УДК 517.928

ЛІНІЙНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З КРАТНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

І. Г. Ключник

Кіровоград. держ. пед. ун-т ім. В. Винниченка
Україна, 25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1
e-mail: Klyuchnyk.I@mail.ru

Using a transformation matrix, a differential system with a small parameter at the partial derivatives terms and a multiple turning point is asymptotically reduced to an integrable system.

С помощью матрицы преобразования система дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных с кратной точкой поворота асимптотически приводится к интегрируемой системе уравнений.

У роботах [1 – 9] запропоновано методи формального спрощення для сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з кратною точкою звороту. Лінійну систему диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту першого порядку вперше розглянуто в [10], де запропоновано асимптотичний метод її інтегрування. В [11] розроблено асимптотичний метод інтегрування системи лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних $(p+2)$-го порядку, яка містить кратну точку звороту. У [12] для системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з лінійним відхиленням аргументу і точкою звороту одержано умови, при яких її розв'язки є розв'язками сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з малим параметром без відхилення аргументу. При цьому передбачається, що матриці заданої системи диференціальних рівнянь мають асимптотичні розвинення при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ з коефіцієнтами, голоморфними при $|x| \leq x_0$. За допомогою отриманої системи доведено існування і нескінченну диференційовність розв'язків початкової системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних і лінійним відхиленням аргументу за наявності точки звороту.

У даній статті будемо розглядати систему лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з кратною точкою звороту $(p+m)$-го порядку, $m > 2$, для якої одержано асимптотичний метод інтегрування.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y + A_1(x)y_1, \\ \varepsilon y_1' &= (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \end{aligned} \tag{1}$$

де $y \in R^p$, $y_1 \in R^m$, m — парне додатне число, $A(x)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ — матриці відповідних порядків, голоморфні при

$$|x| \leq x_0, \tag{2}$$

$B(x)$ — матриця вигляду

$$B(x) = x^q I_1 + N, \tag{3}$$

де $q \geq 2$ — ціле число, таке, що ql не ділиться на $m, l = \overline{1, m-1}$; I_1 — $(m \times m)$-матриця з єдиним ненульовим елементом $\{I_1\}_{m1} = 1$, N — нільпотентна клітина Жордана. Будемо вважати, що

$$\operatorname{tr} B_1(x) = \operatorname{tr} A(x) \equiv 0. \tag{4}$$

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) зведемо до вигляду

$$u' = \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_i(\varepsilon)\, x^i \right) v, \tag{5}$$

$$\varepsilon v' = (B(x) + \varepsilon B_3(x,\varepsilon))\; v + \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{q-1} D_i(\varepsilon) x^i \right) u, \tag{6}$$

де

$$\Phi(x,\varepsilon) = \left(\begin{array}{cc} U(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x) & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x) \end{array} \right), \tag{7}$$

$$C_i(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_{in}, \quad D_i(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n D_{in}, \quad B_3(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{3n}(x) \varepsilon^n, \tag{8}$$

$C_{in}, D_{in}, B_{3n}(x)$ — матриці розмірностей $p \times m$, $m \times p$, $m \times m$ відповідно, ненульові елементи яких визначаються з рівностей $c_{ijn} = \{C_{in}\}_{j1}$, $d_{ijn} = \{D_{in}\}_{1j}$, $b_{nr}(x) = \{B_{3n}(x)\}_{m,r}$, $j = \overline{1,p}$, $r = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{0, q-1}$.

З (1), (5), (6) випливає, що $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\varepsilon \Phi' + \Phi \left(\begin{array}{cc} 0 & \varepsilon \left(\sum\limits_{i=0}^{q-1} C_i(\varepsilon) x^i \right) \\ \varepsilon \left(\sum\limits_{i=0}^{q-1} D_i(\varepsilon) x^i \right) & B(x) + \varepsilon B_3(x,\varepsilon) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \varepsilon A(x) & \varepsilon A_1(x) \\ \varepsilon B_2(x) & B(x) + \varepsilon B_1(x) \end{pmatrix} \Phi. \tag{9}$$

Підставляючи (7) у (9), отримуємо таку систему рівнянь для коефіцієнтів розвинень (7):

$$U'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n'(x) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x) \right) \left(\sum_{i=0}^{q-1} D_i(\varepsilon) x^i \right) =$$

$$= A(x) U(x) + A(x) \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x) + A_1(x) \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}'(x)+U(x)\sum_{i=0}^{q-1}C_i(\varepsilon)x^i+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{q-1}C_i(\varepsilon)x^i\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}V_{n1}'(x)B(x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x)B_3(x,\varepsilon)=A(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x)+A_1(x)V(x)+A_1(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x), \tag{10}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}'(x)+V(x)\sum_{i=0}^{q-1}D_i(\varepsilon)x^i+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{q-1}D_i(\varepsilon)x^i\right)=$$
$$=B_2(x)U(x)+B_2(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x)+B(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}U_{n1}(x)+B_1(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x),$$

$$\varepsilon V'(x)+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n'(x)+\varepsilon\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{q-1}C_i(\varepsilon)x^i\right)+$$
$$+V(x)B(x)+\varepsilon V(x)B_3(x,\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)B(x)+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)B_3(x,\varepsilon)=$$
$$=\varepsilon B_2(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x)+B(x)V(x)+\varepsilon B_1(x)V(x)+$$
$$+B(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)+\varepsilon B_1(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x).$$

Зрівнюючи в (10) коефіцієнти при нульовому степені ε і враховуючи (8), маємо

$$U'(x)=A(x)U(x), \tag{11}$$

$$U(x)\sum_{i=0}^{q-1}C_{i0}(\varepsilon)x^i+V_{11}(x)B(x)=A_1(x)V(x), \tag{12}$$

$$V(x)\sum_{i=0}^{q-1}D_{i0}(\varepsilon)x^i=B_2(x)U(x)+B(x)U_{11}(x), \tag{13}$$

$$V(x)B(x)=B(x)V(x). \tag{14}$$

Із рівнянь (11) і (14) знаходимо

$$U(x)=\Omega_0^x(A(x)),\quad V(x)=q_{0m}(x)I+\sum_{r=1}^{m-1}q_{0r}(x)B^{m-r}(x), \tag{15}$$

де $\Omega_0^x(A(x))$ — матрицант рівняння (11), $q_{0i}(x), i = \overline{1,m},$ — довільні голоморфні в області (2) функції, I — одинична матриця.

