УДК 517.9

ЛІНІЙНІ НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ЧАСОВІЙ ШКАЛІ

О. А. Бойчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

О. П. Страх

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 4е

We find necessary and sufficient conditions for solvability of a Fredholm boundary-value problem for a system of dynamical equations on a time scale. The structure of solutions of this boundary-value problem is researched. An example of a Fredholm boundary-value problem has been considered in the case where the time scale is the Contor set.

Встановлено необхідні та достатні умови розв'язності нетерових крайових задач для систем динамічних рівнянь на часовій шкалі. Досліджено структуру множини розв'язків таких задач. Розглянуто приклад крайової задачі у випадку, коли часова шкала є канторовою множиною.

Розглянемо систему динамічних рівнянь вигляду

$$z^{\Delta} = A(t)z + f(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

де $f(t) \in C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T};\mathbb{R}^n)$ — rd-неперервна [1] вектор-функція, $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T};\mathbb{R}^{n\times n})$ — регресивна [1] rd-неперервна матричнозначна функція.

За відомими результатами [1] отримуємо, що для довільної правої частини $f(t)$ динамічна система (1) має n-параметричну сім'ю розв'язків вигляду

$$z(t) = e_A(t,a)c + F(t), \quad c \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де $F(t) := \displaystyle\int_a^t e_A(t,\sigma(s))f(s)\,\Delta s$, $e_A(t,s)$ — $(n\times n)$-вимірна матричнозначна функція, що називається матричною експоненціальною функцією [1].

Розглянемо крайову задачу, що складається з динамічної системи (1) та крайової умови

$$\ell z = \alpha \in \mathbb{R}^m, \tag{3}$$

де ℓ — m-вимірний лінійний вектор-функціонал, визначений у відповідному просторі n-вимірних вектор-функцій:

$$\ell = \mathrm{col}\,(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) : [a,b]_{\mathbb{T}} := [a,b]\cap\mathbb{T} \to \mathbb{R}^m, \quad \ell_i : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Використавши метод псевдообернених матриць Мура – Пенроуза [2, 3], знайдемо необхідні й достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (3). Підставляючи загальний розв'язок системи (1), що має вигляд (2), у крайову умову (3), отримуємо алгебраїчну систему рівнянь відносно константи $c \in \mathbb{R}^n$:

$$Qc = \alpha - \ell F(\cdot) \in \mathbb{R}^m \tag{4}$$

зі сталою $(m \times n)$-вимірною матрицею $Q := \ell e_A(\cdot, a)$. Позначимо $n_1 := \operatorname{rank} Q$. Тоді $n_1 \le \le \min\{m, n\}$.

Знаходимо $(n \times n)$-вимірну матрицю $P_Q := I_n - Q^+Q$, що є ортопроектором $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$, та $(m \times m)$-вимірну матрицю $P_{Q^*} := I_m - QQ^+$, що є ортопроектором $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, де Q^* — транспонована до Q матриця, а Q^+ — єдина $(n \times m)$-вимірна псевдообернена за Муром – Пенроузом до Q матриця. У цьому випадку алгебраїчна система (4) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли її права частина $\alpha - \ell F(\cdot)$ належить образу матриці Q, тобто ортогональному доповненню $(\ker Q^*)^\perp$. З урахуванням того, що $\operatorname{rank} P_Q = = n - \operatorname{rank} Q = n - n_1$, а $\operatorname{rank} P_{Q^*} = m - \operatorname{rank} Q^* = m - \operatorname{rank} Q = m - n_1$, позначимо через $P_{Q_d^*}$ $(d \times m)$-вимірну матрицю, що складається з $d := m - n_1$ лінійно незалежних рядків матриці P_{Q^*}, а через P_{Q_r} $(n \times r)$-вимірну матрицю, що складається з $r := n - n_1$ лінійно незалежних стовпців матриці P_Q. Тоді алгебраїчна система (4) є розв'язною, якщо для неоднорідностей $f(t) \in C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^n)$ і $\alpha \in \mathbb{R}^m$ виконується умова

