УДК 517.9

О ПРИВЕДЕНИИ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К КРИТИЧЕСКОМУ СЛУЧАЮ ПЕРВОГО ПОРЯДКА*

С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко

Донбас. гос. пед. ун-т
Украина, 84116, Славянск Донецкой обл., ул. Генерала Батюка, 19

И. А. Бойчук

Ин-т электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины
Украина, 03680, Киев, ул. Боженко, 11

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution and iterative scheme for the approximate solutions of Noether weakly nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in critical case.

Знайдено необхідні та достатні умови існування і побудовано ітераційну схему для відшукання розв'язків слабконелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку кратних коренів рівняння для породжуючих констант.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решения $z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ краевой задачи [1 – 3]

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1}$$

Решение задачи (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m.$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$. Нелинейности $Z(z,t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1) предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. Исследован критический случай $(P_{Q^*} \neq 0)$, причем предполагается выполненным условие

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = 0; \tag{2}$$

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

в этом случае порождающая задача имеет $(r = n - n_1)$-параметрическое семейство решений

$$z_0(t, c_0) = X_r(t)c_0 + G[f(s); \alpha](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части порождающей системы, $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n\times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$, $P_{Q_d^*}$ — $(r \times n)$-матрица, составленная из r линейно независимых строк $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$,

$$G[f(s); \alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} + K[f(s)](t)$$

— обобщенный оператор Грина порождающей краевой задачи,

$$K[f(s)](t) = X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f(s)\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши порождающей системы, Q^+– псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1, 2].

2. Необходимые условия существования решения. При нахождении необходимых условий существования решения

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$$

исходной задачи (1) в критическом случае традиционно использовалось уравнение для порождающих констант [1 – 3]

$$F(c_0) = P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot, c_0), 0) - \ell K[Z(z_0(s, c_0), s, 0)](\cdot)\} = 0, \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Рассмотрим менее изученный случай, когда уравнение для порождающих констант имеет кратные корни [2 – 4]. Предположим, что задача (1) в малой окрестности решения $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ порождающей задачи имеет решение

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \quad c_0(0) := c_0^* \in \mathbb{R}^r.$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении решения

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

слабонелинейной нетеровой краевой задачи

$$\frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = A(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{4}$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$P_{Q^*}\{J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell K[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\}=0.$$

В силу непрерывности по z нелинейной функции $Z(z,t,\varepsilon)$ и нелинейного векторного функционала $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи приходим к уравнению

$$\mathcal{F}(c_0(\varepsilon)):=P_{Q^*}\{J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)),\varepsilon)-\ell K[Z(z_0(s,c_0(\varepsilon)),s,\varepsilon)](\cdot)\}=0.$$

Лемма. *Пусть нетерова* $(m\neq n)$ *краевая задача (1) представляет критический* $(P_{Q^*}\neq 0)$ *случай и выполнено условие разрешимости (2) порождающей задачи. Предположим также, что в малой окрестности порождающего решения* $z_0(t,c_0(\varepsilon)):z_0(\cdot,\varepsilon)\in C^1[a,b]$, $c_0(\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$, *слабонелинейная краевая задача (1) имеет решение* $z(t,\varepsilon):$ $z(\cdot,\varepsilon)\in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{F}(c_0(\varepsilon))=0. \tag{5}$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [1], а также периодическими краевыми задачами [5] уравнение (5) будем называть уравнением для порождающих функций задачи (1). Предположим, что уравнение (5) имеет непрерывные действительные корни. Фиксируя одно из решений $c_0(\varepsilon)\in\mathbb{R}^r$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании решения

$$x(t,\varepsilon):x(\cdot,\varepsilon)\in C^1[a,b],\quad x(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$$

нетеровой краевой задачи (3), (4) в окрестности порождающего решения

$$z_0(t,c_0(\varepsilon))=X_r(t)c_0(\varepsilon)+G[f(s);\alpha(\varepsilon)](t),\quad c_0(\varepsilon)\in\mathbb{R}^r.$$

В малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_0(\varepsilon))$ имеет место разложение

$$\begin{aligned}Z(z_0(t,c_0(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)&=Z(z_0(t,c_0(\varepsilon)),t,\varepsilon)+\\&+\mathcal{A}_1(z_0(t,c_0(\varepsilon)))x(t,\varepsilon)+\mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_1(z_0(t,c_0(\varepsilon)))=\left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))}.$$

Остаток $\mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения функции $Z(z_0(t,c_0(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по $x(t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения, чем три первых члена разложения, поэтому

$$\left.\mathcal{R}(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right|_{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))}\equiv 0,\quad \left.\frac{\partial\mathcal{R}(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))}\equiv 0.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) векторного функционала $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ по первому аргументу и непрерывность по второму, выделяем линейную по x часть $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ этого функционала и член $J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)),\varepsilon)$ нулевого порядка по ε в окрестности точки $x=0$:

$$J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J_0(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)),\varepsilon)+$$
$$+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+J_1(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) = \left.\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))}.$$

Остаток

$$J_1(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b]\to\mathbb{R}^m$$

разложения функционала

$$J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b]\to\mathbb{R}^m$$

имеет более высокий порядок малости по $x(t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_0(\varepsilon))$, чем два первых члена разложения, поэтому

$$\left.J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right|_{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))} \equiv 0.$$

3. Достаточное условие. Решение $x(t,\varepsilon)$ нетеровой краевой задачи (3), (4) представимо в виде

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\nu(\varepsilon)+x^{(1)}(t,\varepsilon), \quad \nu(\varepsilon)\in\mathbb{R}^r,$$

где

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0(s,c_0(\varepsilon))+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right](t).$$

Обозначим $(d\times r)$-мерную матрицу

$$\mathcal{B}_0(c_0(\varepsilon)) = P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot)-\ell K[\mathcal{A}_1(z_0(t,c_0(\varepsilon)))X_r(t)](\cdot)\}.$$

Очевидно

$$\mathcal{B}_0(c_0(0)) := \mathcal{B}_0(c_0^*) = B_0 := F_c'(c_0^*), \quad c_0(0) := c_0^*\in\mathbb{R}^r.$$

Для нахождения функции $\nu(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$\mathcal{B}_0(c_0(\varepsilon))\nu(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+J_1(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\ell K[\mathcal{A}_1(z_0(t,c_0(\varepsilon)))x^{(1)}(t,\varepsilon)+\mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)](\cdot)\Big\}. \qquad (6)$$

Краевая задача (1) в критическом случае при условии $P_{B_0^*} = 0$, где $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$-матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to N(B_0^*)$, подробно изучена в монографиях [1, 2]. В статье [4] исследована периодическая задача, являющаяся частным случаем краевой задачи (1), для которой уравнение для порождающих констант имеет кратные корни, при этом условие $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ не выполняется [2–4]. Целью данной статьи является изучение общей нетеровой нелинейной краевой задачи (1) при условии

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \quad P_{\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon))} P_{Q_d^*} = 0, \quad \varepsilon \in C]0, \varepsilon_0].$$

Здесь $P_{\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon))}$ — $(d \times d)$-матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to N(\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon)))$. В этом случае уравнение (1) разрешимо и имеет по меньшей мере одно решение

$$\nu(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+(c_0(\varepsilon)) P_{Q_d^*} \Big\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \ell K [\mathcal{A}_1(z_0(t, c_0(\varepsilon))) x^{(1)}(t, \varepsilon) + \mathcal{R}(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)](\cdot) \Big\}, \ \ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0],$$

при этом

$$\nu(0) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \nu(\varepsilon) = 0.$$

