Физика низких температур, 1997, т. 23, № 1, с. 110–119

Новые точные решения уравнения Шредингера с потенциалами спинового и солитонного происхождения

В. В. Ульянов, О. Б. Заславский, Ю. В. Василевская

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 24 июня 1996 г.

Рассматриваются новые классы точных решений уравнения Шредингера с простыми явными аналитическими выражениями для потенциальных полей, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний. Они обнаружены с помощью оригинальных методов, разработанных в квантовой теории спиновых систем. Соответствующие эффективные потенциалы сопоставляются с аналогичными моделями солитонного происхождения. Основное внимание уделено необычным явлениям (квазиточнорешаемость, гибкость и многопрофильность моделей потенциалов, экстремумы четвертого порядка, конечнозонность и структурные превращения в зонах, спин-солитонная аналогия).

Розглядаються нові класи точних розв'язків рівняння Шредінгера з простими явними аналітичними виразами для потенціальних полів, рівнів енергії та хвильових функцій стаціонарних станів. Вони виявлені за допомогою оригінальних методів, розроблених у квантовій теорії спінових систем. Відповідні ефективні потенціали зіставляються з аналогічними моделями солітонного походження. Основну увагу приділено незвичайним явищам (квазіточнорозв'язуваність, гнучкість та багатопрофільність моделей потенціалів, екстремуми четвертого порядку, скінченнозонність та структурні перетворення у зонах, спін-солітонна аналогія).

PACS: 03.65.-w

1. Введение

*Найдены точные решения этих уравнений ... Чтобы дальнейшие соображения были более ясными, мы остановимся на этом вопросе несколько подробнее ...**

И. М. Лифшиц

В квантовой теории проблема точных решений уравнения Шредингера для стационарных состояний частицы в потенциальном поле постоянно привлекает внимание специалистов. Еще сравнительно недавно насчитывалось всего несколько примеров потенциалов, допускавших простое точное решение. Ситуация изменилась после разработки метода обратной задачи рассеяния (ОЗР) в теории солитонов [3]. Наконец, существенный прорыв в проблеме точных решений уравнения Шредингера связан с развитием оригинальных методов в теории спиновых систем [4], когда удалось открыть сразу много новых классов точных решений, а также указать пути поисков таких решений. Добавим также, что точные решения уравнения Шредингера, особенно с простыми явными выражениями для потенциалов, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний, вообще образуют незыблемый «золотой» фонд квантовой теории.

Совершенно естественно, что обращение к вопросам точных решений вызывает постоянный интерес. Можно выделить три периода интенсивного появления новых моделей с точными решениями.

А начиналось все во время становления квантовой механики, когда в середине и конце 20-х годов появились первые модели с точными решениями с простыми выражениями для потенциалов, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний — гармонический осциллятор, кулоновское поле, потенциалы Морса, Эккарта, Пешля—Теллера, бесконечная прямоугольная яма, дельта-яма.

Затем наступило время различных обобщений, усложнений, композиций из разных моделей [5, 6]. Процесс поисков новых моделей с точными решениями продолжался, но его плоды оказывались либо слишком сложными, громоздкими, либо очень абстрактными.

* Эпиграфы к разделам статьи взяты из работ И. М. Лифшица [1,2].

© В. В. Ульянов, О. Б. Заславский, Ю. В. Василевская, 1997

Первый прорыв в область новых простых моделей с точными решениями связан с развитием теории солитонов, поскольку в ситуации ОЗР солитонные формирования играют роль потенциальных полей в стационарном уравнении Шредингера для некоторой квантовой частицы (псевдочастицы). Особенность таких солитонных точных решений состоит в том, что уровни энергии оказываются фиксированными (они являются интегралами движения нелинейного эволюционного уравнения Кортевега—де Фриза [3]) при достаточно большой гибкости потенциалов, а состояния непрерывного спектра соответствуют полной прозрачности при рассеянии частиц.

Другое направление связано с обнаружением принципиально нового объекта в квантовой механике — квазиточнорешаемых моделей. Здесь моментом прозрения стало нахождение целых классов новых моделей с точными решениями в связи с разработкой новых методов в теории спиновых систем [7]. Для спиновых систем в соответствующих эффективных потенциальных полях с точными решениями уравнения Шредингера в зависимости от выбора спинового параметра и значений магнитного поля получаются разнообразные профили потенциалов и имеются простые формулы для энергетического спектра и соответствующих волновых функций [4].

Эти два новых направления внесли весомый вклад в сокровищницу задач, допускающих точное решение.

В дальнейшем изучение квазиточнорешаемых моделей развилось в новую область математики и математической физики (см. [8,9] и указанную там литературу), однако в данной статье мы сосредоточимся только на физических аспектах (причем лишь некоторых).

В чем же конкретно заключается важность точных решений рассматриваемого типа?

Во-первых, следует подчеркнуть, что это основа стационарных состояний в квантовой механике (см., например, [10–14]). Далее нужно отметить, что точные решения являются фундаментом новых задач. Затем нельзя не упомянуть о значении точных решений как базы приближенных методов. Добавим, что модели с точными решениями часто используются при изучении сложных явлений, когда точные закономерности не известны или когда можно изучить основные свойства, не зависящие от конкретного вида потенциала, отвлекаясь от усложнений, вносимых его деталями. Так, И. М. Лифшиц в работах по теории локальных возмущений [1] часто использовал так называемую сепарабельную модель возмущения. Укажем также, что проверка новых теорий обычно осуществляется на основе известных частных случаев задач с точными решениями. Еще одна важная роль — задачи с точными решениями служат тестовыми примерами при применении численных методов.