$$P_{Q_d^*}(\alpha - \ell F(\cdot)) = \theta_d. \tag{5}$$

Якщо умова (5) виконується, то система (4) має розв'язок вигляду

$$c = P_{Q_r} c_r + Q^+(\alpha - \ell F(\cdot)), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Підставляючи цей вираз у розв'язок (2) системи (1), отримуємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (3):

$$z(t) = z(t; c_r) := X_r(t) c_r + G[f](t) + X(t) Q^+ \alpha, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де $X(t) := e_A(t, a)$, $X_r(t) := e_A(t, a) P_{Q_r}$, $G[f](t) := F(t) - e_A(t, a) Q^+ \ell F(\cdot)$, як і у випадку диференціальних або різницевих систем [3], будемо називати узагальненим оператором Ґріна крайової задачі (1), (3) для динамічних систем на часовій шкалі.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай* $Q = \ell e_A(\cdot, a)$ *і* $\operatorname{rank} Q = n_1$. *Тоді виконуються наступні твердження:*

1) однорідна крайова задача

$$\begin{gathered} z^\Delta = A(t) z, \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ \ell z = 0 \in \mathbb{R}^m, \end{gathered} \tag{6}$$

що відповідає крайовій задачі (1), (3), має рівно $r = n - n_1$ *лінійно незалежних розв'язків*

$$z(t; c_r) = e_A(t, a) P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r;$$

2) неоднорідна крайова задача (1), (3) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C_{\mathrm{rd}}([a,b]_{\mathbb{T}})$ *та* $\alpha \in \mathbb{R}^m$ *задовольняють* $d = m - n_1$ *лінійно незалежних умов (5), і має* r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$z(t; c_r) = e_A(t, a) P_{Q_r} c_r + G[f](t) + X(t) Q^+ \alpha, \quad c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{7}$$

Визначення поняття часової шкали [1, с. 1] дає можливість досліджувати динамічні рівняння та їх системи на канторовій множині Π [4, с. 138].

Приклади. **1.** Розглянемо однорідну динамічну систему

$$x^{\Delta}(t) = x(t), \quad t \in \Pi,$$

де $x(t) \in C^1_{\mathrm{rd}}(\Pi; \mathbb{R}^n)$, та побудуємо для неї фундаментальну матрицю $X(t) := e_A(t, a) = e_{I_n}(t, 0)$.

Згідно з теорією [4, с. 141, 1, с. 19], точка $t \in [0, 1]$ буде належати канторовій множині Π тоді й тільки тоді, коли цю точку можна подати у вигляді

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \quad a_k \in \{0, 2\}, \tag{8}$$

причому існують три випадки розташування цієї точки на канторовій множині Π, що розбивають всю цю множину на відповідні класи:

1) $S_L = \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{2}{3^m}, m \in \mathbb{N}, a_k \in \{0, 2\}, \forall k = \overline{1, m} \right\}$ — множина лівих кінців відповідних відрізків;

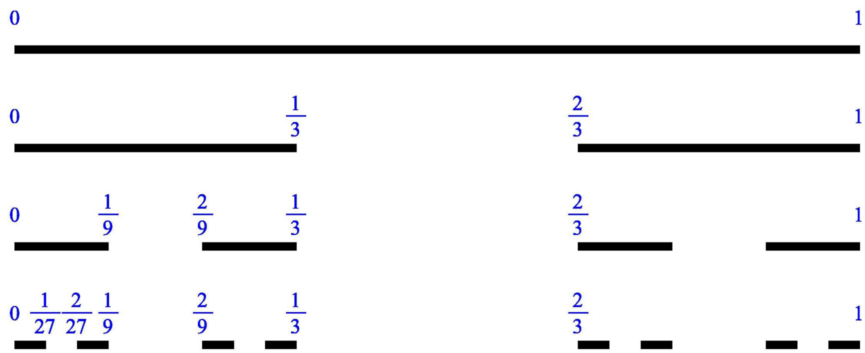
2) $S_R = \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{3^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^k}, m \in \mathbb{N}, a_k \in \{0, 2\}, \forall k = \overline{1, m} \right\}$ — множина правих кінців відповідних відрізків;

3) $S' = \Pi \setminus (S_L \cup S_R)$ — множина точок, що не є кінцями відрізків.