Уравнение (6) разрешимо и в случае $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0$, $\varepsilon = 0$, при этом $\nu(\varepsilon) = 0 \in \mathbb{R}^r$. Для непрерывности вектора $\nu(\varepsilon)$ достаточно требования

$$\mathcal{B}_0^+(c_0(\varepsilon)) \in C[0, \varepsilon_0],$$

которое можно ослабить:

$$\varepsilon \mathcal{B}_0^+(c_0(\varepsilon)) \in C[0, \varepsilon_0],$$

используя равенства

$$\ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)](\cdot),$$

$$\mathcal{A}_1(z_0(t, c_0(\varepsilon))) x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{A}_1(z_0(t, c_0(\varepsilon))) \times$$

$$\times G \left[Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon), J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right](t).$$

Таким образом, при условии

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \quad \varepsilon\, \mathcal{B}_0^+(c_0(\varepsilon)) \in C[0, \varepsilon_0], \quad P_{\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon))} P_{Q_d^*} = 0, \quad \varepsilon \in C]0, \varepsilon_0]$$

задача (3), (4) имеет по меньшей мере одно решение, которое определяет операторная система

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t) \nu(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right](t), \tag{7}$$

$$\nu(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+(c_0(\varepsilon))P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$- \ell K[\mathcal{A}_1(z_0(t,c_0(\varepsilon)))x^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)](\cdot)\Big\}.$$

Для построения приближенного решения операторной системы (7) применим метод простых итераций [1, 4]. Длина отрезка $[0,\varepsilon_*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [2, 4, 5], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (7), аналогично [6].

Теорема. *Пусть для краевой задачи (1) имеет место критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и выполнено условие (2) разрешимости порождающей задачи. Тогда для каждого корня $c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ уравнения для порождающих функций при условиях*

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*} \neq 0, \quad \varepsilon\mathcal{B}_0^+(c_0(\varepsilon)) \in C[0,\varepsilon_0], \quad P_{\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon))}P_{Q_d^*} = 0, \quad \varepsilon \in C]0,\varepsilon_0]$$

в малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_0(\varepsilon))$ краевая задача (3), (4) имеет по меньшей мере одно решение, определяемое операторной системой (7). При этом в малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_0(\varepsilon))$ задача (1) имеет по меньшей мере одно решение $z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$.

Для периодической задачи — частного случая краевой задачи (1), условие $P_{B_0^*} \neq 0$ равносильно кратности корней уравнения для порождающих амплитуд, при этом $\det B_0 = 0$. Таким образом, условие

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*} \neq 0, \quad \varepsilon\mathcal{B}_0^+(c_0(\varepsilon)) \in C[0,\varepsilon_0], \quad P_{\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon))}P_{Q_d^*} = 0, \quad \varepsilon \in C]0,\varepsilon_0]$$

для периодической задачи ослабляет требование простоты корней уравнения для порождающих амплитуд.

Пример. Условия доказанной теоремы выполняются для 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга

$$y'' + y = \varepsilon\cdot\left(\frac{y^3}{3} - y\right) + \varepsilon^2\sin t. \tag{8}$$

Согласно принятым обозначениям, приходим к задаче о нахождении 2π-периодического решения

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(z^{(a)}(t,\varepsilon),\ z^{(b)}(t,\varepsilon)\Big),\ z^{(a)}(t,\varepsilon),\ z^{(b)}(t,\varepsilon) \in C^1[0,2\pi],\ C[0,\varepsilon_0],$$

дифференциального уравнения (1). Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z(z,t,\varepsilon) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ (z^{(a)})^3 - 3z^{(a)} + 3\varepsilon\sin t \end{bmatrix}.$$

Нормальная $(X(0) = I_2)$ фундаментальная матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