Для визначення $q_{0i}(x), i = \overline{1,m},$ використаємо систему рівнянь, що одержується з (10) в результаті прирівнювання коефіцієнтів при першому степені ε :

$$U_1'(x) + V_{11}(x)\sum_{i=0}^{q-1} D_{i0}(\varepsilon)x^i = A(x)U_1(x) + A_1(x)U_{11}(x), \tag{16}$$

$$V_{11}'(x) + U(x)\sum_{i=0}^{q-1} C_{i1}(\varepsilon)x^i + U_1(x)\sum_{i=0}^{q-1} C_{i0}(\varepsilon)x^i + V_{21}(x)B(x)+$$
$$+ V_{11}(x)B_{30}(x) = A(x)V_{11}(x) + A_1(x)V_1(x), \tag{17}$$

$$U_{11}'(x) + V(x)\sum_{i=0}^{q-1} D_{i1}(\varepsilon)x^i + V_1(x)\sum_{i=0}^{q-1} D_{i0}(\varepsilon)x^i =$$
$$= B_2(x)U_1(x) + B(x)U_{21}(x) + B_1(x)U_{11}, \tag{18}$$

$$V'(x) + V(x)B_{30}(x) + V_1(x)B(x) = B_1(x)V(x) + B(x)V_1(x). \tag{19}$$

Для існування розв'язку рівняння (19) необхідно і достатньо виконання умов

$$\mathrm{tr}\,((V'(x) + V(x)B_{30}(x) - B_1(x)V(x))B^k(x)) \equiv 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{20}$$

де $B^0 = I$. Підставляючи в умови (20) функції $V(x)$ і $V'(x)$ з (15) і враховуючи співвідношення

$$\mathrm{tr}\,((B^{n-r}(x))'B^k(x)) = (n-r)\mathrm{tr}\,(B^{n-r-1+k}(x)B'(x)),$$

маємо

$$q_{0m}'(x)\,\mathrm{tr}\,B^k(x) + \sum_{r=1}^{m-1} \mathrm{tr}\,B^{m-r+k}(x)q_{0r}'(x) = q_{0m}(x)tr(B_1(x)B^k(x))+$$
$$+\sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)\,\mathrm{tr}\,(B_1(x)B^{m-r+k}(x)) - (q_{0m}(x)\,\mathrm{tr}\,(B_{30}(x)B^k(x))+$$
$$+\sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)\,\mathrm{tr}\,(B^{m-r}(x)B_{30}(x)B^k(x))+$$
$$+\sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)(m-r)\,\mathrm{tr}\,(B^{m-r-1+k}(x)B'(x))), \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{21}$$

Можна довести виконання наступних співвідношень:

$$\operatorname{tr} B^j(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 1 \le j \le m-1, \\ mx^q, & \text{якщо} \quad j = m, \\ 0, & \text{якщо} \quad m < j \le 2m-2, \end{cases} \tag{22}$$

$$\operatorname{tr}(B^j(x)B'(x)) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 1 \le j \le m-2, \\ qx^{q-1}, & \text{якщо} \quad j = m-1, \\ 0, & \text{якщо} \quad m \le j \le 2m-2, \end{cases} \tag{23}$$

$$\operatorname{tr}(B_{30}(x)B^j(x)) = \begin{cases} b_{0,m-j}, & \text{якщо} \quad 0 \le j \le m-1, \\ x^q b_{0,m}, & \text{якщо} \quad j = m, \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{tr}(B^r(x)B_{30}(x)B^k(x)) = \operatorname{tr}(B_{30}(x)B^{r+k}(x)), \quad r,k = \overline{0, m-1}, \\ \operatorname{tr}(B_{30}(x)B^{m+j}(x)) = x^q \operatorname{tr}(B_{30}(x)B^j(x)), \quad j = \overline{0, m-2}, \\ \operatorname{tr}(B_1(x)B^{m+i}(x)) = x^q \operatorname{tr}(B_1(x)B^i(x)), \quad i = \overline{0, m-2}. \end{gathered} \tag{25}$$

Враховуючи співвідношення (22), умови (21) запишемо у вигляді матричного рівняння

$$S(x)q_0'(x) = T(x)q_0(x), \tag{26}$$

де $q_0(x)$ — m-вимірний вектор з елементами $q_{0i}(x)$, $i = \overline{1, m}$, а ненульові елементи матриці $S(x)$ і елементи матриці $T(x)$ визначаються за формулами

$$\{S(x)\}_{21} = \{S(x)\}_{32} = \ldots = \{S(x)\}_{m,m-1} = mx^q, \quad \{S(x)\}_{1m} = m,$$

$$\{T(x)\}_{kr} = \operatorname{tr}((m-r)B_0^{m-r+k-2}(x)B_0'(x) - B_0^{m-r}(x)B_{30}(x)B_0^{k-1}(x) + B_1(x)B_0^{m-r+k-1}(x)),$$

$$k = \overline{1, m}, \quad r = \overline{1, m}.$$

Помноживши обидві частини рівняння (26) зліва на матрицю $B(x)$ і використавши співвідношення (23) – (25), дістанемо