Існування останніх можна пояснити, наприклад, збіжністю наступної послідовності вкладених відрізків $\left[0, \frac{1}{3}\right] \supset \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \supset \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \supset \left[\frac{20}{81}, \frac{7}{27}\right] \supset \ldots \supset \frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}}$, або належністю даній множині, наприклад, точок $t_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k^2+\alpha}}, \alpha \in \mathbb{N}$.

Зрозуміло, що множина S_R містить всі справа розсіяні точки [1, с. 1] множини Π, а множина $\Pi \setminus S_R$ — справа щільні точки [1, с. 2] даної множини.

Оскільки побудова самої множини Π здійснюється порангово [4, с. 138] (див. рисунок), то виведення форми фундаментальної матриці виконуватимемо у такий же спосіб.



Π_0: $t \in [0,1]$. Маємо $X(t) = e^t I_n$.

Π_1: $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Тоді з рівності $X^{\Delta}\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(X\left(\frac{2}{3}\right) - X\left(\frac{1}{3}\right)\right) = X\left(\frac{1}{3}\right)$ маємо $X\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} X\left(\frac{1}{3}\right)$. Враховуючи умову $x(t,c) = X(t)c$, знаходимо константу c з рівняння $e^{\frac{2}{3}} c = \frac{4}{3} e^{\frac{1}{3}}$. Отримуємо $c = \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}}$, а тому фундаментальна матриця має вигляд

$$X(t) = \begin{cases} e^t I_n, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}} e^t I_n, & t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Аналогічно отримуємо для 2- та 3-го рангів:

Π_2: $t \in \left[0, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$,

$$X(t) = \begin{cases} e^t I_n, & t \in \left[0, \frac{1}{9}\right], \\ \frac{10}{9} e^{-\frac{1}{9}} e^t I_n, & t \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}} \frac{10}{9} e^{-\frac{1}{9}} e^t I_n, & t \in \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \\ \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{10}{9} e^{-\frac{1}{9}}\right)^2 e^t I_n, & t \in \left[\frac{8}{9}, 1\right]; \end{cases}$$

$$\Pi_3\colon t\in\left[0,\frac{1}{27}\right]\bigcup\left[\frac{2}{27},\frac{1}{9}\right]\bigcup\left[\frac{2}{9},\frac{7}{27}\right]\bigcup\left[\frac{8}{27},\frac{1}{3}\right]\bigcup\left[\frac{2}{3},\frac{19}{27}\right]\bigcup\left[\frac{20}{27},\frac{7}{9}\right]\bigcup\left[\frac{8}{9},\frac{25}{27}\right]\bigcup\left[\frac{26}{27},1\right],$$