определяет матрицу Q и ее ортопроекторы

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{Q^*} \neq 0$, 2π-периодическая задача для уравнения типа Дюффинга представляет критический случай. Уравнение для порождающих амплитуд

$$F(c_0) = \frac{\pi}{4} \begin{bmatrix} -c_{0a}(c_{0a}^2 + c_{0b}^2 - 4) \\ \\ c_{0b}(c_{0a}^2 + c_{0b}^2 - 4) \end{bmatrix} = 0$$

имеет бесконечное множество решений. Положим $c_{0a} = 0$, $c_{0b} = 2$, при этом

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{B_0^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место неравенство $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = P_{B_0^*} \neq 0$, следовательно, согласно традиционной классификации краевых задач [1, 4], периодическая задача для уравнения типа Дюффинга представляет критический случай выше первого порядка. Ранее нами было показано, что периодическая задача для уравнения типа Дюффинга представляет критический случай второго порядка [7]. Вычисление приближенных периодических решений для уравнения типа Дюффинга с помощью итерационной схемы [7] достаточно громоздко, поэтому воспользуемся доказанной теоремой и тем фактом, что уравнение для порождающих функций

$$F(c_0(\varepsilon)) = \frac{\pi}{4} \begin{bmatrix} -\left((c_{0a}^2 - 4)c_{0b}(\varepsilon) + c_{0b}^3(\varepsilon) + 4\varepsilon\right) \\ \\ c_{0a}(\varepsilon)\left(c_{0a}^2(\varepsilon) + c_{0b}^2(\varepsilon) - 4\right) \end{bmatrix} = 0$$

имеет кратный действительный корень $c_{0a}(\varepsilon) \equiv 0$,

$$c_{0b}(\varepsilon) = \frac{2^{1/3}\left(2 \cdot 6^{1/3} + \left(-9\varepsilon + \sqrt{-48 + 81\varepsilon^2}\right)^{2/3}\right)}{3^{2/3}\left(-9\varepsilon + \sqrt{-48 + 81\varepsilon^2}\right)^{1/3}} \approx 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3\,\varepsilon^2}{16} - \frac{\varepsilon^3}{8} -$$

$$- \frac{105\,\varepsilon^4}{1\,024} - \frac{3\,\varepsilon^5}{32} - \frac{3\,003\varepsilon^6}{32\,768} - \frac{3\,\varepsilon^7}{32} - \frac{415\,701\,\varepsilon^8}{4\,194\,304} - \frac{55\,\varepsilon^9}{512} - \frac{15\,935\,205\,\varepsilon^{10}}{134\,217\,728} + \ldots,$$

при этом

$$\mathcal{B}_0(c_0(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B}_0^{(12)}(c_0(\varepsilon)) \\ \mathcal{B}_0^{(21)}(c_0(\varepsilon)) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_0(c_0(0)) = B_0,$$

где

$$\mathcal{B}_0^{(12)}(c_0(\varepsilon)) = -\pi - \frac{2\cdot 6^{1/3}\,\pi}{\left(-9\varepsilon+\sqrt{-48+81\varepsilon^2}\right)^{2/3}} - \frac{\pi\left(-9\varepsilon+\sqrt{-48+81\varepsilon^2}\right)^{2/3}}{2\cdot 6^{1/3}},$$

$$\mathcal{B}_0^{(21)}(c_0(\varepsilon)) = \frac{\pi}{36}\left(-12+\frac{24\cdot 6^{1/3}}{\left(-9\varepsilon+\sqrt{-48+81\varepsilon^2}\right)^{2/3}} + 6^{2/3}\left(-9\varepsilon+\sqrt{-48+81\varepsilon^2}\right)^{2/3}\right).$$

Таким образом, переход от уравнения для порождающих амплитуд для уравнения типа Дюффинга к уравнению для порождающих функций приводит к операторной системе (7), для которой выполняется условие

$$\varepsilon\,\mathcal{B}_0^{+}(c_0(\varepsilon)) \in C[0,\varepsilon_0], \quad P_{\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon))}P_{Q_d^*} = 0, \quad \varepsilon \in C]0,\varepsilon_0].$$