Можно надеяться, что тема точных решений сохранит живой интерес и для будущих времен.

2. Спиновые эффективные потенциалы

Как правило, изучать дифференциальные уравнения значительно легче, чем их дискретные аналоги...

И. М. Лифшиц

Спиновые системы — особый класс квантовых систем, гамильтониан которых содержит операторы спина (эффективного спина, псевдоспина и т.п.). Они встречаются во многих областях физики (магнетизм и сверхпроводимость, ядерная физика и взаимодействие света и вещества). Для описания этих систем необходимы специальные методы теоретической физики, поскольку соотношения коммутации для компонент спина отличаются от бозевских и фермиевских. Широкое распространение получили методы для многочастичных систем, а системы с односпиновым гамильтонианом оставались без внимания. В качестве примера можно указать так называемые анизотропные парамагнетики. Это касается и многочастичных систем, так как в некоторых случаях коллективные степени свободы одночастичного вида описывают движение системы как целого [4].

Спин представляет собой квантовомеханический объект существенно дискретной природы. Поэтому, например, уравнение, возникающее при изучении энергетического спектра спиновых систем, имеет матричную форму. При больших значениях спина это затрудняет анализ свойств системы стандартными квантовомеханическими методами. Оказывается, однако, что для достаточно широкого класса спиновых систем можно ввести строгое потенциальное описание, так что энергетический спектр спиновой системы совпадает с некоторыми уровнями энергии для псевдочастицы, движущейся в потенциальном поле достаточно простой формы. Такое точное спин-координатное соответствие служит также основой развития различных приближенных методов описания спиновых систем, например теории возмущений и квазиклассического приближения. Особенно важно, что для соответствующей координатной системы это приводит к нахождению новых точных решений уравнения Шредингера [4].

Предложенный нами подход заключается в том, что рассматриваются гамильтонианы, построенные из генераторов некоторой группы Ли (в частности, спиновых операторов), и при решении задачи об их собственных значениях и собственных векторах используется представление обобщенных [15] (в частности, спиновых) когерентных состояний. В получающемся координатном представлении такой гамильтониан становится дифференциальным оператором, в частности оператором Шредингера с некоторой эффективной потенциальной энергией. Найденные потенциалы для простых спиновых систем либо имеют форму нелокализованных ям, либо оказываются периодическими. Во всех случаях имеются как симметричные, так и несимметричные разнообразные многопараметрические потенциальные модели.

Переходя к конкретным примерам, рассмотрим прежде всего один из наиболее простых спин-гамильтонианов (здесь и далее без ограничения общности мы пользуемся безразмерными величинами), соответствующий так называемому легкоосному парамагнетику в перпендикулярном магнитном поле [7]:

$$H = -S_y^2 - BS_x . \qquad (1)$$

Здесь S_j — операторы проекций спина; B пропорционально внешнему магнитному полю. Если мы решаем задачу нахождения стационарных состояний такой системы с помощью указанного метода, то приходим к стандартному одномерному уравнению Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left[E - U_{\text{eff}}(\xi)\right]\psi = 0 \qquad (2)$$

для псевдочастицы с квадратичным законом дисперсии (спинона), движущейся в эффективном потенциальном поле, построенном из гиперболических функций

$$U_{\text{eff}}(\xi) = \frac{B^2}{4}\,\text{sh}^2\,\xi - B(S + 1/2)\,\text{ch}\,\xi , \qquad (3)$$

где S — величина спина, а ξ можно считать некоторой безразмерной координатой. При этом оказывается [4], что собственные значения энергии E спиновой системы (1) совпадают с нижними $2S + 1$ уровнями энергии спинона в потенциальном поле (3).

На основании такого подхода к описанию спиновых систем были изучены низкотемпературные физические свойства (энергетический спектр, намагниченность, восприимчивость, спиновое туннелирование) анизотропных парамагнетиков [4, 7].

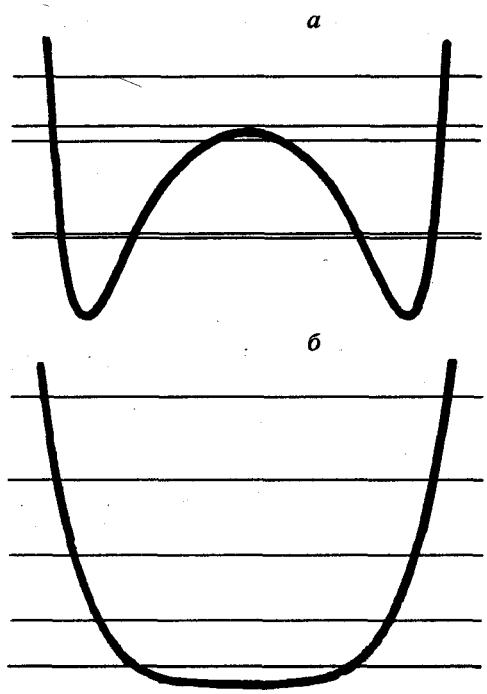

Рис. 1. Типичные эффективные потенциалы (3) при $S = 2$: яма с двумя минимумами для $B \ll B_0$ (*а*); яма с четверным минимумом для $B = B_0$ (*б*).