$$X(t)=\begin{cases} e^tI_n, & t\in\left[0,\dfrac{1}{27}\right],\\[2mm] \dfrac{28}{27}\,e^{-\frac{1}{27}}e^tI_n, & t\in\left[\dfrac{2}{27},\dfrac{1}{9}\right],\\[2mm] \dfrac{10}{9}\,e^{-\frac{1}{9}}\dfrac{28}{27}\,e^{-\frac{1}{27}}e^tI_n, & t\in\left[\dfrac{2}{9},\dfrac{7}{27}\right],\\[2mm] \dfrac{10}{9}\,e^{-\frac{1}{9}}\left(\dfrac{28}{27}\,e^{-\frac{1}{27}}\right)^2e^tI_n, & t\in\left[\dfrac{8}{27},\dfrac{1}{3}\right],\\[2mm] \dfrac{4}{3}\,e^{-\frac{1}{3}}\dfrac{10}{9}\,e^{-\frac{1}{9}}\left(\dfrac{28}{27}\,e^{-\frac{1}{27}}\right)^2e^tI_n, & t\in\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{19}{27}\right],\\[2mm] \dfrac{4}{3}\,e^{-\frac{1}{3}}\dfrac{10}{9}\,e^{-\frac{1}{9}}\left(\dfrac{28}{27}\,e^{-\frac{1}{27}}\right)^3e^tI_n, & t\in\left[\dfrac{20}{27},\dfrac{7}{9}\right],\\[2mm] \dfrac{4}{3}\,e^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{10}{9}\,e^{-\frac{1}{9}}\right)^2\left(\dfrac{28}{27}\,e^{-\frac{1}{27}}\right)^3e^tI_n, & t\in\left[\dfrac{8}{9},\dfrac{25}{27}\right],\\[2mm] \dfrac{4}{3}\,e^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{10}{9}\,e^{-\frac{1}{9}}\right)^2\left(\dfrac{28}{27}\,e^{-\frac{1}{27}}\right)^4e^tI_n, & t\in\left[\dfrac{26}{27},1\right]. \end{cases}$$

Цей процес продовжується до нескінченності.

Отже, відповідно до розташування точки t та її однозначного зображення (8) загальна формула фундаментальної матриці для заданої однорідної системи має вигляд

$$X(t)=\begin{cases} \prod\limits_i\left[\left(\dfrac{3^{\alpha_i}+1}{3^{\alpha_i}}e^{-\frac{1}{3^{\alpha_i}}}\right)\prod\limits_{l=\alpha_i+1}^{\infty}\left(\left(\dfrac{3^l+1}{3^l}\,e^{-\frac{1}{3^l}}\right)^{2^{l-\alpha_i-1}}\right)\right]e^tI_n & \forall t=\sum\limits_i\dfrac{2}{3^{\alpha_i}},\\[2mm] e^t\,I_n, & t=0, \end{cases}\tag{9}$$

де $\alpha_i\in\mathbb{N}$, $\alpha_i\neq\alpha_j$, $i\neq j$, $\sum\limits_i$ — скінченна чи нескінченна сума, $\prod\limits_i$ — скінченний чи нескінченний добуток відповідно в залежності від однозначного зображення точки t.

Дійсно, для справа щільних точок, тобто $t\in\Pi\setminus S_R=S_L\cup S'$, отримуємо $X^{\Delta}(t)=$ $=\dot X(t)$, і умова $\dot X(t)=X(t)$ очевидно виконується. Для справа розсіяних точок $t\in S_R$ повинна виконуватись рівність $X(\sigma(t))=\dfrac{3^m+1}{3^m}X(t)$, де m — ранг точок $t\in S_R$ і $\sigma(t)=$ $=t+\dfrac{1}{3^m}\in S_L$. Тоді нехай маємо такі зображення точок:

$$t=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{3^k}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{2}{3^k},\quad \sigma(t)=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{3^k}+\frac{2}{3^m},$$

де $a_k \in \{0, 2\}$. Таким чином, на підставі формули (9) фундаментальні матриці $X(t)$ та $X(\sigma(t))$ мають вигляд

$$X(t) = M \prod_{k=m+1}^{\infty} \left[\left(\frac{3^k+1}{3^k} \, e^{-\frac{1}{3^k}} \right) \prod_{l=k+1}^{\infty} \left(\left(\frac{3^l+1}{3^l} \, e^{-\frac{1}{3^l}} \right)^{2^{l-k-1}} \right) \right] e^t I_n =$$

$$= M \prod_{l=m+1}^{\infty} \left(\left(\frac{3^l+1}{3^l} e^{-\frac{1}{3^l}} \right)^{2^{l-m-1}} \right) e^t I_n,$$

$$X(\sigma(t)) = M \, \frac{3^m+1}{3^m} \, e^{-\frac{1}{3^m}} \prod_{l=m+1}^{\infty} \left(\left(\frac{3^l+1}{3^l} \, e^{-\frac{1}{3^l}} \right)^{2^{l-m-1}} \right) e^{t+\frac{1}{3^m}} \, I_n =$$

$$= M \, \frac{3^m+1}{3^m} \prod_{l=m+1}^{\infty} \left(\left(\frac{3^l+1}{3^l} \, e^{-\frac{1}{3^l}} \right)^{2^{l-m-1}} \right) e^t I_n,$$