Действительно,

$$\varepsilon\,\mathcal{B}_0^{+}(c_0(\varepsilon)) \approx \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{\varepsilon}{2\pi}+\dfrac{3\varepsilon^2}{16\pi}+\dfrac{\varepsilon^3}{8\pi}+\dfrac{105\varepsilon^4}{1024\pi}+\ldots \\ -\dfrac{\varepsilon}{2\pi}-\dfrac{3\varepsilon^2}{8\pi}-\dfrac{3\varepsilon^3}{8\pi}-\dfrac{105\varepsilon^4}{256\pi}-\ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления приближенного решения периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (8) применим метод наименьших квадратов [8 – 11]. Положим, к примеру,

$$\varphi_1(t) = [\sin t \;\; \sin 3t \;\; \sin 5t \;\; \sin 7t \;\; \sin 9t \;\; \sin 11t].$$

Первое приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (8) согласно итерационной схеме [8] таково:

$$y_1(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0(\varepsilon)) + x_1(t,\varepsilon), \quad x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon), \quad \xi_1(t,\varepsilon) = \varphi_1(t)\gamma_1(\varepsilon),$$

где

$$\xi_1(t,\varepsilon) = \left(\frac{9\,153\,657\,779\,208}{219\,687\,786\,700\,993}\,\varepsilon - \frac{879\,609\,302\,219}{37\,529\,996\,894\,677}\,\varepsilon^2 + \right.$$

$$+\frac{717\,799\,830}{145\,389\,961\,171}\,\varepsilon^3 - \frac{4\,770\,284}{2\,487\,001\,759}\,\varepsilon^4 + \frac{1\,632\,986}{945\,795\,345}\,\varepsilon^5 +$$

$$\left. + \frac{2\,349\,037}{1\,708\,251\,981}\,\varepsilon^6 + \frac{3\,093\,638}{1\,270\,640\,619}\,\varepsilon^7 - \frac{2\,052\,593}{3\,944\,403\,919}\,\varepsilon^8\right)\sin t +$$

$$+\left(\frac{1}{12}\,\varepsilon - \frac{38\,116\,403\,096\,230}{562\,949\,953\,421\,243}\,\varepsilon^2 + \frac{24\,522\,765\,394}{4\,109\,123\,743\,111}\,\varepsilon^3 - \right.$$

$$- \frac{481\,200\,200}{43\,012\,238\,851}\,\varepsilon^4 - \frac{9\,074\,611}{3\,276\,492\,389}\,\varepsilon^5 - \frac{5\,601\,814}{1\,171\,540\,665}\,\varepsilon^6 -$$

$$-\frac{4\,469\,106}{1\,212\,233\,963}\,\varepsilon^7-\frac{4\,835\,079}{1\,196\,832\,338}\,\varepsilon^8\Bigg)\sin 3t+$$

$$+\left(\frac{1}{288}\,\varepsilon^2-\frac{65}{13\,824}\,\varepsilon^3+\frac{1\,512\,281\,453}{963\,955\,218\,733}\,\varepsilon^4-\frac{52\,269\,966}{70\,504\,567\,103}\,\varepsilon^5+\right.$$

$$\left.+\frac{1\,015\,141}{6\,132\,961\,750}\,\varepsilon^6-\frac{1\,106\,014}{6\,977\,394\,317}\,\varepsilon^7-\frac{386\,321}{9\,493\,997\,759}\,\varepsilon^8\right)\sin 5t+$$

$$+\left(\frac{548\,684\,165\,127}{7\,585\,009\,898\,715\,647}\,\varepsilon^3-\frac{32\,149\,462\,799}{237\,031\,559\,324\,467}\,\varepsilon^4+\right.$$

$$+\frac{311\,737\,018}{4\,049\,999\,447\,243}\,\varepsilon^5-\frac{665\,377}{22\,708\,492\,922}\,\varepsilon^6+$$

