1,*б*), однако частотный интервал существования локальной моды совершенно иной. Если в случае 1 частота изменялась в интервале $-\infty < \omega < \omega_l$, то теперь $\omega_l < \omega < \omega_0$.

Линейному пределу соответствует переход $\omega \to \omega_l$, при котором параметр z_0 стремится к бесконечности, как и в случае 1: $z_0 \approx -Q^{-1} \times \times \ln(\omega - \omega_l)$, а амплитуда стремится к нулю аналогично (1.12):

$$u(z=0)\big|_{\omega\to\omega_l} \approx (2/\beta)^{1/2}(\omega-\omega_l)^{1/2} \ . \qquad (1.14)$$

Более интересен предельный переход к значению частоты $\omega = \omega_0$. При этом $\varepsilon \to 0$, и из соотношения (1.11) следует, что параметр z_0 стремится к конечной величине $z_0 = 2/Q$, а решение (1.10) трансформируется в функцию со степенными асимптотиками на бесконечности, т.е. в алгебраический солитон (см. вставку 3′ на рис. 1,*б*)

$$\tilde{u}(z,t) = (2/|\beta|)^{1/2}\{|z| + 2/|Q|\}^{-1} \exp(-i\omega t) \qquad (1.15)$$

с амплитудой колебания примеси

$$u(z=0)\big|_{\omega\to\omega_0} = (2/|\beta|)^{1/2}|Q|/2 \ . \qquad (1.16)$$

Как известно [17], возможность существования степенных солитонов связана с учетом конкурирующих нелинейностей в эволюционных уравнениях или с наличием многочастичных взаимодействий разного типа. Так, учет парного отталкивания квазичастиц и их трехчастичного притяжения (т.е. слагаемых типа $u|u|^4$ в уравнении (1.1) с $\beta < 0$) приводит к возникновению алгебраических солитонов на границе спектра линейных волн. Такие солитоны являются неустойчивыми [21]. В рассматриваемом нами случае с примесью ситуация во многом сходная — имеются два типа взаимодействий: парное межчастичное взаимодействие, описываемое слагаемым $\beta u|u|^2$, и одночастичное взаимодействие элементарных возбуждений с неоднородностью. Теперь степенные солитоны существуют при парном отталкивании квазичастиц и их притяжении к дефекту. Однако, как показано ниже, эти солитоны оказываются устойчивыми.

Для лучшего понимания физической природы рассмотренных состояний проведем их квазиклассическое квантование.

2. Интегралы движения и квазиклассическое квантование солитонов

Уравнение (1.1) описывает динамику консервативной системы и поэтому обладает очевидным интегралом движения — полной энергией

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(z)\,dz \ , \qquad (2.1)$$

плотность которой имеет вид

$$\varepsilon(z) = |\partial u/\partial z|^2 + \omega_0|u|^2 - (\beta/2)|u|^4 + Q\delta(z)|u|^2. \qquad (2.2)$$

Кроме того, оно имеет дополнительный интеграл движения — полное число элементарных возбуждений или квантов поля [15]

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} n(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2\,dz \ , \qquad (2.3)$$

где $n(z)$ — плотность квазичастиц.

До сих пор мы характеризовали солитонное решение его частотой ω. Для понимания квантовомеханической природы солитона удобно перейти от частоты как динамической характеристики к числу связанных в солитоне возбуждений N.

Рассмотрим сначала случай $\beta > 0$. Выразим интегралы движения E и N через частоту (или связанный с ней параметр ε). Используя явный вид решения (1.7) в формулах (2.1)–(2.3) и учитывая при этом зависимость $z_0(\varepsilon)$ (см. (1.8)), получаем соотношения

$$E = \beta^{-1}[-4\varepsilon^3/3 + 4\varepsilon\omega_0 + 2Q\omega_0 - Q^3/6] \ , \qquad (2.4)$$

$$N = 4\beta^{-1}[\varepsilon + Q/2] \ . \qquad (2.5)$$

Отметим, что для малой мощности дефекта Q и малых значений параметра ε из (2.4) следует выражение для энергии

$$E = 4\omega_0\beta^{-1}(\varepsilon + Q/2) \ , \qquad (2.6)$$

сходное с энергией локального колебания точечной изотопической примеси в одномерном кристалле (см. [15]).

При $\beta < 0$, подставляя решение (1.10) и $z_0(\varepsilon)$ из соотношения (1.11) в формулы (2.1)–(2.3), полу-

чаем зависимости $E = E(\omega)$ и $N = N(\omega)$, полностью совпадающие с выражениями (2.4), (2.5).

Из положительности интеграла движения N следует, что в случае положительных значений β имеем $\varepsilon > -Q/2$, а из условия (1.8) вытекает более строгое неравенство, определяющее область существования решения:

$$\varepsilon > |Q|/2 \quad \text{при} \quad \beta > 0 \ . \qquad (2.7)$$

При $\beta < 0$ (когда решение существует лишь при $Q < 0$) из положительности величины N (или из соотношения (1.11)) следует, что параметр ε должен удовлетворять следующему условию:

$$0 < \varepsilon < |Q|/2 \quad \text{при} \quad \beta < 0 \ . \qquad (2.8)$$

Критическое значение $\varepsilon = |Q|/2$ соответствует частоте ω_l линейной локальной моды.