Для значений магнитного поля $B > B_0 = 2S + 1$ найденный нелокализованный потенциал (3) имеет форму одиночной ямы, тогда как для $B < B_0$ он превращается в яму с двумя минимумами (рис. 1,*а*). Важно, что для $B = B_0$ эта модель принимает форму ямы с минимумом четвертого порядка (рис. 1,*б*).

Если при больших значениях спина ($S >> 1$) установленное спин-координатное соответствие удобно при изучении свойств спиновой системы [4] стандартными квантовомеханическими методами для уравнения Шредингера (2), то, с другой стороны, для небольших значений спина возможно нахождение собственных значений спин-гамильтониана (1) непосредственно в дискретном спиновом представлении как корней характеристического уравнения. С учетом свойств симметрии задачи получаются простые явные аналитические формулы для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний. Различные конкретные случаи рассмотрены в наших работах [4,17,18]. В настоящей работе сосредоточимся на особом случае точных решений для модели (3) при критическом значении параметра $B = B_0 = 2S + 1$, когда потенциал имеет форму ямы с минимумом четвертого порядка:

$$U_{\text{eff}}(\xi) = -\frac{B_0^2}{2} + B_0^2 \operatorname{sh}^4 \xi/2 . \qquad (4)$$

Для дальнейшего удобно ввести новую координату $x = \xi/2$ и отсчитывать энергию от минимума потенциала (4). Тогда в новых переменных уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\varepsilon - u(x)\right]\psi = 0 , \qquad (5)$$

где $\varepsilon = 4E + 2B_0^2$; $u(x) = Q \operatorname{sh}^4 x$, $Q = 4B_0^2$. (6)

Таким образом, точные решения для потенциального поля с четверным минимумом (6) существуют при значениях $Q = 4(2S + 1)^2$, где $S = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \ldots$ При этом, как уже отмечалось, для небольших значений параметра S должны получаться простые явные формулы для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний. Опуская расчетные детали, приведем некоторые из них (первые индексы энергий отвечают верхним знакам в формулах). Если $S = 0$, то для основного состояния

$$\varepsilon_0 = 2 ; \quad \psi_0(x) = A_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x\right) .$$

Если $S = 1/2$, то к основному состоянию присоединяется первое возбужденное:

$$\varepsilon_0 = 3 ; \quad \psi_0(x) = A_0 \exp\left(-\operatorname{ch} 2x\right) \operatorname{ch} x ;$$

$$\varepsilon_1 = 11 ; \quad \psi_1(x) = A_1 \exp\left(-\operatorname{ch} 2x\right) \operatorname{sh} x .$$

Если $S = 1$, то в формулах появляются радикалы:

$$\varepsilon_{0,2} = 16 \mp 2\sqrt{37} ;$$

$$\psi_{0,2}(x) = A_{0,2} \exp\left(-\frac{3}{2} \operatorname{ch} 2x\right)\left(\operatorname{ch} 2x \pm \frac{\sqrt{37} \mp 1}{6}\right);$$

$$\varepsilon_1 = 14 ; \quad \psi_1(x) = A_1 \exp\left(-\frac{3}{2} \operatorname{ch} 2x\right) \operatorname{sh} 2x .$$

Если $S = 3/2$, то для четырех состояний с низколежащими уровнями энергии

$$\varepsilon_{0,2} = 19 \mp 4\sqrt{13} ; \quad \psi_{0,2}(x) =$$

$$= A_{0,2} \exp\left(-2 \operatorname{ch} 2x\right)\left(\operatorname{ch} 3x \pm \frac{\sqrt{13} \pm 1}{2} \operatorname{ch} x\right);$$

$$\varepsilon_{1,3} = 35 \mp 4\sqrt{21} ; \quad \psi_{1,3}(x) =$$

$$= A_{1,3} \exp\left(-2 \operatorname{ch} 2x\right)\left(\operatorname{sh} 3x \pm \frac{\sqrt{21} \mp 3}{2} \operatorname{sh} x\right) .$$

Если $S = 2$, то ограничимся только уровнями энергии. Они содержат не только радикалы:

$$\varepsilon_{2n} = \frac{130}{3} + \frac{8}{3}\sqrt{313} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{1765}{313^{3/2}}\right) + \varphi_n\right],$$

$$n = 0, 1, 2;$$

$$\varphi_{0,1} = \pm\frac{2}{3}\pi , \quad \varphi_2 = 0 ; \quad \varepsilon_{1,2} = 40 \mp 2\sqrt{109} .$$

Нормировочные величины связаны с модифицированными функциями Бесселя (функциями Макдональда): так, $A_0 = [K_0(1)]^{-1/2}$ в случае $S = 0$.

Подчеркнем, что в рассматриваемых моделях число точных решений оказывается конечным. Это свойство получило название «квазиточнорешаемости» [8]. При этом стационарные состояния с точными решениями (мультиплет $2S + 1$ уровней энергии) расположены в нижней части энергетического спектра, начиная с основного состояния, тогда как остальные стационарные состояния («надспиновые») не имеют точных решений.