де M — той множник у виразах фундаментальних матриць $X(t)$, $X(\sigma(t))$, що відповідає сумі $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{3^k}$. Тоді отримуємо $X(\sigma(t)) = \frac{3^m+1}{3^m} X(t)$, що і потрібно було показати. Отже, формула (9) загального вигляду фундаментальної матриці є правильною.

Зокрема, наприклад, для $t = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$ фундаментальна матриця має вигляд $X(1) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3^k+1}{3^k} e^{-\frac{1}{3^k}} \right)^{2^{k-1}} \right) e \, I_n$. При цьому множник у виразі для фундаментальної матриці, зображеної нескінченним добутком, збігається до деякого числа:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3^k+1}{3^k} \, e^{-\frac{1}{3^k}} \right)^{2^{k-1}} \right) \approx 0,9412.$$

2. Розглянемо однорідну динамічну систему

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \Pi,$$

де $x(t) \in C^1_{\text{rd}}(\Pi; \mathbb{R}^n)$, $A(t) = \frac{1}{t+1} I_n$, та побудуємо для неї фундаментальну матрицю $X(t) := e_A(t, a) = e_{\frac{1}{t+1} I_n}(t, 0)$. Очевидно, що на неперервному проміжку $X(t) = (t+1)\, I_n$. Розглянемо тепер t як справа розсіяну точку деякого рангу m, тоді $\sigma(t) = t + \frac{1}{3^m}$. З рівності $X^{\Delta}(t) = 3^m \left(X(\sigma(t)) - X(t)\right) = \frac{1}{t+1} X(t)$ отримуємо $X(\sigma(t)) = \left(1 + \frac{1}{(1+t)3^m}\right) X(t)$. Враховуючи рівність $X(t) = (t+1)\, I_n$, знаходимо

$$X(\sigma(t)) = \left(1 + t + \frac{1}{3^m}\right) I_n = (\sigma(t) + 1)\, I_n.$$

Отже, для кожної точки $t \in \Pi$ фундаментальна матриця має вигляд

$$X(t) = (1+t)I_n. \tag{10}$$

3. Розглянемо лінійну двоточкову крайову задачу

$$\begin{aligned} &x^{\Delta} = A(t)x + f(t), \quad t \in \Pi, \\ &\ell x = M_1\, x(0) + M_2\, x(1) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{11}$$

де $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t+1} \end{pmatrix}$, $x(t) \in C^1_{\mathrm{rd}}(\Pi, \mathbb{R}^2)$, $f(t) \in C_{\mathrm{rd}}(\Pi, \mathbb{R}^2)$, $M_2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_1 =$ $= \begin{pmatrix} 1 - e\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(\dfrac{3^k+1}{3^k}\, e^{-\frac{1}{3^k}}\right)^{2^{k-1}}\right) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. З урахуванням формул (9) та (10) фундаментальна матриця відповідної однорідної системи $x^{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t+1} \end{pmatrix} x$ набере вигляду

$$X(t) = \begin{cases} I_2, & t = 0, \\ \begin{pmatrix} \prod\limits_i \left[\left(\dfrac{3^{\alpha_i}+1}{3^{\alpha_i}}\, e^{-\frac{1}{3^{\alpha_i}}}\right) \prod\limits_{l=\alpha_i+1}^{\infty}\left(\left(\dfrac{3^l+1}{3^l}\, e^{-\frac{1}{3^l}}\right)^{2^{l-\alpha_i-1}}\right)\right] e^t & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix} & \forall t = \sum\limits_i \dfrac{2}{3^{\alpha_i}}, \end{cases} \tag{12}$$