$$\left.+\frac{1\,658\,085}{137\,982\,191\,498}\,\varepsilon^7-\frac{104\,793}{24\,094\,699\,747}\,\varepsilon^8\right)\sin 7t+$$

$$+\left(\frac{1\,785\,102\,592}{1\,974\,180\,658\,544\,639}\,\varepsilon^4-\frac{18\,249\,691}{8\,453\,486\,186\,689}\,\varepsilon^5+\right.$$

$$\left.+\frac{405\,473}{233\,672\,884\,871}\,\varepsilon^6-\frac{161\,197}{214\,294\,897\,993}\,\varepsilon^7+\frac{65\,580}{207\,839\,610\,329}\,\varepsilon^8\right)\sin 9t+$$

$$+\left(\frac{4\,829\,071\,\varepsilon^5}{640\,867\,944\,038\,399}-\frac{407\,404\,\varepsilon^6}{18\,670\,531\,614\,941}+\right.$$

$$\left.+\frac{27\,589\,\varepsilon^7}{1\,212\,303\,908\,316}-\frac{7\,926\,\varepsilon^8}{650\,086\,940\,219}\right)\sin 11t.$$

Положим

$$\varphi_2(t)=[\sin t\ \sin 3t\ \sin 5t\ \sin 7t\ \sin 9t\ \sin 11t\ \sin 13t\ \sin 15t\,].$$

Второе приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (8) согласно итерационной схеме [8] имеет вид

$$y_2(t,\varepsilon)=y_0(t,c_0(\varepsilon))+x_2(t,\varepsilon),\quad x_2(t,\varepsilon)=\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),\quad \xi_2(t,\varepsilon)=\varphi_2(t)\gamma_2(\varepsilon),$$

где

$$\xi_2(t,\varepsilon)=\left(-\frac{20\,151\,415\,857}{6\,632\,694\,590\,647}\,\varepsilon^2+\frac{1\,266\,776\,836}{466\,984\,612\,823}\,\varepsilon^3-\frac{1\,917\,443}{2\,381\,512\,658}\,\varepsilon^4+\right.$$

$$+\frac{1\,459\,530}{8\,270\,928\,641}\,\varepsilon^5-\frac{4\,168\,941}{17\,045\,675\,579}\,\varepsilon^6-\frac{2\,436\,175}{10\,137\,013\,886}\,\varepsilon^7+$$

$$\left.+\frac{1\,388\,626}{424\,637\,595}\,\varepsilon^8-\frac{4\,744\,241}{1\,593\,930\,052}\,\varepsilon^9+\frac{1\,405\,640}{1\,183\,158\,471}\,\varepsilon^{10}\right)\sin t+$$

$$+\left(-\frac{8\,846\,645\,280}{7\,764\,826\,942\,903}\,\varepsilon^3+\frac{61\,563\,111}{32\,602\,015\,507}\,\varepsilon^4-\right.$$

$$-\frac{4\,137\,154}{3\,466\,319\,613}\,\varepsilon^5+\frac{4\,037\,817}{6\,229\,707\,656}\,\varepsilon^6-\frac{672\,415}{2\,053\,064\,707}\,\varepsilon^7+$$

$$+\frac{602\,862}{4\,285\,791\,721}\,\varepsilon^8-\frac{8\,025\,378}{1\,923\,393\,037}\,\varepsilon^9-\frac{67\,261\,202}{12\,957\,766\,881}\,\varepsilon^{10}\Bigg)\sin 3t+$$

$$+\Bigg(-\frac{3\,603\,545}{164\,906\,171\,851}\,\varepsilon^4+\frac{155\,794\,417}{1\,667\,382\,209\,503}\,\varepsilon^5-$$

$$-\frac{702\,193}{7\,689\,575\,815}\,\varepsilon^6+\frac{584\,819}{10\,900\,564\,603}\,\varepsilon^7-\frac{348\,791}{11\,724\,426\,613}\,\varepsilon^8-$$