$$B(x)S(x)q_0'(x) = B(x)T(x)q_0(x),$$

де

$$B(x)S(x) = mx^q I, \tag{27}$$

$$B(x)T(x) = \begin{pmatrix} -(m-1)qx^{q-1} & a_{m-1}(x) - b_{01}(x) & \ldots & a_1(x) - b_{0,m-1}(x) \\ x^q(a_1(x) - b_{0,m-1}(x)) & -(m-2)qx^{q-1} & \ldots & a_2(x) - b_{0,m-2}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ x^q(a_{m-2}(x) - b_{02}(x)) & x^q(a_{m-3}(x) - b_{03}(x)) & \ldots & a_{m-1}(x) - b_{01}(x) \\ x^q(a_{m-1}(x) - b_{01}(x)) & x^q(a_{m-2}(x) - b_{02}(x)) & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_j(x) = \operatorname{tr}(B_1(x)B'(x)), \quad j = \overline{0, m-1}, \qquad b_{0i} = \{B_{30}(x)\}_{mi}, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Покладемо

$$b_{0i}(x) = \sum_{r=0}^{q-2} b_{0ir}x^r, \quad i = \overline{1, m-1},$$

де $b_{0i0} = a_{m-i}(0), b_{0ir} = \dfrac{a_{m-i}^{(r)}(0)}{r!}, r = \overline{1, q-2}, i = \overline{1, m-1}, a_{m-1}^{(r)}(0)$ — r-та похідна функції $a_{m-i}(x)$ у точці $x = 0$. Тоді одержимо

$$a_{m-i}(x) - b_{0i}(x) = x^{q-1}k_i(x), \quad i = \overline{1, m-1}, \quad k_i(x) = \sum_{r=q-1}^{\infty} x^{r-q+1}\frac{a_{m-i}^{(r)}(0)}{r!}. \tag{28}$$

Врахувавши (27) і (28), рівняння (26) запишемо у вигляді

$$xq_0'(x) = H(x)q_0(x), \tag{29}$$

де $H(x) = \dfrac{1}{m}B(x)T(x)$. Згідно з (28) матриця $H(x)$ має вигляд

$$H(x) = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -(m-1)q & k_1(x) & \ldots & k_{m-2}(x) & k_{m-1}(x) \\ xk_{m-1}(x) & -(m-2)q & \ldots & k_{m-3}(x) & k_{m-2}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ xk_2(x) & xk_3(x) & \ldots & -q & k_1(x) \\ xk_1(x) & xk_2(x) & \ldots & xk_{m-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Із (30) випливає, що матриця $H(0)$ має власні значення $\lambda_i = -\dfrac{(m-i)q}{m}, i = \overline{1, m}$. Оскільки $q(m-i)$ не ділиться на m, то з [1] випливає, що система (29) має ненульовий голоморфний в області (2) розв'язок, який залежить від значень $q_{0m}(0)$. Поклавши $q_{0m}(0) = 1$, однозначно визначимо розв'язок $q_0(x)$ рівняння (29). Підставивши знайдену функцію $V(x)$ у вигляді (15) у рівняння (12), (13), одержимо рівняння для визначення C_{i0}, D_{i0}, $i = \overline{0, q-1}, U_{11}(x), V_{11}(x)$. Помноживши обидві частини (12) справа на матрицю $B^{m-1}(x)$, а (13) зліва на $B^{m-1}(x)$, дістанемо

$$x^q V_{11}(x) = F(x), \quad x^q U_{11}(x) = G(x), \tag{31}$$

де

$$F(x) = A_1(x)V(x)B(x) - U(x)\left(\sum_{i=0}^{q-1} C_{i0}x^i\right)B(x),$$

$$G(x) = B(x)V(x)\sum_{i=0}^{q-1} D_{i0}x^i - B(x)B_2(x)U(x).$$

Матрицю C_{00} будемо знаходити з рівності $F(0) = 0$, з якої випливає, що

$$C_{00}B(0) = A_1(0)V(0)B(0).$$

З покоординатного запису останнього рівняння знайдемо

$$\{C_{00}\}_{j1} = \{A_1(0)V(0)\}_{j1}, \quad \{C_{00}\}_{jn} = 0, \quad j = \overline{1,p}, \quad n = \overline{2,m}.$$

З явного вигляду матриці $F(x)$ знайдемо i-ту похідну матриці $F(x)$ у вигляді

$$\frac{d^i F(x)}{dx^i} = (A_1(x)V(x))^{(i)}B(x) + \sum_{k=0}^{i-1} C_i^k (A_1(x)V(x))^{(k)} B^{(i-k)}(x) -$$
$$- \left(\sum_{j=0}^{q-1} x^j U(x) C_{j0}\right)^{(i)} B(x) - \sum_{k=0}^{i-1} C_i^k \left(\sum_{j=0}^{q-1} x^j U(x) C_{j0}\right)^{(k)} B^{(i-k)}(x), \qquad (32)$$

де $B^{(k)}(x)$ — k-та похідна матриці $B(x)$, C_i^k — число сполук з i елементів по k. Записавши i-ту похідну добутку степеневої функції і матриці $U(x)$ та виконавши перенумерування, а потім згрупувавши доданки при x^j : окремо при $j = \overline{0, q-1-i}$ і $j = \overline{q-i, q-1}$, одержимо

$$\left(\sum_{j=0}^{q-1} x^j U(x) C_{j0}\right)^{(i)} = \sum_{j=0}^{q-1} x^j U^{(i)}(x) C_{j0} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{i} \left(\sum_{j=k}^{q-1} C_i^k j(j-1)\ldots(j-k+1) x^{j-k} U^{(i-k)}(x) C_{j0}\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{q-1} x^j U^{(i)}(x) C_{j0} + \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=0}^{q-1-k} C_i^k (j+k)(j+k-1)\ldots(j+1) x^j U^{(i-k)}(x) C_{j+k,0} =$$
$$= \sum_{j=0}^{q-1-i} \left(U^{(i)}(x) C_{j0} + \sum_{k=1}^{i} C_i^k (j+k)(j+k-1)\ldots(j+1) U^{(i-k)}(x) C_{j+k,0}\right) x^j +$$
$$+ \sum_{s=0}^{i-1} x^{q-i+s} \left(U^{(i)}(x) C_{q-i+s,0} + \sum_{k=1}^{i-1-s} C_i^k (q-i+s+k)(q-i+s+k-1) \times \ldots\right.$$
$$\left. \ldots \times (q-i+s+1) U^{(i-k)}(x) C_{q-i+s+k,0}\right).$$