С помощью соотношений (2.5) и (2.7) находим, что в случае положительных β при $Q < 0$ допустимы все положительные значения N, а при $Q > 0$ на величину N накладывается ограничение

$$N > 4Q/\beta \quad \text{при} \quad Q > 0, \ \beta > 0 \ . \qquad (2.9)$$

Значение $N_* = 4Q/\beta$ соответствует частоте ω_l, при которой локальное колебание разделяется на два бесконечно удаленных от примеси солитона, в каждом из которых связано $2Q/\beta$ элементарных возбуждений. При $Q < 0$ минимальное значение N равно нулю, что отвечает нулевой амплитуде решения на частоте ω_l. Область существования солитонов на плоскости параметров (N, Q) для случая $\beta > 0$ заштрихована на рис. 1,*а*.

В случае отрицательных β из соотношений (2.5) и (2.8) следует ограничение на возможные значения N:

$$N < 2|Q|/|\beta| \quad \text{при} \quad Q < 0, \ \beta < 0 \ . \qquad (2.10)$$

Теперь критическое значение $N_0 = 2|Q|/|\beta|$ соответствует степенному солитону на частоте ω_0. Минимальное значение $N = 0$ достигается на частоте ω_l. Область допустимых значений параметров (N, Q) при $\beta < 0$ заштрихована на рис. 1,*б*.

Используя выражения (2.4), (2.5) и исключая параметр ω, находим связь полной энергии с числом связанных возбуждений:

$$E(N) = N\omega_0 - NQ^2/4 - \beta^2 N^3/48 + \beta Q N^2/8 =$$

$$= N\omega_l - \beta^2 N^3/48 + \beta Q N^2/8 \ . \qquad (2.11)$$

В случае $\beta > 0$ трактовка полученного выражения достаточно очевидна. Первое слагаемое в (2.11) описывает энергию N не взаимодействующих между собой элементарных возбуждений и соответствует описанию системы в линейном приближении. При этом вследствие взаимодействия этих возбуждений с примесью их собственная энергия изменяется: $\omega_0 \to \omega_l = \omega_0 - Q^2/4$. Частота ω_l соответствует частоте линейных локальных примесных колебаний. Второе слагаемое в (2.11) описывает энергию взаимодействия элементарных возбуждений в солитоне и имеет тот же вид, что и в случае солитонов в однородной среде. Наконец, последнее слагаемое описывает взаимодействие связанных частиц через примесь. Заметим, что от знака дефекта (знака Q) зависит лишь последнее слагаемое: при $Q < 0$ энергия понижается, т.е. примесь «притягивает» частицы и солитон как целое, а при $Q > 0$ наличие примеси повышает энергию солитона, т.е. примесь «отталкивает» солитон.

Из выражения (2.11) следует, что при $\beta > 0$ на границе области существования нелинейных локализованных колебаний энергия равна величине $E = 2(N_0\omega_0 - \beta^2 N_0^3/48)$ с $N_0 = 2Q/\beta$, т.е. удвоенной энергии солитона с числом N_0 связанных элементарных возбуждений. Любопытно, что при $\beta < 0$ на границе области существования локализованных решений (при $N_0 = 2|Q|/|\beta|$) для степенных солитонов на примеси выполняется соотношение $E = N_0\omega_0 - \beta^2 N_0^3/48$, совпадающее с зависимостью для солитона в однородной среде. (Для обычных степенных солитонов имеем $E = N\omega_0$, т.е. энергия связи квазичастиц обращается в нуль [17].)

Из выражения (2.11) также видно, что энергия, приходящаяся в локальном состоянии на одно элементарное возбуждение, оказывается меньше энергии свободной квазичастицы:

$$E/N = \omega_0 - (Q/2 - \beta N/8)^2 - \beta^2 N^2/192 < \omega_0 \ . \qquad (2.12)$$

Это соотношение позволяет трактовать солитонное решение как связанное состояние большого числа элементарных возбуждений [17].

Продифференцировав выражение (2.11) по N и воспользовавшись связью (2.5) для $N(\varepsilon)$, легко убедиться в выполнении обычного соотношения

$$\partial E/\partial N = \omega \ , \qquad (2.13)$$

которое имеет место для солитонов в консервативных нелинейных системах, обладающих интегралом движения N.

Таким образом, частота нелинейного локального колебания играет роль химического потенциала для связанных в нем элементарных возбуждений.

Выпишем с помощью (2.11) выражение для частоты ω в явном виде:

$$\omega = \partial E/\partial N = \omega_0 - (\beta^2/16)(N - 2Q/\beta)^2 \ . \quad (2.14)$$

При $Q = 0$ это выражение совпадает с зависимостью $\omega = \omega(N)$ для солитона в однородной системе.