$$-\frac{562\,879}{7\,691\,466\,184}\,\varepsilon^9-\frac{434\,927}{4\,481\,702\,977}\,\varepsilon^{10}\Bigg)\sin 5t+$$

$$+\Bigg(\frac{548\,684\,165\,127}{7\,585\,009\,898\,715\,647}\,\varepsilon^3-\frac{24\,015\,923\,476}{173\,215\,370\,155\,943}\,\varepsilon^4+$$

$$+\frac{1\,746\,402}{19\,558\,975\,321}\,\varepsilon^5-\frac{642\,622}{15\,178\,749\,801}\,\varepsilon^6+\frac{796\,773}{44\,580\,154\,652}\,\varepsilon^7-$$

$$-\frac{225\,669}{31\,767\,341\,362}\,\varepsilon^8+\frac{62\,514}{16\,932\,885\,859}\,\varepsilon^9-\frac{569\,449}{252\,438\,851\,252}\,\varepsilon^{10}\Bigg)\sin 7t+$$

$$+\Bigg(\frac{883\,298\,362}{172\,386\,586\,677\,007}\,\varepsilon^4-\frac{5\,261\,141}{420\,987\,715\,747}\,\varepsilon^5+\frac{446\,103}{40\,399\,921\,288}\,\varepsilon^6-$$

$$-\frac{173\,683}{28\,680\,299\,857}\,\varepsilon^7+\frac{149\,249}{48\,500\,176\,845}\,\varepsilon^8-$$

$$-\frac{74\,086}{50\,323\,434\,295}\,\varepsilon^9+\frac{74\,834}{115\,008\,482\,725}\,\varepsilon^{10}\Bigg)\sin 9t+$$

$$+\Bigg(\frac{9\,653\,598}{49\,914\,266\,961\,787}\,\varepsilon^5-\frac{289\,652}{505\,279\,408\,529}\,\varepsilon^6+$$

$$+\frac{154\,725}{238\,117\,920\,109}\,\varepsilon^7-\frac{56\,057}{130\,509\,327\,446}\,\varepsilon^8+$$

$$+\frac{20\,861}{86\,206\,379\,218}\,\varepsilon^9-\frac{201\,560}{1\,693\,009\,551\,579}\,\varepsilon^{10}\Bigg)\sin 11t+$$

$$+\Bigg(\frac{63\,151}{11\,733\,112\,258\,561}\,\varepsilon^6-\frac{9\,597}{510\,555\,755\,950}\,\varepsilon^7+\frac{5\,229}{200\,096\,279\,219}\,\varepsilon^8-$$

$$-\frac{15\,443}{739\,851\,639\,612}\,\varepsilon^9+\frac{13\,333}{1\,043\,870\,011\,185}\,\varepsilon^{10}\Bigg)\sin 13t+$$

$$+\Bigg(\frac{331}{2\,716\,872\,900\,880}\,\varepsilon^7-\frac{1\,233}{2\,514\,911\,825\,417}\,\varepsilon^8+$$

$$+\frac{11\,483}{14\,180\,594\,744\,068}\,\varepsilon^9-\frac{2\,398}{3\,114\,041\,501\,271}\,\varepsilon^{10}\Bigg)\sin 15t.$$

Положим

$$\varphi_3(t) = [\sin t \ \sin 3t \ \sin 5t \ \sin 7t \ \sin 9t \ \sin 11t \ \ldots \ \sin 23t \ \sin 25t \ \sin 27t].$$

Третье приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (8) согласно итерационной схеме [8] таково:

$$y_3(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x_3(t,\varepsilon), \quad x_3(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon),$$