Підставивши знайдену похідну в (32) і поклавши в одержаній рівності $x = 0$, а також використавши те, що $B^{(s)}(0) = 0$ при $s \geq 1$, дістанемо

$$\frac{d^i F(0)}{dx^i} = i! \left(\frac{d^i (A_1(x)V(x))}{dx^i}\Big|_{x=0} B(0) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)!} U^{(i-k)}(0) C_{k0} B(0) - U(0) C_{i0} B(0)\right).$$

Матриці C_{i0}, $i = \overline{1, q-1}$, будемо знаходити з рівності $\dfrac{d^i F(0)}{dx^i} = 0$. Використавши значення $\dfrac{d^i F(0)}{dx^i}$, будемо мати

$$C_{i0}B(0) = \left.\frac{d^i(A_1(x)V(x))}{dx^i}\right|_{x=0} B(0) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)!} U^{(i-k)}(0) C_{k0} B(0).$$

З покоординатного запису останнього рівняння знайдемо C_{i0}, $i = \overline{1, q-1}$:

$$\{C_{i0}\}_{j1} = \left\{ \frac{d^i(A_1(x)V(x))}{dx^i}|_{x=0} - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)!} U^{(i-k)}(x) C_{k0} \right\}_{j1},$$

$$\{C_{i0}\}_{jn} = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad n = \overline{2, m}.$$

Матриці D_{00}, D_{i0}, $i = \overline{1, \beta - 1}$, будемо знаходити відповідно з рівностей $G(0) = 0$, $\dfrac{d^i G(0)}{dx^i} = 0$. Використавши явний вигляд матриці $G(x)$ і знайшовши $\dfrac{d^i G(0)}{dx^i}$, одержимо рівняння

$$B(0)V(0)D_{00} = B(0)B_2(0)U(0),$$

$$B(0)D_{i0} = B(0) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)!} V^{(i-k)}(0) D_{k0} - B(0) \left.\frac{d^i(B_2(x)U(x))}{dx^i}\right|_{x=0},$$

з покоординатного запису яких дістанемо D_{i0}, $i = \overline{0, q-1}$:

$$\{D_{00}\}_{mj} = \{B_2(0)U(0)\}_{mj}, \quad \{D_{00}\}_{nj} = 0,$$

$$\{D_{i0}\}_{mj} = \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)!} V^{(i-k)}(0) D_{k0} - \left.\frac{d^i(B_2(x)U(x))}{dx^i}\right|_{x=0} \right\}_{mj},$$

$$\{D_{i0}\}_{nj} = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad n = \overline{1, m-1}.$$

Завдяки вибору C_{i0}, D_{i0}, $i = \overline{0, q-1}$, матриці $F(x)$ і $G(x)$ можна подати у вигляді

$$F(x) = x^q \widetilde{F}(x), \quad G(x) = x^q \widetilde{G}(x),$$

де $\widetilde{F}(x) = \sum_{k=q}^{\infty} \dfrac{F^{(k)}(0)}{k!} x^{k-q}$, $\widetilde{G}(x) = \sum_{k=q}^{\infty} \dfrac{G^{(k)}(0)}{k!} x^{k-q}$. Тоді з рівнянь (31) знайдемо

$$V_{11}(x) = \widetilde{F}(x), \quad U_{11}(x) = \widetilde{G}(x).$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що знайдені з рівнянь (31) матриці $C_{i0}, D_{i0}, V_{11}(x), U_{11}(x), i = \overline{0, q-1}$, є розв'язками рівнянь (12), (13).

Таким чином, знайдено коефіцієнти розвинень (7), (8) при ε в нульовому степені.

Для знаходження коефіцієнтів розвинень (7), (8) при ε у першому степені маємо систему рівнянь (16) – (19). З рівняння (16), поклавши $U_1(0) = 0$, знайдемо матрицю $U_1(x)$ у вигляді

$$U_1(x) = \int\limits_0^x \Omega_t^x(A(t)) \left(A_1(t)U_{11}(t) - V_{11}(t) \sum_{i=0}^{q-1} D_{i0}t^i \right) dt. \tag{33}$$

Запишемо рівняння (19) у вигляді

$$B(x)V_1(x) - V_1(x)B(x) = F_1(x), \tag{34}$$

де $F_1(x) = V'(x) + V(x)B_{30}(x) - B_1(x)V(x)$, $\operatorname{tr} F_1(x) \equiv 0$, $\operatorname{tr} F_1(x)B(x) \equiv 0$.

Загальний розв'язок цього рівняння визначається за формулою

$$V_1(x) = q_{1m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{1r}(x)B^{m-r}(x) + W_1(x), \tag{35}$$

де $W_1(x)$ — його частинний розв'язок.

Зрівнюючи коефіцієнти в останньому рівнянні (10) при другому степені параметра ε, отримуємо

$$B(x)V_2(x) - V_2(x)B(x) = V_1'(x) - B_1(x)V_1(x) + (V(x)B_{31}(x) + F_2(x)), \tag{36}$$

де $F_2(x) = U_{11}(x)\sum_{i=0}^{q-1} C_{i0}x^i + V_1(x)B_{30}(x) - B_2(x)V_{11}(x)$.