Поскольку обычно неравенство $\partial^2 E/\partial N^2 = \partial\omega/\partial N < 0$ определяет область устойчивости солитонных решений, вычислим производную $\partial\omega/\partial N$. В нашем случае, как следует из (2.14),

$$\partial\omega/\partial N = -(\beta^2/8)(N - 2Q/\beta) \ . \quad (2.15)$$

Отсюда видно, что для положительных значений параметра β во всей области существования нелинейных локализованных состояний выполняется неравенство

$$\partial\omega/\partial N = \partial^2 E/\partial N^2 < 0 \ \text{при} \ \ \beta > 0 \ , \quad (2.16а)$$

а в случае отрицательных значений β неравенство меняет знак:

$$\partial\omega/\partial N = \partial^2 E/\partial N^2 > 0 \ \text{при} \ \ \beta < 0 \ . \quad (2.16б)$$

Обычно (в пространственно-однородных нелинейных системах) в случае отрицательного знака производной $\partial\omega/\partial N$ динамические солитоны модуляционно устойчивы, а при положительном знаке — неустойчивы [17,20,22]. Ниже мы покажем, что в пространственно-неоднородной системе с дефектом ситуация иная: солитонное решение, локализованное на дефекте, будет устойчивым только в случае $Q < 0$ (при любом знаке β), и неустойчивым при $Q > 0$.

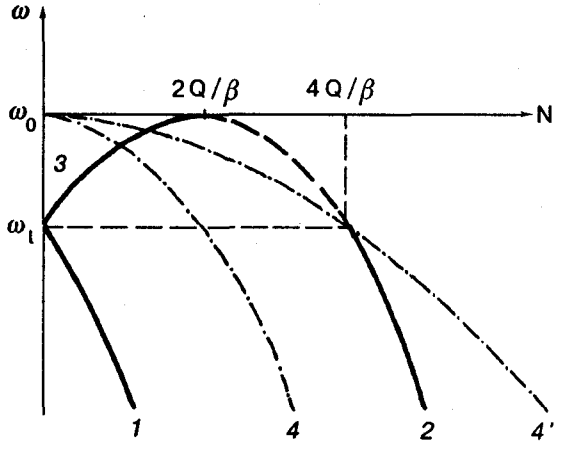

Рис. 2. Зависимости $\omega = \omega(N)$ для различного типа нелинейных локализованных состояний: $\beta > 0$, $Q < 0$ (*1*); $\beta > 0$, $Q > 0$ (*2*); $\beta < 0$, $Q < 0$ (*3*). Зависимости $\omega = \omega(N)$ для солитона (*4*) и двух взаимодействующих солитонов (*4'*) в идеальной системе без дефектов.

Зависимость $\omega = \omega(N)$ (2.14) для разных знаков Q и β приведена на рис. 2. Кривая *1* соответствует случаю 1 ($\beta > 0$, $Q < 0$). Кривая *2* описывает зависимость $\omega = \omega(N)$ в случае 2 ($\beta > 0$, $Q > 0$) и кривая *3* соответствует отрицательным β (случай 3).

На этом же рисунке штрих-пунктирными линиями изображены зависимости $\omega = \omega(N)$ для одиночного солитона в идеальной среде (кривая *4*):

$$\omega = \omega_0 - \beta^2 N^2/16 \ , \quad (2.17а)$$

и для двух невзаимодействующих солитонов на бесконечном расстоянии друг от друга (кривая *4'*):

$$\omega = \omega_0 - (\beta^2/16)(N/2)^2 \ . \quad (2.17б)$$

В точке $\omega = \omega_1$, $N_* = 4Q/\beta$ кривые *2* и *4'* «стыкуются», т.е. происходит бифуркация зависимости $\omega = \omega(N)$: при $N = N_*$ от кривой *4'* для двух невзаимодействующих солитонов отщепляется зависимость *2* для локализованного вблизи примеси решения — происходит «связывание» двух солитонов дефектом.

3. Устойчивость нелинейных примесных состояний

Исследуем устойчивость полученных решений относительно малых возмущений амплитуды и фазы. При решении этой задачи будем следовать схеме, предложенной в работе [20].

Представляя решение уравнения (1.1) в виде

$$u(z, t) = \tilde{u}(z, t) + \theta(z, t) =$$

$$= u(z) \exp(-i\omega t) + v(z, t) \exp(-i\omega t) \ , \quad (3.1)$$

где $\tilde{u}(z, t)$ — решение уравнения (1.1) для стационарного солитона и $|\theta(z, t)| << |\tilde{u}(z, t)|$, линеаризуем (1.1) по малым добавкам $v(z, t)$ и для функции $v(z, t)$ получаем уравнение

$$i\partial v(z, t)/\partial t + \partial^2 v(z, t)/\partial z^2 - \varepsilon^2 v(z, t) +$$

$$+ 2\beta v(z, t)u^2(z) + \beta v^*(z, t)u^2(z) = Q\delta(z)v(z, t) \ . \quad (3.2)$$