Как известно, степенной потенциал $u(x) = Qx^4$ (четверной осциллятор) не допускает точных решений, являясь важным элементом многих существенно ангармонических систем [19]. Таким образом, возникает несколько парадоксальная ситуация, когда более простая модель 4-степенного потенциала не имеет точных решений, а более сложная (и близкая к ней как качественно, так и количественно) 4-гиперболическая модель (6) таковыми обладает. Сопоставление уровней энергии этих двух моделей показывает, что они сближаются с увеличением параметра S в (6), а относительная ошибка оказывается порядка $S^{-2/3}$.

Важно, что тем самым мы получаем еще один способ нахождения уровней энергии четверного осциллятора с помощью модели с точными решениями (6). В более общем случае то же касается смешанного квадратично-четверного осциллятора и модели с точными решениями (3).

Для рассмотренной системы со спин-гамильтонианом (1) можно также ввести описание на основе некоторой периодической модели потенциала. Однако мы проиллюстрируем такую возможность на примере спиновой системы с гамильтонианом более общего вида:

$$H = \alpha S_z^2 - \beta S_y^2 - BS_x , \qquad (7)$$

описывающим, например, двухосный парамагнетик в магнитном поле B, перпендикулярном осям анизотропии с константами $\alpha, \beta \geq 0$. В этом случае можно также прийти к стандартному уравнению Шредингера типа (2) с периодическим эффективным потенциалом

$$U_{\text{eff}}(\xi) = \frac{W_1 \operatorname{sn}^2 \xi - W_2 \operatorname{cn} \xi}{\alpha + \beta \operatorname{cn}^2 \xi}, \qquad (8)$$

$$W_1 = \frac{B^2}{4} - \alpha\beta S(S+1),\ W_2 = (\alpha + \beta)\, B(S + 1/2),$$

построенным из эллиптических функций Якоби с модулем $k = \sqrt{\beta/(\alpha + \beta)}$.

Поскольку спиновая система (7) при небольших S допускает точное решение в виде простых явных формул для уровней энергии и векторов стационарных состояний, то и уравнение Шредингера имеет соответствующие точные решения. Собственные значения спин-гамильтониана (7) совпадают на этот раз с $2S + 1$ крайними уровнями энергии низших энергетических зон (чередующимися дном и потолком зоны) в потенциальном поле (8).

С ростом магнитного поля B минимумы ям в ячейках периодического потенциала претерпевают изменения от двойных до одиночных через четверные, а форма максимумов барьеров изменяется в обратном порядке. Интересно, что при $\alpha = \beta$ существует некоторое критическое значение магнитного поля $B_0 = 2\alpha\sqrt{S(S+1)}$, при котором потенциал имеет одновременно как четверной минимум, так и четверной максимум (рис. 2). Здесь мы ограничимся конкретными примерами именно для этого случая, полагая $\alpha = 1$.

Не останавливаясь на вопросе о волновых функциях, приведем результаты для некоторых уровней энергии E. Их нумерация отвечает спиновой системе (первый индекс соответствует верхнему знаку в формулах). Одновременно укажем, какое положение они занимают в зонах энергии эффективного потенциала.

Если $S = 0$, то $E_0 = 0$ (дно основной зоны). Если $S = 1/2$, то $E_{0,1} = \mp\sqrt{3}/2$ (окаймление первой щели). Если $S = 1$, то $E_{0,2} = \mp 3$ (дно основной зоны и дно второй зоны), а $E_1 = 0$ (потолок первой зоны). Если $S = 3/2$, то $E_{0,1} = -3\sqrt{2} \mp \sqrt{15}/2$ (эти уровни энергии окаймляют первую щель) и $E_{2,3} = 3\sqrt{2} \mp \sqrt{15}/2$ (окаймление третьей щели). Если $S = 2$, то $E_{0,4} = \mp 6\sqrt{3}$ (дно основной и дно четвертой зоны), $E_{1,3} = \mp\sqrt{33}$ (потолки первой и третьей зон), $E_2 = 0$ (дно второй зоны).

Как указано выше, в каждой из $2S + 1$ низших зон один из крайних уровней энергии является спиновым, что дает основание называть эти зоны также спиновыми. Особого внимания, однако, заслуживают более высокие зоны — «надспиновые». Оказалось, что в их расположении встречаются

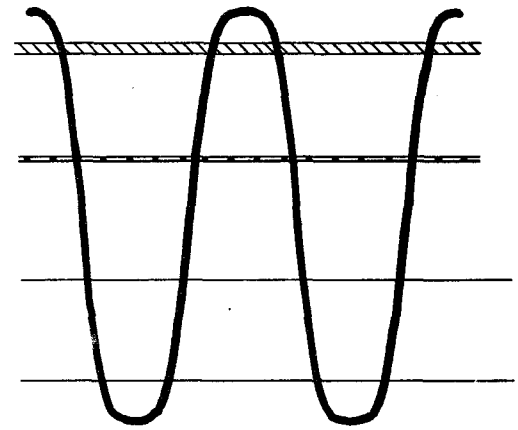

Рис. 2. Энергетические зоны эффективного потенциала (8) с четверными экстремумами и точными решениями ($S = 3/2$).

интересные особенности. Если считать S непрерывно изменяющимся, то при целых и полуцелых S все надспиновые зоны попарно стыкуются, так что половина надспиновых щелей закрывается. Кроме того, одна из надспиновых зон превращается в спиновую, а также появляются точные решения для спиновых зон. Эти превращения энергетических зон можно назвать периодическим спиновым структурным переходом.