З умови існування розв'язку рівняння (36)

$$\operatorname{tr}((V_1'(x) - B_1(x)V_1(x))B^k(x)) = -\operatorname{tr}((V(x)B_{31}(x) + F_2(x))B^k(x)), \quad k = \overline{0, m-1},$$

маємо систему рівнянь для визначення $q_{1i}(x)$, $i = \overline{1, m}$:

$$S(x)q_1'(x) = T(x)q_1(x) + f(x), \tag{37}$$

де $q_1(x)$ — m-вимірний вектор з компонентами $q_{1i}(x)$, $i = \overline{1, m}$, а компоненти вектора $f(x)$ визначаються за формулами $\{f(x)\}_k = f_{k-1}(x) - \operatorname{tr}(V(x)B_{31}(x)B^{k-1}(x))$, $f_{k-1}(x) = -\operatorname{tr}(W_1(x)B^{k-1}(x)) + \operatorname{tr}(B_1(x)W_1(x)B^{k-1}(x)) - \operatorname{tr}(F_2(x)B^{k-1}(x))$, $k = \overline{1, m}$.

Завдяки голоморфності $f_{k-1}(x)$, $q_{0i}(x)$ і вибору $q_{0m}(0) = 1$ ці функції можна подати у вигляді

$$f_{k-1}(x) = \sum_{s=0}^{q-2} \frac{f_{k-1}^{(s)}(0)}{s!} x^s + x^{q-1}\widetilde{f}_{k-1}(x), \quad k = \overline{1, m},$$

$$q_{0m}(x) = 1 + \sum_{s=1}^{q-2} \frac{q_{0m}^{(s)}(0)}{s!} + x^{q-1}\widetilde{q}_{0m}(x), \tag{38}$$

$$q_{0i}(x) = \sum_{s=0}^{q-2} \frac{q_{0i}^{(s)}(0)}{s!} + x^{q-1}\widetilde{q}_{0i}(x), \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Використавши співвідношення

$$\operatorname{tr}(V(x)B_{31}(x)B^j(x)) = \sum_{s=1}^{m-j} b_{1s}(x)q_{0,s+j}(x) + x^q \sum_{s=m-j+1}^{m-1} b_{1s}(x)q_{0,s-m+j}(x), \quad j = \overline{0, m-1,}$$

компоненти вектора $f(x)$ запишемо таким чином:

$$\{f(x)\}_k = f_{k-1}(x) - \sum_{s=1}^{m-k} b_{1s}(x)q_{0,s+k-1}(x) - b_{1,m-k+1}(x)q_{0m}(x) -$$

$$- x^q \sum_{s=m-k+2}^{m-1} b_{1s}(x)q_{0,s-m+k-1}(x), \quad k = \overline{1, m}. \tag{39}$$

Покладемо

$$b_{1,m-k+1}(x) = \sum_{i=0}^{q-2} x^i b_{1,m-k+1,i}, \quad k = \overline{2, m}, \tag{40}$$

де $b_{1,m-k+1,i}$, $k = \overline{2, m}$, $i = \overline{0, q-2}$, визначаються за формулами

$$b_{1,m-k+1,i} = \frac{f_{k-1}^{(i)}(0)}{i!} - \sum_{r=0}^{i-1} \frac{q_{0m}^{(i-r)}(0)b_{1,m-k+1,r}}{(i-r)!} -$$

$$- \sum_{s=1}^{m-k} \left(\sum_{r=0}^{i} \frac{q^{(i-r)_{0,s+k-1}}(0)b_{1sr}}{(i-r)!} \right), \quad k = \overline{2, m}, \quad i = \overline{0, q-2}. \tag{41}$$

Підставляючи (38), (40) у (39), а потім використовуючи (41), одержуємо рівність

$$\{f(x)\}_k = x^{q-1}\widetilde{s}_k(x), \quad k = \overline{2, m}, \tag{42}$$

де

$$\widetilde{s}_k(x) = \widetilde{f}_{k-1}(x) - \sum_{s=1}^{m-k+1} \left(\sum_{r=1}^{q-2} \sum_{n=r}^{q-2} \left(\frac{q_{0,s+k-1}^{(n)}(0)b_{1,s,q-r-n}}{n!} \right) + \widetilde{q}_{0,s+k-1}(x)b_{1s}(x) \right), \quad k = \overline{2, m}.$$

Домножаючи систему (37) зліва на матрицю $B(x)$ і враховуючи (42), маємо

$$xq_1'(x) = H(x)q_1(x) + \widetilde{F}^{(1)}(x), \tag{43}$$

де $\widetilde{F}^{(1)}(x)$ — голоморфна вектор-функція, елементи якої

$$\{\widetilde{F}^{(1)}(x)\}_i = \widetilde{s}_{i+1}(x), \quad \{\widetilde{F}^{(1)}(x)\}_m = x\{f(x)\}_1, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Система рівнянь (43) має голоморфний розв'язок в області (2) такий, що $q_{1m}(0) = 0$. Матриці $V_{21}(x)$, $U_{21}(x)$, C_{i1}, D_{i1}, $i = \overline{0, q-1}$, однозначно визначаються з рівнянь (17) і (18), якщо в них підставити знайдені функції $U_1(x)$, $V_1(x)$ з формул (33), (35).

Можна довести, що за вказаним алгоритмом однозначно визначаються довільні коефіцієнти розвинень (7), (8) і коефіцієнти розвинень (7) є голоморфними функціями в області (2).

Розглянемо (7) при $\varepsilon = 0$. Враховуючи явний вигляд (15) матриці $V(x)$, приходимо до висновку, що похідна від визначника цієї матриці має вигляд $(\det V(x))' = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{I}_j$, де $\widetilde{I}_j$ — визначник матриці $V(x)$, по j-му рядку якого взято похідну.