Представляя решение уравнения (3.2) в виде

$$v(z, t) = (A(z) + iB(z)) \exp(\Omega t) \ , \quad (3.3)$$

для функций A и B получаем систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_0 B &= \Omega A \ , \\ L_1 A &= -\Omega B, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где операторы L_0 и L_1 определяются выражениями

$$L_0 = -d^2/dz^2 + \varepsilon^2 - \beta u^2(z) + Q\delta(z) , \quad (3.5)$$

$$L_1 = -d^2/dz^2 + \varepsilon^2 - 3\beta u^2(z) + Q\delta(z) , \quad (3.6)$$

а функция $u(z)$ с учетом введенных обозначений должна удовлетворять уравнению

$$L_0 u(z) = 0 . \quad (3.7)$$

Исключив из системы уравнений (3.4) функцию B, приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$L_0 L_1 A = -\Omega^2 A . \quad (3.8)$$

Отметим, что хотя сам оператор $L_0 L_1$ не является эрмитовым, вещественность его собственных значений Ω^2 легко доказывается сведением исходной задачи на собственные значения (3.4) к эквивалентной задаче для эрмитового оператора: $L^- L_1 L^+ W = -\Omega^2 W$, где $L^{\pm} = \pm d/dz + (du/dz)/u$, $W = L^- B$ и $L_0 = L^+ L^-$.

Поскольку функция u нигде в нуль не обращается, на подпространстве функций, ортогональных u, существует положительно определенный оператор L_0^{-1}, обратный оператору L_0. Вследствие этого к уравнению (3.8) можно применить вариационный принцип, по которому наименьшее собственное значение $-\Omega_0^2$ равно

$$-\Omega_0^2 = \min [\langle\varphi|L_1|\varphi\rangle / \langle\varphi|L_0^{-1}|\varphi\rangle] , \quad \langle u|\varphi\rangle = 0 . \quad (3.9)$$

Тогда задача сводится к исследованию условного минимума функционала $F = \langle\varphi|L_1|\varphi\rangle$.

С помощью метода неопределенных множителей Лагранжа можно получить уравнение для функции ψ, минимизирующей функционал F при условии $\langle u|\psi\rangle = 0$:

$$L_1\psi = \lambda\psi + \alpha u . \quad (3.10)$$

Минимум F определяется наименьшим значением λ, при котором уравнение (3.10) имеет решение. Из (3.10) с учетом условия $\langle u|\psi\rangle = 0$ следует (см. [20]) уравнение для λ:

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2/(\lambda_n - \lambda) = \alpha f(\lambda) = 0 , \quad (3.11)$$

где $C_n = \langle u_0|\psi_n\rangle$ и ψ_n, λ_n — собственные функции и собственные значения оператора L_1 соответственно.

Проведем вначале анализ устойчивости решений при положительном параметре β (случаи 1 и 2).

В отсутствие дефекта исследование устойчивости решения (1.7) полностью соответствует схеме, изложенной в [20]. При этом оператор L_1 определяется выражением

$$L_1^{(0)} = -d^2/dz^2 + \varepsilon^2 - 6\varepsilon^2 \operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z) . \quad (3.12)$$

Собственная функция основного состояния этого оператора и соответствующее собственное значение имеют вид

$$\psi_1^{(0)} = (3\varepsilon)^{1/2} \operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z)/2 , \quad \lambda_1^{(0)} = -3\varepsilon^2 , \quad (3.13)$$

а собственная функция и собственное значение следующего состояния равны соответственно

$$\psi_2^{(0)} = (3\varepsilon/2)^{1/2} \operatorname{sh}(\varepsilon z) \operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z), \quad \lambda_2^{(0)} = 0. \quad (3.14)$$

В отсутствие примеси, как хорошо известно, солитонное решение НУШ устойчиво. Наличие дефекта усложняет задачу исследования устойчивости решений, так как в этом случае операторы L_0 и L_1 имеют более сложный вид, чем в случае $Q = 0$. Убедимся, однако, что для значений $\varepsilon|z_0| \ll 1$ оператор L_1 будет иметь вид $L_1 = L_1^{(0)} + \hat{\eta}$, где $\hat{\eta}$ — возмущение, линейное по малым добавкам. При этом возможно учесть изменение собственных функций и собственных значений оператора $L_1^{(0)}$ по теории возмущений.

При выполнении неравенства $\varepsilon|z_0| \ll 1$ из граничного условия (1.8) следует, что

$$\varepsilon z_0 \approx Q/(2\varepsilon) , \quad \varepsilon \gg |Q|/2 . \quad (3.15)$$

При этом из формулы (2.5) имеем соотношение между параметрами N и Q, определяющее область на плоскости (N, Q), в которой допускается решение поставленной задачи по теории возмущений:

$$N \gg 2|Q|/\beta . \quad (3.16)$$

Эта область выделена двойной штриховкой на рис. 1,*а* (сектор вблизи оси N). Заметим, что, вообще говоря, не требуется малость амплитуды солитона. Роль возмущения играет дефект, «мощность» которого определяет малый параметр разложения $Q/(2\varepsilon)$.