Полагая в формулах (8) $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ и учитывая предельные свойства эллиптических функций, получаем эффективный потенциал одноосной спиновой системы (3).

Если $B = 0$, то при целых S потенциал (8) сводится к встречающемуся в теории солитонов конечнозонному кноидальному потенциалу Ламе—Айнса, когда все надспиновые зоны смыкаются, образуя одну бесконечную зону.

На рассмотренных примерах спиновых систем мы иллюстрируем одну замечательную особенность эффективных потенциалов — наличие точных решений только для части стационарных состояний.

При этом, кроме имеющих точное решение, есть бесконечное множество расположенных над ними (по шкале энергий) стационарных состояний, для которых такое свойство, вообще говоря, отсутствует. К тому же это свойство проявляется в указанных моделях потенциалов не при всех возможных значениях входящих в них параметров, а лишь при некоторых значениях, связанных с целыми числами (мультиплетность $2S + 1$). Остальным же значениям параметров соответствуют «внеспиновые» потенциалы с «внеспиновыми» стационарными состояниями (уровнями энергии, волновыми функциями, энергетическими зонами).

Итак, обнаружилось новое, совершенно необычное, свойство квантовомеханических систем, получившее название квазиточнорешаемости. Природа подобных моделей потенциалов обычно связана с теоретико-групповыми свойствами систем. В частности, в спиновых системах основой является спин-координатное соответствие.

Если говорить о физических объектах, то квазиточнорешаемость проявилась, по-видимому, впервые именно при изучении спиновых систем.

До сих пор речь шла об одномерных задачах. Между тем замечательным свойством квазиточнорешаемых моделей является то, что точные решения удается найти и в двумерных случаях, причем без разделения переменных. Впервые это было продемонстрировано в [21]. Отметим здесь, например, работы [22,23], в которых квазиточнорешаемые модели были построены при наличии магнитного поля.

3. Солитонные локализованные потенциалы

... Мы рассмотрим здесь один случай, допускающий точное решение и приводящий к наиболее простым выражениям...
... В качестве примера изображена картина деформаций, возникающих в этой модели...
И. М. Лифшиц

Установленная в теории солитонов [3] тесная связь нелинейного эволюционного уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ) с одномерным стационарным уравнением Шредингера позволяет указать новые типы точных решений последнего. Исследователей солитонов интересовал лишь метод решения задачи Коши для уравнения КдФ, а уравнение Шредингера при этом играло вспомогательную роль. Между тем, если рассматривать эту взаимосвязь с чисто квантовой точки зрения, то выясняется, что для уравнения Шредингера здесь обнаруживается многопараметрическое семейство потенциалов, для которых имеются достаточно простые точные явные выражения как для потенциальных моделей, так и для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний. Наибольший интерес представляет дискретная часть энергетического спектра (для локализованных потенциалов), а в непрерывной части имеется, согласно стационарной теории рассеяния, безотражательность, сверхпрозрачность, т.е. коэффициент отражения равен нулю.

Существенно, что в квантовой механике в отличие от других моделей с точными решениями, для которых задается потенциал и решается уравнение Шредингера (задача о собственных значениях), в результате чего получаются уровни энергии, в моделях солитонного происхождения сразу же задаются уровни энергии и для каждого набора уровней существуют потенциалы с точными решениями. Другими словами, мы имеем дело с обратной задачей — даны уровни энергии (произвольно расположенные!) и для них сразу же строятся потенциалы. При этом для каждого набора уровней энергии находится не один фиксированный профиль потенциала, а бесконечное многопараметрическое семейство потенциальных моделей.

Здесь на первый план выходит связь уровней энергии и потенциалов, а вопрос о волновых функциях связанных состояний оказывается вторичным. Это — наследие метода ОЗР, где сами волновые функции связанных состояний не фигурируют полностью, а представлены лишь своими асимптотическими параметрами (входят в так называемые данные рассеяния). Однако и для волновых функций также можно получить явные точные решения.

Произвольно выбирая N последовательных связанных стационарных состояний с параметрами $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_N$ (солитонная нумерация), всегда можно построить по формулам

$$u(x) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F,$$

$$F = \det\left[\delta_{lm} + \frac{2\sqrt{k_l k_m}}{k_l + k_m}\exp\left(2\gamma_l\right)\right], \qquad (9)$$

$$\gamma_l = k_l x - 4k_l^3 t + \Delta_l + \delta_l,$$

$l, m = 1, 2, \ldots, N$ (δ_{lm} — символ Кронекера), отвечающим N-солитонному решению уравнения КдФ, целое семейство пространственно локализованных потенциалов с уровнями энергии $E_n = -k_{N-n}^2$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ и соответствующими волновыми функциями, которые удовлетворяют уравнению вида (5) и также имеют достаточно простой вид (мы их не приводим). Величина t, имеющая для солитонов физический смысл времени, здесь фигурирует в качестве постоянного параметра, который будем называть «квазивременем», величины Δ_l определяются энергетическими параметрами k_m, а фазовые добавки δ_l в случае $t = 0$ влияют на свойства симметрии моделей (9).

Потенциалы (9) имеют отрицательный знак, а их деформации при изменении квазивремени t происходят с сохранением площади.