Запишемо рівняння (26) покоординатно:

$$\begin{gathered} mq'_{0m}(x) = x^{q-1} \sum_{r=1}^{m-1} k_{m-r}(x) q_{0,r}(x), \\ mx^q q'_{0,j-1}(x) = x^{q-1} \left(x^q \sum_{r=1}^{j-2} x k_{j-r-1}(x) q_{0r}(x) + \sum_{r=j}^{m} k_{m-r+j-1}(x) q_{0,r}(x) \right) + \\ + x^{q-1}(x a_0(x) - (m-j+1)q) q_{0,j-1}(x), \quad j = \overline{2, m}. \end{gathered} \tag{44}$$

В одержаних визначниках $\widetilde{I}_j$ виконаємо наступні перетворення при $x \neq 0$. А саме, у визначнику $\widetilde{I}_j$, $j = \overline{1, m-1}$, j-й рядок помножимо на mx і скористаємося (44). В одержаному визначнику i-й рядок при $i = \overline{1, j-1}$ помножимо на $-x^q k_{j-i}(x)$, а i-й рядок при $i = \overline{j+1, m}$ — на $-k_{j+m-i}(x)$ і додамо до j-го рядка, а потім запишемо цей визначник у вигляді суми двох визначників. У визначнику $\widetilde{I}_m$ m-й рядок помножимо на m і скористаємося (44). В одержаному визначнику j-й рядок помножимо на $-x^{q-1}k_{m-j}(x)$, $j = \overline{1, m-1}$, і додамо до m-го рядка. В результаті дістанемо

$$\widetilde{I}_j = \frac{a_0(x)}{m} \det V(x) + \frac{1}{mx} \det L_j, \quad \widetilde{I}_m = \frac{a_0(x)}{m} \det V(x) + \frac{1}{m} \det L_m, \tag{45}$$

де

$$j = \overline{1, m-1}, \quad \{L_j\}_{ki} = \{V(x)\}_{ki}, \quad k = \overline{1, m}, \quad k \neq j,$$

$$\{L_j\}_{ji} = \begin{cases} (j-i) x q_{0,j-i}(x), & i = \overline{1, j}, \\ (j-i) q_{0,j+m-i}, & i = \overline{j+1, m}, \end{cases} \qquad \{L_m\}_{mi} = (m-i) q_{0,m-i}(x), \quad i = \overline{1, m}.$$

Підставивши (45) у $(\det V(x))'$ і врахувавши, що $\sum_{j=1}^{m} \det L_j = 0$, одержимо рівність $(\det V(x))' = (\operatorname{tr} B_1(x)) \det V(x)$. Таким чином, $\det \Phi_0(x) \equiv 1$ для кожного x з області (2).

За допомогою заміни $u = V(\varepsilon)\omega$ систему (5), (6) зводимо до вигляду

$$\omega'_1 = \sum_{i=0}^{q-1} c_{i1}(\varepsilon) x^i v_1, \quad \omega'_j = -\sum_{i=0}^{q-1} x^i \left(\sum_{k=0,\ k\neq i}^{q-1} \gamma_{kj}(\varepsilon) c_{i1}(\varepsilon) \right) v_1, \quad j = \overline{2, p}, \tag{46}$$

$$\varepsilon v' = (B_0(x) + \varepsilon B_3(x,\varepsilon))v + \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{q-1} D_i(\varepsilon) x^i \right) V(\varepsilon)\omega, \tag{47}$$

де $c_{ij} = \{C_i(\varepsilon)\}_{j1}$, $j = \overline{1,p}$; $V(\varepsilon)$ — $(p \times p)$-матриця з діагональними елементами, рівними одиниці, у якій $\{V(\varepsilon)\}_{j1} = \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_{ij}(\varepsilon)$, $j = \overline{2,p}$, $\gamma_{ij}(\varepsilon) = \dfrac{c_{ij}(\varepsilon)}{c_{i1}(\varepsilon)}$ за умови, що $c_{i1}(\varepsilon) \neq 0$.

Підсумовуючи наведені викладки, можемо сформулювати таку теорему.

Теорема. *Нехай матриці у правій частині системи рівнянь (1) голоморфні в області (2). Тоді існують формальні ряди (7), (8), коефіцієнти яких голоморфні в області (2), такі, що* $\det \Phi_0(x) \equiv 1$ *і формальне перетворення з матрицею заміни вигляду (7) приводить систему (1) до системи (46), (47).*

Розглянемо систему рівнянь (46), (47). Із (46) знаходимо

$$\omega_1 = \omega_1^{(0)} + \sum_{i=0}^{q-1} c_{i1}(\varepsilon) \int_0^x t^i v_1(t)\, dt, \tag{48}$$

$$\omega_j = \omega_j^{(0)} - \sum_{i=0}^{q-1} \left(\int_0^x t^i v_1(t)\, dt \right) \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{q-1} \gamma_{kj}(\varepsilon) c_{i1}(\varepsilon) \right), \quad j = \overline{2,p},$$

де $\omega_j^{(0)}$, $j = \overline{1,p}$, — довільні сталі.

Використовуючи зображення (8) для матриці $B_3(x,\varepsilon)$, явний вигляд $B_{3n}(x)$ та змінюючи порядок підсумовування, матрицю $B_3(x,\varepsilon)$ подамо у вигляді

$$B_3(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{q-2} B_{3i}(\varepsilon) x^i, \tag{49}$$

де $B_{3i}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_{3ni}$, $B_{3ni} = \dfrac{B_{3n}^{(i)}(0)}{i!}$, $i = \overline{0, q-2}$.