Раскладывая решение (1.7) по степеням малого параметра εz_0 и учитывая в разложении зависимость (3.15), с точностью до членов первого порядка по $Q/(2\varepsilon)$ получаем

$$u(z) = (2\beta)^{1/2} \varepsilon \operatorname{ch}^{-1}(\varepsilon z)\{1 + [Q/(2\varepsilon)] \operatorname{th}(\varepsilon|z|)\} . \quad (3.17)$$

Подставляя полученное выражение для $u(z)$ в формулу (3.6) и учитывая слагаемые не выше первой степени по $Q/(2\varepsilon)$, находим выражение для оператора L_1 :

$$L_1 = -d^2/dz^2 + \varepsilon^2 - 6\varepsilon^2 \operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z) +$$

$$+[Q/(2\varepsilon)]\{-12\varepsilon^2 \operatorname{sh}(\varepsilon|z|)\operatorname{ch}^{-3}(\varepsilon z) + 2\varepsilon\delta(z)\} \equiv$$

$$\equiv L_1^{(0)} + \hat{\eta} \ , \qquad (3.18)$$

где $\hat{\eta} \propto Q/(2\varepsilon)$ — возмущение оператора $L_1^{(0)}$.

По теории возмущений получаем добавки к собственным значениям оператора $L_1^{(0)}$:

$$\lambda_n^{(1)} = \eta_{nn} = \langle\psi_n^{(0)}|\hat{\eta}|\psi_n^{(0)}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \psi_n^{(0)*}\, \hat{\eta}\, \psi_n^{(0)} \ . \qquad (3.19)$$

При этом собственные функции оператора L_1 принимают вид $\psi_n = \psi_n^{(0)} + \zeta(z)$, где $\zeta(z) \sim Q/(2\varepsilon)$ — поправка той же четности, что и функция $\psi_n^{(0)}$.

Поправка к собственному значению, соответствующему основному состоянию оператора $L_1^{(0)}$, имеет вид

$$\lambda_1^{(1)} = Q/(2\varepsilon)(3\varepsilon/4) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} dz \operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z)\left\{-12\varepsilon^2 \operatorname{sh}(\varepsilon|z|)\operatorname{ch}^{-3}(\varepsilon z) + 2\varepsilon\delta(z)\right\} \times$$

$$\times \operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z) = -(3\varepsilon/4)Q \ , \qquad (3.20)$$

а поправка к собственному значению $\lambda_2^{(0)}$ следующего уровня равна

$$\lambda_2^{(1)} = Q/(2\varepsilon)(3\varepsilon/2) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \operatorname{sh}(\varepsilon z)\operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z) \times$$

$$\times \left\{-12\varepsilon^2 \operatorname{sh}(\varepsilon|z|)\operatorname{ch}^{-3}(\varepsilon z) + 2\varepsilon\delta(z)\right\} \times$$

$$\times \operatorname{sh}(\varepsilon z)\operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z) = -(3\varepsilon/2)Q \ . \qquad (3.21)$$

Таким образом, учитывая выражения для $\lambda_1^{(0)}$ и $\lambda_2^{(0)}$, находим приближенные (с точностью до Q/ε) собственные значения двух нижайших состояний оператора L_1:

$$\lambda_1 = -3\varepsilon^2 - 3\varepsilon Q/4 \ , \qquad (3.22а)$$

$$\lambda_2 = -3\varepsilon Q/2 \ . \qquad (3.22б)$$

Видно, что $\lambda_1 < \lambda_1^{(0)} < 0$ и $\lambda_2 < 0$ при $Q > 0$; $\lambda_1^{(0)} < \lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$ при $Q < 0$. Из-за разного знака собственного значения λ_2 при $Q > 0$ и $Q < 0$ эти случаи должны рассматриваться отдельно.

Случай $\beta > 0$, $Q > 0$. При $\alpha = 0$ (см. (3.10)) ψ является одной из собственных функций оператора L_1 , а λ совпадает с одним из его собственных значений. Поскольку собственная функция ψ_1 не может быть ортогональной u (см. [20]), а $\langle u|\psi_2\rangle = 0$, наименьшее собственное значение $-\Omega_0^2$ определяется значением λ_2 . Итак, условный минимум функционала F равен $\lambda_2 = -3\varepsilon Q/2 < 0$, значит Ω вещественно.

Таким образом, для положительных Q существуют экспоненциально растущие возмущения и солитонное решение неустойчиво. Неустойчивость проявляется в экспоненциальном возрастании пространственно-антисимметричной добавки (симметричная функция ψ_1 соответствует основному собственному значению λ_1). Динамику солитона в этом случае можно представить следующим образом: происходит «перекачка» квазичастиц из одного полупространства в другое. При больших временах мы не можем решить задачу, но очевидно, что произойдет полная «перекачка» частиц в одно полупространство и трансформация солитона, который, «оттолкнувшись» от дефекта, уйдет на бесконечность.