В области непрерывного спектра энергии модели (9) обладают свойством безотражательности при рассеянии частиц [20].

При $t \to \pm\infty$ потенциал (9) состоит из N уединенных неодинаковых безотражательных ям Эккарта, которые при $t = 0$ объединяются в составную яму, приобретающую разнообразные как симметричные (если все $\delta_l = 0$), так и несимметричные формы.

В случае $N = 1$ форма модели (9) фиксирована — это одноуровневая безотражательная яма Эккарта, для которой всегда можно выбрать начало отсчета координаты x так, чтобы $u(x) = -2k_1^2/\mathrm{ch}^2\, k_1 x$. Аналогичный профиль получается и при $N > 1$, если $\delta_l = 0$, $k_l = lk_1$, $l = 1, \ldots, N$ и $t = 0$: $u(x) = -N(N+1)k_1^2/\mathrm{ch}^2\,(k_1 x)$.

В случае $N = 2$ модели (9) имеют разнообразную форму, которая зависит от двух параметров: квазивремени t и отношения энергетических величин k_2/k_1 (фазовые добавки δ_1 и δ_2 можно сделать равными нулю выбором начала отсчета x и t). При $t = 0$ в силу $u(-x) = u(x)$ имеем симметричные модели (9), о конкретном виде которых можно судить по поведению $u(x)$ вблизи $x = 0$, где при $k_2/k_1 < \sqrt{3}$ имеется максимум, т.е. двойная яма; при $k_2/k_1 > \sqrt{3}$ — минимум, т.е. одинарная яма (в частности, при $k_2/k_1 = 2$ яма Эккарта). При $k_2/k_1 = \sqrt{3}$ получается яма с уплощенным дном, т.е. минимум 4-го порядка:

$$u(x) = -4k_1^2 + \frac{8}{3}k_1^6 x^4 - \frac{32}{15}k_1^8 x^6 + O(x^8).$$

При $t \neq 0$ получаются несимметричные модели.

Если одно- и двухуровневые потенциалы (9) достаточно хорошо знакомы по соответствующим солитонным профилям, то этого нельзя сказать уже о трехуровневых моделях, когда имеется четыре независимых параметра: k_3/k_1, k_2/k_1, t и одна из фазовых добавок, например δ_1 (две другие влияют лишь на начало отсчета x и t, так что их можно считать равными нулю). Если при этом $t = 0$ и $\delta_1 = 0$, то имеем симметричные формы потенциалов (9), вид которых зависит прежде всего от поведения вблизи $x = 0$. Несложные вычисления показывают, что

$$u(x) = -2\left(k_3^2 - k_2^2 + k_1^2\right) + 2\left[k_3^4 - \left(k_2^2 - k_1^2\right)\left(4k_3^2 - 3k_2^2 + k_1^2\right)\right]x^2 -$$

$$- \frac{4}{3}\left\{k_3^6 - \left(k_2^2 - k_1^2\right)\left[6k_3^4 - 2\left(5k_2^2 - 3k_1^2\right)k_3^2 + 5k_2^4 - 5k_2^2k_1^2 + k_1^4\right]\right\}x^4 + O(x^6).$$

Таким образом, при условии

$$k_3^4 - 4\left(k_2^2 - k_1^2\right)k_3^2 + \left(k_2^2 - k_1^2\right)\left(3k_2^2 - k_1^2\right) = 0$$

возникают экстремумы 4-го порядка. На плоскости $(k_2^2/k_1^2, k_3^2/k_1^2)$ это соответствует ветви гиперболы, часть которой относится к четверным минимумам (рис. 3,*д*), а другая часть — к четверным максимумам (рис. 3,*е*). На стыке минимумов и максимумов есть минимум 6-го порядка (рис. 3,*ж*) при значениях $k_2/k_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ и $k_3/k_1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$, для которых разложение потенциала имеет вид

$$u(x) = -2\left(2+\sqrt{2}\right)k_1^2 + \frac{4}{45}\left(17+12\sqrt{2}\right)k_1^8 x^6 -$$

$$- \frac{8}{315}\left(58+41\sqrt{2}\right)k_1^{10}x^8 + O(x^{10}).$$

На рис. 3 приведены некоторые типичные симметричные профили, соответствующие различным соотношениям энергетических величин. При $t \neq 0$ и(или) $\delta_1 \neq 0$ получаются несимметричные профили.

Таким образом, множество потенциалов с простыми явными точными решениями в квантовой механике существенно обогащается локализованными многопараметрическими моделями разнообразного вида. Кроме локализованных потенциалов существуют также периодические (и почти периодические) конечнозонные потенциальные модели солитонной природы [3], которые мы не будем рассматривать.

Поворот в сторону квантовомеханической ситуации и постановка вопроса о точных решениях уравнения Шредингера солитонного происхождения в книгах по квантовой механике, за исключением [16], по-видимому, в этом аспекте специально еще не обсуждались.