где

$$\xi_3(t,\varepsilon) := \varphi_3(t)\gamma_3(\varepsilon) = \xi_3(t; 0,5) = \frac{17\,524}{254\,934\,207\,535}\sin t +$$
$$+ \frac{2\,288}{486\,741\,248\,359}\sin 3t - \frac{3\,581}{4\,364\,133\,238\,954}\sin 5t -$$
$$- \frac{41}{2\,051\,784\,228\,592}\sin 7t - \frac{1}{2\,703\,970\,380\,907}\sin 9t +$$
$$+ \frac{1}{2\,731\,137\,448\,786}\sin 11t + \frac{1}{284\,125\,522\,858\,651}\sin 13t +$$
$$+ \frac{1}{40\,193\,981\,272\,341\,585}\sin 15t + \frac{1}{10\,355\,115\,968\,938\,754\,650}\sin 17t +$$
$$+ \frac{1}{3\,132\,083\,787\,058\,059\,404\,125}\sin 19t + \frac{1}{1\,000\,223\,646\,653\,706\,086\,346\,929}\sin 21t.$$

Ранее [7] нами было получено приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (8)

$$y_b(t,\varepsilon) \approx 2\sin t + \frac{-11\varepsilon}{24}\sin t + \frac{\varepsilon}{12}\sin 3t + \frac{\varepsilon^2}{2\,304}(-493\sin t - 156\sin 3t + 8\sin 5t) +$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{110\,592}(-12\,971\sin t + 534\sin 3t - 520\sin 5t + 16\sin 7t).$$

Точность ранее найденного приближения к решению периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (8) характеризует невязка

$$\Delta_b(\varepsilon) := \left\| \frac{dz_b(t,\varepsilon)}{dt} - A(t)z_b(t,\varepsilon) - \varepsilon Z(z_b(t,\varepsilon), t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]}.$$

В частности,

$$\Delta_b(0,1) \approx 9,68\,229 \times 10^{-6}, \quad \Delta_b(0,01) \approx 1,21\,730 \times 10^{-9}.$$

Точность найденных согласно итерационной схеме [8] трех приближений к решению 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (8) приближения к решению периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (8) характеризуют невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| y_k''(t,\varepsilon) + y_k(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot \left(\frac{y_k^3(t,\varepsilon)}{3} - y_k(t,\varepsilon) \right) + \varepsilon^2 \sin t \right\|_{C[0;2\pi]}, \quad k = \overline{0;3},$$

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,0615\,996, \quad \Delta_1(0,1) \approx 1,06\,661 \times 10^{-5},$$

$$\Delta_2(0,1) \approx 4,59\,283 \times 10^{-8}, \quad \Delta_3(0,1) \approx 1,18\,473 \times 10^{-10}.$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,0661\,660, \quad \Delta_1(0,01) \approx 1,25\,379 \times 10^{-8},$$

$$\Delta_2(0,01) \approx 5,31\,135 \times 10^{-12}.$$

Предложенная в статье техника приведения нетеровой краевой задачи к критическому случаю первого порядка применима в случае краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений [1, 2, 9, 11, 12].

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv + 317 p.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
4. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 1. — С. 62 – 69.
5. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
6. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 2. — С. 278 – 288.
7. *Чуйко С. М., Бойчук Ан. А., Бойчук И. А.* Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае второго порядка // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 2. — С. 261 – 269.
8. *Чуйко С. М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 4. — С. 554 – 573.
9. *Чуйко С. М., Чуйко А. С.* О приближенном решении периодических краевых задач с запаздыванием методом наименьших квадратов // Динам. системы. — 2010. — **28**. — С. 133 – 140.
10. *Чуйко С. М., Чуйко А. С.* О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом наименьших квадратов // Динам. системы. — 2011. — **29**. — С. 103 – 111.
11. *Чуйко С. М., Чуйко Ан. С.* О приближенном решении периодических краевых задач с запаздыванием методом наименьших квадратов в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 3. — С. 419 – 432.
12. *Бігун Я. Й.* Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 2. — С. 257 – 263.

Получено 13.09.13