Решение, учитывающее малые добавки к форме солитона в случае $Q > 0$, имеет следующий вид:

$$u(z,t) = u_0(z,t) + v(z,t)\exp(-i\omega t) \cong \left[\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2} \varepsilon \operatorname{ch}^{-1}(\varepsilon z) + \frac{Q}{2\varepsilon}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2} \varepsilon \operatorname{sh}(\varepsilon|z|)\operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z)\right]\exp(-i\omega t) +$$

$$+\xi\left(\frac{3\varepsilon}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sh}(\varepsilon z)\operatorname{ch}^{-2}(\varepsilon z)\exp(\Omega t)\exp(-i\omega t) \cong$$

$$\cong \left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2} \varepsilon \operatorname{ch}^{-1}\left\{\varepsilon[z - \operatorname{sgn}(z)\frac{Q}{2\varepsilon^2} - \frac{\xi}{2\varepsilon}\left(\frac{3\beta}{\varepsilon}\right)^{1/2}\exp(\Omega t)]\right\}\exp(-i\omega t) \ , \qquad (3.23)$$

где $\xi << 1$. (Здесь для малой добавки $v(z, t)$ (см. (3.3)) использовано основное приближение: $A \approx \xi\psi_2^{(0)}$, $B \approx 0$.)

Таким образом, в этом приближении амплитуда решения не меняется, но происходит синхронный сдвиг в одну сторону центров двух солитонов, расположенных по разные стороны дефекта и связанных с ним:

$$z_0^{\pm} \cong \operatorname{sgn}(z) Q/(2\varepsilon^2) + (\xi/2\varepsilon)(3\beta/\varepsilon)^{1/2} \exp(\Omega t) \ . \tag{3.24}$$

Для нахождения инкремента нарастания этой сдвиговой неустойчивости Ω воспользуемся формулой (3.8), взяв ее в обкладки с антисимметричной функцией ψ_2, соответствующей второму уровню оператора L_1. В основном порядке по малому параметру $Q/(2\varepsilon)$ выражение (3.9) имеет вид

$$\Omega^2 \cong -\langle\psi_2^{(0)}|\hat{\eta}|\psi_2^{(0)}\rangle/\langle\psi_2^{(0)}|L_0^{(0)-1}|\psi_2^{(0)}\rangle =$$

$$= -\lambda_2/\langle\psi_2^{(0)}|L_0^{(0)-1}|\psi_2^{(0)}\rangle \ , \tag{3.25}$$

где оператор $L_0^{(0)}$ определяется выражением (3.5), а функция $\psi_2^{(0)}$ — формулой (3.14). Легко проверить, что

$$L_0^{(0)}[z/\operatorname{ch}(\varepsilon z)] = 2\varepsilon \operatorname{sh}(\varepsilon z)/\operatorname{ch}^2(\varepsilon z) \ , \tag{3.26}$$

и, следовательно,

$$L_0^{(0)-1}\psi_2^{(0)} = [3/(8\varepsilon)]^{1/2} z/\operatorname{ch}(\varepsilon z) \ . \tag{3.27}$$

Таким образом, знаменатель в формуле (3.25) равен $3/(4\varepsilon^2)$, а инкремент нарастания неустойчивости равен

$$\Omega \cong (2Q\varepsilon^3)^{1/2} \ . \tag{3.28}$$

Случай $\beta > 0$, $Q < 0$. Поскольку в этом случае $\lambda_2 > 0$, то при $\alpha = 0$ условный минимум функционала F положителен. При ненулевом множителе Лагранжа α условный минимум функционала F определяется наименьшим корнем уравнения (3.11). Можно показать [20], что в этом случае, так же как и для $Q = 0$, знак $\lambda_{\min}$ определяется знаком величины $f(\lambda = 0)$: при $f(0) \le 0$ имеем $\lambda_{\min} \ge 0$, а при $f(0) > 0$ величина $\lambda_{\min}$ отрицательна.

При $\lambda = 0$ формула (3.11) легко может быть переписана в виде $f(0) = \langle u|L_1^{-1}|u\rangle$. Для вычисления этой величины достаточно продифференцировать уравнение (3.7) по ε^2 и, воспользовавшись видом операторов L_0 и L_1 (см. (3.5), (3.6)), убедиться в выполнении соотношения $L_1 \partial u/\partial\varepsilon^2 + u = 0$. Отсюда

$$f(0) = \langle u|L_1^{-1}|u\rangle = -\langle u|\partial u/\partial\varepsilon^2\rangle =$$

$$= -(1/2)\partial/\partial\varepsilon^2\langle u|u\rangle = -(1/2)\partial N/\partial\varepsilon^2 = (1/2)\partial N/\partial\omega, \tag{3.29}$$

где N — число квазичастиц, определяемое формулой (2.5).