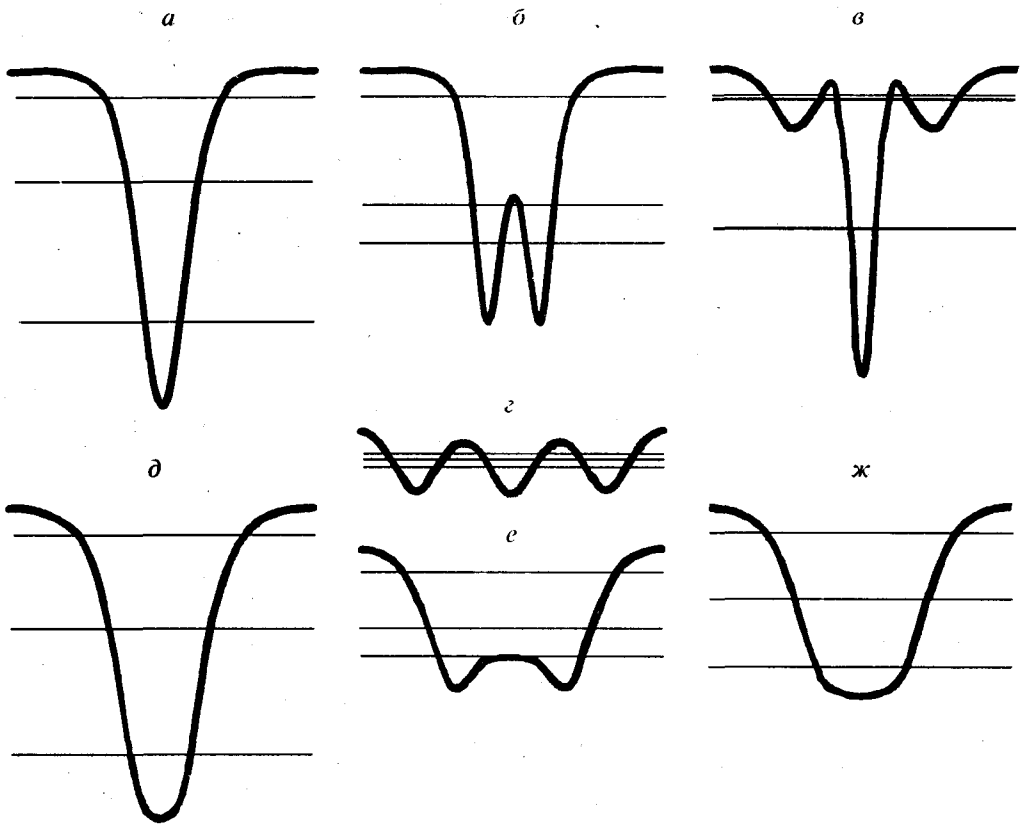

Рис. 3. Характерные профили точно решаемых трехуровневых симметричных потенциальных моделей солитонной природы.

4. Спин-солитонная аналогия

Несмотря на видимое физическое различие этих задач, они обнаруживают глубокое сходство.

И. М. Лифшиц

Между спиновыми и солитонными моделями потенциальных полей имеется много общего.

Так, спин-координатное соответствие в теории спиновых систем является аналогом так называемой «пары Лакса» теории солитонов, т.е. солитон-координатного соответствия. В обоих случаях имеется некоторое ассоциированное уравнение Шредингера, с помощью которого решаются главные задачи — проблема энергетического спектра (или более общо — стационарных состояний) в спиновых системах и задача Коши в теории солитонов для нелинейного эволюционного уравнения Кортевега—де Фриза. В спин-координатном соответствии связующую роль играет представление спиновых когерентных состояний, тогда как в солитон-координатном соответствии аналогичную роль играет интегральное преобразование Гельфанда—Левитана—Марченко в методе ОЗР.

В обоих случаях исходные элементы — дискретные (спин и солитон), а им ставятся в соответствие непрерывные координатные представления с одномерными потенциальными полями и некоторым энергетическим соответствием. В спиновом случае имеем спиновый спектр и надспиновые уровни энергии для нелокализованных потенциалов, а в солитонном случае имеем у локализованных потенциалов дискретный солитонный спектр и непрерывный «надсолитонный» с полной прозрачностью. Еще один общий аспект — целочисленная аналогия: в спиновом случае основным параметром потенциальных моделей является целое число $2S + 1$, тогда как эквивалентным элементом в солитонном случае служит число солитонов N.

Типичная для солитонных периодических (и почти периодических) моделей конечнозонность встречается и в спиновых моделях.

Общей спин-солитонной особенностью является четкое разбиение энергетического спектра на две части: в спиновых системах это выражается в квазиточнорешаемости, а в солитонных — в безотражательности (и конечнозонности).

При этом можно считать, что соответствующее уравнение Шредингера описывает состояния некоторых псевдочастиц — «спинона» в случае спиновых систем и «фризона» в случае солитонных

систем. Особенность спинона — спиновой системе могут соответствовать как нелокализованные, так и периодические потенциалы. Особенность фризона — солитонной системе могут соответствовать как локализованные, так и периодические потенциалы.

Кроме того, в обоих случаях потенциальным моделям присущи разнообразие форм, наличие нескольких параметров, помимо отмеченных дискретных, появление аналогичных особых профилей потенциалов: с минимумом четвертого порядка, двухъямных с возможным попаданием уровней энергии в критический диапазон вблизи максимума, разделяющего ямы барьера, и т.п. И в том, и в другом случае наряду с симметричными моделями существуют разнообразные несимметричные, а также периодические потенциалы.

Аналогия может прослеживаться во многих аспектах, среди которых важное место занимает ввод в обиход новых понятий (квазиточнорешаемость, ассоциированное уравнение Шредингера, спин-координатное соответствие, безотражательность, конечнозонность, псевдочастицы и пр.)