зокрема, для заданих у крайовій умові точках маємо

$$X(t) = \begin{cases} I_2, & t = 0, \\ \begin{pmatrix} e\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3^k+1}{3^k}\, e^{-\frac{1}{3^k}}\right)^{2^{k-1}}\right) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, & t = 1. \end{cases}$$

Матриця $Q = \ell X(\cdot)$ матиме вигляд $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. З урахуванням того, що $Q^* = Q$, безпосередньо отримуємо $Q^+ = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і $P_Q = P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді за теоремою 1 крайова задача (11) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли $\alpha \in \mathbb{R}^2$ і $f \in C_{\mathrm{rd}}(\Pi, \mathbb{R}^2)$ задовольняють умову (5). У даному випадку $d = 1$ і $P_{Q_d^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо ℓF.

За означенням $F(t) := \int_0^t e_A(t,\sigma(s))f(s)\,\Delta s$. Для канторової множини Π маємо

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad t \in \Pi \setminus S_R, \\ t + \dfrac{1}{3^m}, & \text{якщо} \quad t \in S_R, \end{cases} \qquad \mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t \in \Pi \setminus S_R, \\ \dfrac{1}{3^m}, & \text{якщо} \quad t \in S_R, \end{cases}$$

$$e_A(t,s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ 0 & \dfrac{t+1}{s+1} \end{pmatrix}, & \text{якщо} \quad s \in \Pi \setminus S_R, \\ \begin{pmatrix} \left(\dfrac{3^m+1}{3^m}\right)^{3^m(t-s)} & 0 \\ 0 & \dfrac{t+1}{s+1} \end{pmatrix}, & \text{якщо} \quad s \in S_R, \end{cases}$$

$$e_A(1,\sigma(s)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{1-s} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{s+1} \end{pmatrix}, & \text{якщо} \quad s \in \Pi \setminus S_R, \\ \begin{pmatrix} \left(\dfrac{3^m+1}{3^m}\right)^{3^m(1-s)-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\cdot 3^m}{3^m s + 3^m + 1} \end{pmatrix}, & \text{якщо} \quad s \in S_R. \end{cases}$$

Очевидно, що $\ell F = F(1) = \int_0^1 e_A(1,\sigma(s))f(s)\,\Delta s$. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$. Тоді умова розв'язності (5) для крайової задачі (11) набере вигляду

$$\alpha_2 = \int\limits_0^1 e_A^{(2)}(1,\sigma(s))f_2(s)\,\Delta s \quad \forall \alpha_1 \in \mathbb{R}^2 \quad \forall f_1 \in C_{\mathrm{rd}}(\Pi,\mathbb{R}^2), \tag{13}$$

де

$$e_A^{(2)}(1,\sigma(s)) = \begin{cases} \dfrac{2}{s+1}, & \text{якщо} \quad s \in \Pi \setminus S_R, \\ \dfrac{2\cdot 3^m}{3^m s + 3^m + 1}, & \text{якщо} \quad s \in S_R. \end{cases}$$

Покладемо, зокрема, $f_2(t) \equiv 1$ та оцінимо значення $\int_0^1 e_A^{(2)}(1,\sigma(s))\,\Delta s$. Використовуючи відповідні властивості Δ-інтегрування [1], відносно кожного рангу побудови множини Π отримуємо такі значення:

1) $\int_0^1 e_A^{(2)}(1,\sigma(s))\,\Delta s = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2}{s+1}\,ds + \frac{2}{1+3+1} + \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{2}{s+1}\,ds;$

2) $\int_0^1 e_A^{(2)}(1,\sigma(s))\,\Delta s = \int_0^{\frac{1}{9}} \frac{2}{s+1}\,ds + \frac{2}{1+3^2+1} + \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{3}} \frac{2}{s+1}\,ds + \frac{2}{1+3+1} + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{9}} \frac{2}{s+1}\,ds +$
$+\frac{2}{7+3^2+1} + \int_{\frac{8}{9}}^1 \frac{2}{s+1}\,ds;$