Підставляючи (48), (49) у (47), знаходимо

$$\varepsilon^m v_1^{(m)} = x^q v_1 + \sum_{s=1}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{q-2} \varepsilon^s x^i b_{si}(\varepsilon) v_1^{(s-1)} \right) + \varepsilon \sum_{i=0}^{q-1} \mu_i(\varepsilon) x^i +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j=0}^{q-1} \left(\sum_{i=0}^{q-1} m_i^{(j)}(\varepsilon) x^i \right) \int_0^x t^j v_1(t)\, dt, \tag{50}$$

де

$$b_{si}(\varepsilon) = \{B_{3i}(\varepsilon)\}_{ms}, \quad \tilde{d}_i(\varepsilon) = (d_i(\varepsilon), \quad d_{i2}(\varepsilon) \ldots d_{ip}(\varepsilon)), \quad d_{is}(\varepsilon) = \{D_i(\varepsilon)\}_{ms}, \quad s = \overline{1,p},$$

$$\omega^{(0)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0} \\ \dots \\ \omega_p^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \mu_i(\varepsilon) = \tilde{d}_i(\varepsilon)\omega^{(0)}, \quad d_i(\varepsilon) = d_{i1}(\varepsilon) + \sum_{s=2}^{p}\sum_{k=0}^{q-1}\gamma_{ks}(\varepsilon)d_{is}(\varepsilon),$$

$$m_i^{(j)}(\varepsilon) = c_{j1}(\varepsilon)\left(d_i(\varepsilon) - \sum_{s=2}^{p}\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{q-1}\gamma_{ks}(\varepsilon)\right)d_{is}(\varepsilon)\right), \quad i = \overline{0, q-1}, \quad j = \overline{0, q-1}.$$

Знайдемо частинний розв’язок рівняння (50), поклавши

$$v_1(0) = 0, v_1'(0) = 0, \dots, v_1^{(m-1)}(0) = 0. \tag{51}$$

Взявши $v_1(x)$ у вигляді степеневого ряду

$$v_1(x) = \sum_{n=m}^{\infty} v_n x^n, \tag{52}$$

для коефіцієнтів цього ряду одержимо рівняння

$$v_m = \frac{\lambda^{m-1}}{m!}, \quad v_{m+1} = \frac{\lambda^{m-1}}{(m+1)!}, \quad \lambda = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{53}$$

$$\begin{aligned} v_n = \frac{\lambda^m}{n(n-1)\dots(n-m+1)}\Bigg(&v_{n-m-q} + \varepsilon\mu_{n-m}(\varepsilon) + \varepsilon\sum_{j=0}^{n-m-1}\sum_{i=0}^{n-m-1}\frac{m_i^{(j)}(\varepsilon)v_{n-m-1-i-j}}{n-m-i} + \\ &+ \sum_{s=2}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-m}\varepsilon^s b_{si}(\varepsilon)v_{n-m+s-1-i}(n-m+s-1-i)\dots(n-m+1-i) + \\ &+ \varepsilon\sum_{i=0}^{n-m} b_{1i}(\varepsilon)v_{n-m-i}\Bigg), \quad n \geq m+2, \end{aligned} \tag{54}$$

де $\mu_i(\varepsilon) = 0$ при $i > q-1$, $b_{si}(\varepsilon) = 0$ при $i > q-2$, $m_i^{(j)} = 0$ при $j > q-1$ чи $i > q-1$.

Рівність (54) запишемо таким чином:

$$v_n = \sum_{j=2}^{n} A_n^j v_{n-j} + A_{n-m}\mu_{n-m}(\varepsilon), \quad n \geq m+2, \tag{55}$$

де

$$A_n^j = \frac{\lambda^{m-1}b_n^j(n-m)!}{n!}, \quad A_{n-m} = \frac{\lambda^{m-1}(n-m)!}{n!}, \tag{56}$$

$$b_n^j = b_{1,j-m}(\varepsilon) + \sum_{s=1}^{m-2} \varepsilon^s b_{s+1,j-m+s}(\varepsilon)(n-j)(n-j-1)\dots(n-j-(s-1)) + \sum_{l=0}^{n-m-1} \frac{m_{j-l-1-m}^{(l)}(\varepsilon)}{n-j+l+1}$$

при $j \neq m+q$ і $j = \overline{2,n}$,

$$b_n^{m+q} = \lambda + b_{1q}(\varepsilon) + \sum_{s=1}^{m-2} \varepsilon^s b_{s+1,q+s}(\varepsilon)(n-m-q)(n-m-q-1)\dots(n-m-q-(s-1)) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{n-m-1} \frac{m_{q-l-1}^{(l)}(\varepsilon)}{n+l+1-m-q}.$$

Використавши (51), (53), (55), виразимо v_n через v_m і v_{m+1}. Тоді

$$v_n = \sum_{s=0}^{1} \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-(m+s) \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} A_n^{j_1} A_{n-j_1}^{j_2} \dots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i} v_{m+s} +$$
$$+ \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-m \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} A_{j_1} \mu_{j_1}(\varepsilon) A_n^{j_2} \dots A_{n-j_2-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}. \tag{57}$$

Підставивши у (57) значення A_n^j, A_j, v_m, v_{m+1} з формул (53), (56), розв'язок (52) рівняння (50) одержимо у вигляді

$$v_1(x) = \frac{\lambda^{m-1} x^m}{m!} \left(1 + \frac{x}{m+1}\right) +$$
$$+ \sum_{n=m+2}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{1} \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-(m+s) \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} \frac{b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2} \dots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{(m+s)!n!} \times \right.$$
$$\times \frac{(n-m)!(n-m-j_1)!\dots(n-m-j_1-\ldots-j_{i-1})!\lambda^{(i+1)(m-1)}}{(n-j_1)!\dots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})!} +$$
$$+ \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-m \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} \frac{j_1! \mu_{j_1}(\varepsilon) b_n^{j_2} b_{n-j_2}^{j_3} \dots b_{n-j_2-\ldots-j_{i-1}}^{j_i} \lambda^{i(m-1)}}{(j_1+m)!n!} \times$$
$$\left. \times \frac{(n-m)!(n-m-j_2)!\dots(n-m-j_2-\ldots-j_{i-1})!}{(n-j_2)!\dots(n-j_2-\ldots-j_{i-1})!} \right) x^n. \tag{58}$$