Итак, знак условного минимума функционала F при $\alpha \ne 0$ определяется знаком производной $\partial\omega/\partial N$ (т.е. знаком величины $\partial^2 E/\partial N^2$): при $\partial\omega/\partial N \le 0$ условный минимум функционала F положителен и, как следует из (3.9), $\Omega^2 < 0$.

Ранее было показано (см. (2.16а)), что в случае отрицательных Q и положительных β производная $\partial\omega/\partial N < 0$. Это означает отсутствие экспоненциально растущих возмущений (Ω — чисто мнимая величина) и устойчивость решения в линейном по возмущению приближении. Таким образом, антисимметричные добавки к решению $\tilde{u}(z, t)$ описывают малые колебания солитона относительно примеси.

Решение (3.1) для $Q < 0$ и $\beta > 0$ может быть приведено к виду

$$u(z, t) \cong (2/\beta)^{1/2}\varepsilon \operatorname{ch}^{-1}\{\varepsilon[z - \operatorname{sgn}(z) Q/(2\varepsilon^2) -$$

$$- (\xi/2\varepsilon)(3\beta/\varepsilon)^{1/2}\cos(\nu t)]\} \exp(-i\omega t) \ , \tag{3.30}$$

где $\xi << 1$ — малая (произвольная) амплитуда колебаний центра солитона относительно места локализации примеси, а $\nu \equiv -i\Omega$ — частота этих колебаний.

Для нахождения частоты ν воспользуемся формулой (3.25), где теперь $\lambda_2 = 3\varepsilon|Q|/2 > 0$ (см. (3.22б)). Таким образом, частота осцилляций равна

$$\nu = (2|Q|\varepsilon^3)^{1/2} \ . \tag{3.31}$$

Заметим, что в случае «размазанной» примеси, когда область ее локализации намного больше ширины солитона, частота колебаний солитона во внешнем поле $U(z)$, моделирующем примесь ($Q = \int U(z)\, dz$), связана с мощностью Q потенциала соотношением

$$\nu = (|Q|/L^3)^{1/2} \ , \tag{3.32}$$

где L — характерный пространственный размер неоднородности [17]. Это качественно согласуется с результатом (3.31), полученным для δ-образной примеси, но в роли характерного линейного размера выступает теперь размер дефекта L вместо ши-

рины солитона $1/\varepsilon$. Напомним, что наше рассмотрение справедливо лишь при выполнении неравенства (3.16).

В работе [18] на примере синус-уравнения Гордона для притягивающей примеси ($Q<0$) был подробно исследован другой предельный случай: $\varepsilon - |Q|/2 \ll |Q|/2$, т.е. $\omega_l - \omega \ll \omega_0 - \omega_l$. При этом предполагалось, что $|Q| \ll 1$. Как легко убедиться из соотношения (2.5), в этом случае возникает следующее ограничение на допустимые значения параметров N и Q: $N \ll 2|Q|/\beta$, $|Q| \ll 1$ (сектор с двойной штриховкой вблизи отрицательной полуоси Q на рис. 1,*а*). Как было показано в [18], в этом предельном случае локализованный на примеси солитон устойчив и совершает малые колебания относительно центра примеси с частотой

$$\nu \cong [3(\omega_{\max} - \omega)]^{1/2} . \qquad (3.33)$$

Учитывая результаты настоящей работы и [18], можно предположить, что нелинейные локальные возбуждения устойчивы при всех значениях $Q<0$, $N>0$.

Перейдем к анализу устойчивости решения (1.10), описывающего локализованное на примеси нелинейное возбуждение в случае отрицательных β и Q.

Следуя изложенной выше схеме, покажем, что при $\beta<0$ и $Q<0$ оператор L_1 является положительно определенным. Рассмотрим вначале оператор L_0. В случае $Q, \beta<0$ он принимает следующий вид (см. (3.5)):

$$L_0 = -d^2/dz^2 + \varepsilon^2 + |\beta|u^2(z) - |Q|\delta(z) , \qquad (3.34)$$

где $u(z)$ — определяется выражением (1.10). Решение $u(z)$ является собственной функцией основного состояния оператора L_0 с нулевым собственным значением (см. (3.7)). Оператор L_0, таким образом, является неотрицательным. Потенциальная энергия, соответствующая оператору L_0, имеет вид

$$U_0(z) = \varepsilon^2 + |\beta|u^2(z) - |Q|\delta(z) . \qquad (3.35)$$

Существенно, что, в отличие от случая $\beta>0$, $Q<0$, добавка к δ-образному потенциалу теперь положительна. Потенциальная яма (3.35) содержит единственный дискретный уровень, соответствующий основному состоянию оператора L_0, а следующий уровень совпадает с нижней границей зоны сплошного спектра.