3) $\int_0^1 e_A^{(2)}(1,\sigma(s))\,\Delta s = \int_0^{\frac{1}{27}} \frac{2}{s+1}\,ds + \frac{2}{1+3^3+1} + \int_{\frac{2}{27}}^{\frac{1}{9}} \frac{2}{s+1}\,ds + \frac{2}{1+3^2+1} + \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{7}{27}} \frac{2}{s+1}\,ds +$
$+\frac{2}{7+3^3+1} + \int_{\frac{8}{27}}^{\frac{1}{3}} \frac{2}{s+1}\,ds + +\frac{2}{1+3+1} + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{19}{27}} \frac{2}{s+1}\,ds + \frac{2}{19+3^3+1} + \int_{\frac{20}{27}}^{\frac{7}{9}} \frac{2}{s+1}\,ds + \frac{2}{7+3^2+1} +$
$+\int_{\frac{8}{9}}^{\frac{25}{27}} \frac{2}{s+1}\,ds + \frac{2}{25+3^3+1} + \int_{\frac{26}{27}}^1 \frac{2}{s+1}\,ds; \ldots .$

Спрямовуючи процес до нескінченності, помічаємо, що сума інтегралів на неперервних відрізках прямуватиме до нуля. Тоді значення інтеграла $\int_0^1 e_A^{(2)}(1,\sigma(s))\,\Delta s =: S$ буде дорівнювати такій сумі:

$$S = \frac{2}{1+3+1} + \left(\frac{2}{1+3^2+1} + \frac{2}{7+3^2+1}\right) +$$
$$+\left(\frac{2}{1+3^3+1} + \frac{2}{7+3^3+1} + \frac{2}{19+3^3+1} + \frac{2}{25+3^3+1}\right) + \ldots <$$
$$< \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2.$$

Таким чином, умова (13) для $f_2(t) \equiv 1$ має вигляд $\alpha_2 = S$. Якщо ця умова виконується, то крайова задача (11) має однопараметричну ($r = 1$) сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$z(t;c) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t+1) \end{pmatrix} + \int_0^t e_A(t,\sigma(s)) \begin{pmatrix} f_1(s) \\ 1 \end{pmatrix} \Delta s -$$
$$- X(t) \begin{pmatrix} \alpha_1 - \int_0^1 e_A^{(1)}(1,\sigma(s)) f_1(s)\,\Delta s \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

де

$$e_A^{(1)}(1,\sigma(s)) = \begin{cases} e^{1-s}, & \text{якщо} \quad s \in \Pi \setminus S_R, \\ \left(\frac{3^m+1}{3^m}\right)^{3^m(1-s)-1}, & \text{якщо} \quad s \in S_R, \end{cases}$$

а $X(t)$ визначається за формулою (12). Оцінимо інтеграл $\int_0^1 e_A^{(1)}(1,\sigma(s))f_1(s)\,\Delta s$, поклавши $f_1(t)\equiv 1$. Одержимо

$$\int\limits_0^1 e_A^{(1)}(1,\sigma(s))\,\Delta s = \left(\frac{3+1}{3}\right)^{3-1-1} + \left(\left(\frac{3^2+1}{3^2}\right)^{3^2-1-1} + \left(\frac{3^2+1}{3^2}\right)^{3^2-7-1}\right) +$$

$$+\left(\left(\frac{3^3+1}{3^3}\right)^{3^3-1-1} + \left(\frac{3^3+1}{3^3}\right)^{3^3-7-1} + \left(\frac{3^3+1}{3^3}\right)^{3^3-19-1} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3^3+1}{3^3}\right)^{3^3-25-1}\right) + \ldots < e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k} = e.$$

1. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. — Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2001. — 358 p.

2. *Gantmakher F. R.* Matrix theory. — Moscow: Nauka, 1988. — 576 p. (in Russian).

3. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht: VSP, 2004. — 317 p.

4. *Aleksandrov P. S.* Introduction to the set theory and general topology. — Moscow: Nauka, 1977. — 368 p. (in Russian).

Одержано 24.05.13