Розглянемо однорідне рівняння

$$\varepsilon^m v_1^{(m)} = x^q v_1 + \sum_{s=1}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{q-2} \varepsilon^s x^i b_{si}(\varepsilon) v_1^{(s-1)} \right) + \varepsilon \sum_{j=0}^{q-1} \left(\sum_{i=0}^{q-1} m_i^{(j)}(\varepsilon) x^i \right) \int_0^x t^j v_1(t)\, dt. \tag{59}$$

Знайдемо m лінійно незалежних розв'язків цього рівняння: k-й лінійно незалежний розв'язок рівняння (59) шукаємо у вигляді ряду

$$v_1(x) = v_k x^k + \sum_{n=m}^{\infty} v_n x^n, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{60}$$

задаючи такі початкові умови:

$$v_1(0) = 0, v_1'(0) = 0, \ldots, v_1^{(k-1)}(0) = 0, v_1^{(k)}(0) = 1, v_1^{(k+1)}(0) = 0, \ldots, v_1^{(m-1)}(0) = 0, \tag{61}$$

$$k = \overline{0, m-1}.$$

Підставивши (60) у (59), для коефіцієнтів v_n ряду (60) одержимо рівняння

$$\begin{gathered} v_m = \frac{\lambda^{m-1} b_m^{m+k}}{m!}, \quad v_{m+1} = \frac{\lambda^{m-1} b_{m+1}^{m+1-k}}{(m+1)!}, \\ v_n = \sum_{j=2}^{n} A_n^j v_{n-j}, \quad n \geq m+2, \quad k = \overline{0, m-1}. \end{gathered} \tag{62}$$

З (62), (61) отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} v_n = \sum_{s=0}^{1} \sum_{i} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-(m+s) \\ j_1 \ldots j_i \geq 2}} A_n^{j_1} A_{n-j_1}^{j_2} \ldots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i} v_{m+s} + \\ + \sum_{i} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-k \\ j_1 \ldots j_{i-1} \geq 2 \\ j_i \geq m+2-k}} A_n^{j_1} A_{n-j_1}^{j_2} \ldots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}, \quad k = \overline{0, m-1}. \end{aligned} \tag{63}$$

Підставивши в (63) значення A_n^j, v_m, v_{m+1} з (56), (62), розв'язок (60) рівняння (59) дістанемо у вигляді

$$\begin{aligned} v_1(x) = \frac{x^k}{k!} + \frac{\lambda^{m-1} x^m}{m!} \left(b_m^{m-k} + \frac{b_{m+1}^{m+1-k} x}{m+1} \right) + \\ + \sum_{n=m+2}^{\infty} \Bigg(\sum_{s=0}^{1} \sum_{i} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-(m+s) \\ j_1 \ldots j_i \geq 2}} \frac{b_{m+s}^{m-k+s} b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2} \ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{(m+s)! n!} \times \\ \times \frac{(n-m)!(n-m-j_1)! \ldots (n-m-j_1-\ldots-j_{i-1})! \lambda^{(i+1)(m-1)}}{(n-j_1)! \ldots (n-j_1-\ldots-j_{i-1})!} + \end{aligned}$$

$$+\sum_{i}\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-k\\ j_1\ldots j_{i-1}\geq 2\\ j_i\geq m+2-k}}\frac{b_n^{j_1}b_{n-j_1}^{j_2}\ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}\lambda^{i(m-1)}}{n!}\times$$

$$\left.\times\frac{(n-m)!(n-m-j_1)!\ldots(n-m-j_1-\ldots-j_{i-1})!}{(n-j_1)!\ldots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})!}\right)x^n. \qquad (64)$$

Із розв'язків (58), (64) рівнянь (50), (59) при $k=\overline{0,m-1}$ отримаємо загальний розв'язок рівняння (50), а отже, і загальний розв'язок системи рівнянь (46), (47).

Таким чином, у даній статті запропоновано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду (1).

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
2. *Wasow W.* Linear turning point theory. — New York Ins.: Springer, 1985. — 243 p.
3. *Lee R. Y.* On uniform simplification of linear differential equation in a full neighborhood of a turning point // J. Math. Anal. and Appl. — 1969. — **27**. — P. 501–510.
4. *Hanson R. J.* Reduction theorems for systems of ordinary differential equations with a turning point // J. Math. Anal. and Appl. — 1966. — **16**. — P. 280–301.
5. *Hanson R. J., Russell D. L.* Classification and reduction of second order systems at a turning point // J. Math. and Phys. — 1967. — **46**. — P. 74–92.
6. *Sibuya Y.* Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point // Mem. Amer. Math. Soc. — 1974. — **149**. — P. 3–106.
7. *Kohno M., Ohkohchi S., Kohmoto T.* On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter // Hiroshima Math. J. — 1979. — **9**. — P. 747–767.
8. *Nishimoto T.* On an extension theorem and its application for turning point problems of large order // Kodai Math. Sem. Rep. — 1973. — **25**. — P. 458–489.
9. *Turritin H. L.* Stokes multipliers for asymptotic solutions of a central differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. — 1950. — **68**. — P. 304–329.
10. *Самойленко А. М.* Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1505–1516.
11. *Ключник І. Г.* Асимптотичні розв'язки системи диференціальних рівнянь з кратною точкою звороту // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1516–1530.
12. *Ключник І. Г., Завізіон Г. В.* Лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з відхиленням аргументу і точкою звороту // Укр. мат. вісн. — 2010. — **7**, № 3. — С. 331–354.

Одержано 20.04.11,
після доопрацювання — 04.11.11