Потенциальная энергия, соответствующая оператору L_1, теперь имеет вид (сравни с (3.6)):

$$U_1(z) = \varepsilon^2 + 3|\beta|u^2(z) - |Q|\delta(z) . \qquad (3.36)$$

Таким образом, в отличие от случая $\beta>0$, $Q<0$, когда имело место неравенство

$$\int U_0(z)\,dz > \int U_1(z)\,dz,$$

при $\beta<0$ имеем

$$\int U_0(z)\,dz < \int U_1(z)\,dz . \qquad (3.37)$$

Следовательно, при переходе от оператора L_0 к оператору L_1 вся система собственных значений поднимается вверх, что означает отсутствие у оператора L_1 отрицательных собственных значений и второго дискретного уровня. Отсюда можно сделать вывод об устойчивости связанного состояния при $\beta<0$, $Q<0$ во всей области его существования и отсутствии внутренней колебательной моды в этом нелинейном локализованном возбуждении.

Заключение

Показано, что в нелинейной среде с точечными дефектами локализованные на примеси состояния возможны при любом знаке ангармонизмов (знаке β) в случае притяжения квазичастиц к дефекту ($Q<0$). При взаимном притяжении между квазичастицами ($\beta>0$) локализация нелинейного возбуждения вблизи примеси возможна даже при отталкивающем характере дефекта ($Q>0$).

В случае $\beta>0$ (притяжение между квазичастицами), $Q<0$ (притягивающая примесь) точечный дефект играет роль потенциальной ямы для связанного многочастичного состояния, солитон локализуется вблизи дефекта и колеблется вблизи его центра с частотой $(2\varepsilon^3|Q|)^{1/2}$. При этом локализованные солитонные решения устойчивы.

В случае $\beta>0$, $Q>0$ солитонное решение, локализованное вблизи отталкивающей квазичастицы примеси, неустойчиво. Эта неустойчивость проявляется в экспоненциальном нарастании антисимметричных добавок к решению: квазичастицы «перекачиваются» из одного полупространства в другое и формируют солитон, локализованный по одну сторону от примеси, который отталкивается от нее и уходит на бесконечность.

В случае $\beta<0$ (отталкивание между квазичастицами) нелинейные локальные возбуждения возможны только при $Q<0$, и связанное с дефектом состояние оказывается устойчивым.

Данная работа была частично поддержана Международной соросовской программой поддержки образования в области точных наук (грант GSU052252) и Международным научным фондом (грант U21200).

1. I. M. Lifshitz, *Nuovo Cimento Suppl.* **3**, 716 (1956).
2. I. M. Lifshitz and A. M. Kosevich, *Rep. Progr. Phys.* **29**, 217 (1966).
3. A. J. Sievers and S. Takeno, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 970 (1988).
4. S. Takeno and A. J. Sievers, *Solid State Commun.* **67**, 1023 (1988).
5. V. M. Burlakov, S. A. Kiselev and V. N. Pyrkov, *Solid State Commun.* **74**, 327 (1990).
6. A. J. Sievers and S. Takeno, *Phys. Rev.* **B39**, 3374 (1989).
7. J. B. Page, *Phys. Rev.* **B41**, 7835 (1990).
8. S. R. Bickham and A. J. Sievers, *Phys. Rev.* **B43**, 2339 (1991).
9. K. W. Sandusky, J. B. Page, and K. E. Schmidt, *Phys. Rev.* **B46**, 6161 (1992).
10. S. A. Kiselev, S. R. Bickham, and A. J. Sievers, *Phys. Lett.* **A184**, 255 (1994).
11. А. А. Овчинников, *ЖЭТФ* **57**, 263 (1969).
12. А. А. Овчинников, Н. С. Эрихман, *УФН* **138**, 289 (1982).
13. Г. С. Завт, С. П. Рейфман, *Письма в ЖЭТФ* **15**, 738 (1972).
14. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *ЖЭТФ* **67**, 1793 (1974).
15. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *ФНТ* **1**, 1544 (1975).
16. М. М. Богдан, А. М. Косевич, *ФНТ* **2**, 794 (1976).
17. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
18. Y. Kivshar and B. Malomed, *J. Phys.* **A21**, 1553 (1988).
19. D. I. Pushkarov and R. D. Atanasov, *Phys. Lett.* **A149**, 287 (1990).
20. Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, *Изв. ВУЗ, Радиофизика* **XVI**, 1020 (1973).
21. М. М. Богдан, А. С. Ковалев, *Письма в ЖЭТФ* **31**, 213 (1980).
22. B. A. Ivanov and A. L. Sukstanskii, *Solid State Commun.* **50**, 523 (1984).

Dynamics and stability of localized modes in non-linear media with point defect

M. M. Bogdan, I. V. Gerasimchuk, and A. S. Kovalev

In the paper the soliton states localized by a point defect are studied in the framework of the nonlinear Schrödinger equation. The quantum interpretation of these states is given in terms of the bound states of a large number of the Bose-particles. The dynamical properties and the stability of such states are investigated for each possible cases of interaction between quasiparticles and between quasiparticles and the defect. The boundaries of both the region of existence and the stability of the «impurity» solitons are determined, and a frequency of low oscillations of the soliton near the defect is found.