Далее, в обоих случаях открытие точных решений явилось побочным результатом основных исследований — разработки новых методов в теории спиновых и солитонных систем. Солитонный бум в значительной степени эксплуатировал квантовую теорию, но его достижения остались в основном в трудах по солитонике и не перешли еще в монографии по квантовой механике и ее приложениям (см., однако, [16]). Та же ситуация сложилась и в отношении проблемы квазиточнорешаемых задач и новых подходов в теории спиновых систем, хотя здесь речь идет главным образом о связи между двумя разделами самой квантовой механики. В проблеме квазиточнорешаемых задач все большую долю забирает себе математическая физика и чистая математика [8,9], как было и в теории солитонов.

Таким образом, между двумя совершенно различными системами, поставляющими в квантовую теорию модели с точными решениями, имеется целый ряд соответствий. По-видимому, еще предстоит выяснить вопрос о том, является ли это чисто внешней аналогией, или за этим скрыто глубокое структурное сходство.

5. Заключение

Цель статьи будет достигнута, если нам удалось, хотя бы частично, разъяснить ... новые и недостаточно привычные идеи...

И. М. Лифшиц

Таким образом, мы кратко проследили за появлением новых квантовых задач с точными решениями, источником которых явились системы различной природы — спиновые и солитонные. Они существенно обогатили множество моделей потенциалов с простыми явными аналитическими формулами для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний в квантовой механике. Специфика новых классов точных решений состоит прежде всего в разнообразии профилей потенциалов.

Еще предстоит осознать многие аспекты новой ситуации в проблеме точных решений (квазиточнорешаемость, спин-солитонная аналогия, структурные превращения в зонах спиновых моделей и др.) и обобщить полученные результаты, в частности на основе более сложных спиновых и солитонных систем.

Отличительная особенность рассматриваемых моделей — физический смысл уже при своем появлении, поскольку они явились не плодом математических преобразований, а результатом исследования конкретных систем, в частности спиновых и солитонных.

В заключение отметим, что в настоящее время квантовые задачи с точными решениями — активное, бурно развивающееся направление.

Авторы чрезвычайно признательны за возможность опубликовать этот материал в выпуске журнала, посвященном выдающемуся ученому и прекрасному человеку И. М. Лифшицу. Данная работа выполнена представителями трех поколений физиков-теоретиков его школы.

Выражаем глубокую благодарность В. М. Цукернику, вместе с которым были сделаны наши первые шаги в разработке новых методов теории спиновых систем.

1. И. М. Лифшиц, *Избранные труды. Физика реальных кристаллов и неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1987).
2. И. М. Лифшиц, *Избранные труды. Электронная теория металлов. Физика полимеров и биополимеров*, Наука, Москва (1994).
3. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
4. V. V. Ulyanov and O. B. Zaslavskii, *Phys. Rept.* **216**, 179 (1992).

5. В. Г. Багров, Д. М. Гитман, И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Шаповалов, *Точные решения релятивистских волновых уравнений*, Наука, Новосибирск (1982).
6. И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*, Наука, Москва (1976).
7. О. Б. Заславский, В. В. Ульянов, В. М. Цукерник, *ФНТ* **9**, 511 (1983).
8. A. V. Turbiner, *Commun. Math. Phys.* **118**, 467 (1988); *Contemp. Math.* **160**, 263 (1994).
9. А. Г. Ушверидзе, *ЭЧАЯ* **20**, 1185 (1989).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
11. З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, Мир, Москва (1974).
12. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, Наука, Москва (1981).
13. В. В. Ульянов, *Задачи по квантовой механике и квантовой статистике*, Высшая школа, Харьков (1980).
14. В. В. Ульянов, *Интегральные методы в квантовой механике*, Высшая школа, Харьков (1982).
15. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, Москва (1987).
16. В. В. Ульянов, *Методы квантовой кинетики*, Высшая школа, Харьков (1987).
17. О. Б. Заславский, В. В. Ульянов, *ЖЭТФ* **87**, 1724 (1984).
18. О. Б. Заславский, В. В. Ульянов, *ТМФ* **71**, 260 (1987).
19. S. I. Chan, D. Stelman, and L. E. Thompson, *J. Chem. Phys.* **41**, 2828 (1964).
20. I. Kay and H. E. Moses, *J. Appl. Phys.* **27**, 1503 (1956).
21. M. A. Shifman and A. V. Turbiner, *Commun. Math. Phys.* **126**, 347 (1989).
22. O. B. Zaslavskii, *Phys. Lett.* **A190**, 373 (1994).
23. O. B. Zaslavskii, *J. Phys.* **A27**, L447 (1994).

New exact solutions of Schrödinger equation with potentials of spin and soliton origin

V. V. Ulyanov,
O. B. Zaslavskii, and J. V. Vasilevskaya

New classes of exact solutions of the Schrödinger equation are considered which involve simple explicit analytic expressions for potential fields, energy levels and wave functions of stationary states. They are derived with the use of new methods elaborated in the quantum theory of spin systems. Corresponding effective potentials are compared with similar models of a soliton origin. The most attention is given to new unusual phenomena (quasi-exact solvability, potentials with flexible profiles, fourth-order extrema, finite-band spectra and structural transformations in energy bands, spin-soliton analogy).