УДК 517.983

РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Ф. Журавлев

Житомир. нац. агроэкол. ун-т
Украина, 10008, Житомир, бульв. Старый, 7
e-mail: vfz2008@ukr.net

We find a formula for a unique pseudoinverse operator to a normally solvable equation in a Hilbert space, as well as existence conditions and a representation of a single solution of the equation. We also introduce the notion of an operator that is one-sided pseudoinverse of a normally solvable operator acting on a Hilbert space. Methods for constructing such operators are also considered.

Отримано формулу для єдиного псевдооберненого оператора до нормально розв'язного, умови існування та зображення єдиного розв'язку нормально розв'язних рівнянь у гільбертових просторах. Введено поняття односторонньо псевдообернених операторів до нормально розв'язних, які діють у гільбертових просторах, розглянуто методи їх побудови.

Многие задачи теории обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений сводятся к операторным уравнениям $Lx = y$ с линейным ограниченным нормально разрешимым оператором L. Такая запись позволяет отвлечься от специфических и частных трудностей, присущих каждой конкретной задаче, применить к их анализу методы теории операторов и функционального анализа и сосредоточиться на изучении их общих закономерностей. В связи с этим возникают задачи построения обобщенно-обратных и псевдообратных операторов к нормально разрешимым в банаховых и гильбертовых пространствах.

Предварительные сведения. Пусть линейный ограниченный нормально разрешимый оператор L действует из вещественного гильбертова пространства $\mathbf{H}_1$ в вещественное гильбертово пространство $\mathbf{H}_2$, $L : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$. Известно [1, 2], что оператор $L^- : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_1$, удовлетворяющий свойствам

$$\begin{aligned} LL^-L &= L, \\ L^-LL^- &= L^-, \end{aligned} \tag{1}$$

называется обобщенно-обратным к оператору L.

Такой оператор определяется неоднозначно. Однако благодаря более совершенной геометрии гильбертовых пространств — наличию в них скалярного произведения и, как следствие, однозначного разложения их в прямые суммы ортогональных подпространств, изоморфности взаимно сопряженных пространств — удается получить более тонкие результаты по обобщенному обращению нормально разрешимых операторов в гильбертовых пространствах, а именно, из множества обобщенно-обратных операторов L^- к оператору L удается выделить единственный, являющийся псевдообратным [3 – 5].

Оператор $L^+ : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_1$, удовлетворяющий свойствам [3, 4]

$$\begin{aligned} &LL^+L = L, \\ &L^+LL^+ = L^+, \\ &(LL^+)^* = LL^+ = I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}, \\ &(L^+L)^* = L^+L = I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}, \end{aligned} \tag{2}$$

называется псевдообратным к оператору L по Муру–Пенроузу. Здесь $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \to N(L)$ и $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N(L^*)$ — ортопроекторы на нуль-пространства $N(L)$ и $N(L^*)$ операторов $L : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ и ему сопряженного $L^* : \mathbf{H}_2^* \to \mathbf{H}_1^*$ соответственно.

Известно [6], что пространство, сопряженное гильбертову, совпадает с ним с точностью до изоморфизма, т. е. $\mathbf{H}_1^* = \mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2^* = \mathbf{H}_2$. В [1, с. 139] показано, что поскольку нуль-пространство $N(L) \subset \mathbf{H}_1$ и образ $R(L) \subset \mathbf{H}_2$ оператора L замкнуты, а любое замкнутое подмножество гильбертова пространства дополняемо, то оператор L обобщенно обратим и существуют ортопроекторы $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \to N(L)$, $LP_{N(L)} = 0$ и $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N(L^*)$, $L^*P_{N(L^*)} = 0$, которые индуцируют разбиение $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ в прямые ортогональные суммы [7]

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}_1 = N(L) \oplus R(L^*), \\ &\mathbf{H}_2 = N(L^*) \oplus R(L), \end{aligned} \tag{3}$$

где $N(L) = P_{N(L)}\mathbf{H}_1$, $N(L^*) = P_{N(L^*)}\mathbf{H}_2$, $R(L) = (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L)})\mathbf{H}_2$, $R(L^*) = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\mathbf{H}_1$.

Постановка задачи. Рассмотрим вопрос об условиях существования и построения решений уравнения

$$Lx = y \tag{4}$$

с линейным ограниченным нормально разрешимым оператором $L : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$.

В работе ставятся следующие задачи. Построить односторонне псевдообратные операторы L_r^+ и L_l^+ и на их основе единственный псевдообратный оператор L^+. С использованием ортопроекторов и псевдообратного оператора L^+ установить критерий разрешимости и формулы для представления решений уравнений с линейным ограниченным нормально разрешимым оператором L.

Промежуточный результат. В условиях поставленной задачи для нуль-пространств $N(L)$ и $N(L^*)$ возможны три случая:

1. *Подпространство $N(L)$ линейно изоморфно подпространству $N_1(L^*) \subset N(L^*)$, $N(L) \cong N_1(L^*)$.*

Это значит, что существуют:

линейный ограниченный обратимый оператор $J_1 : N(L) \to N_1(L^*)$ такой, что $J_1 \times N(L) = N_1(L^*)$, $J_1^{-1}N_1(L^*) = N(L)$;

ортопроектор $P_{N_1(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_2$, разбивающий подпространство $N(L^*)$ в прямую сумму замкнутых подпространств

$$N(L^*) = N_1(L^*) \oplus N_2(L^*), \tag{5}$$

где $N_1(L^*) = P_{N_1(L^*)}\mathbf{H}_2$, $N_2(L^*) = P_{N_2(L^*)}\mathbf{H}_2$, $P_{N_2(L^*)} = P_{N(L^*)} - P_{N_1(L^*)}$ — ортопроектор.

2. *Подпространство* $N_1(L) \subset N(L)$ *линейно изоморфно подпространству* $N(L^*)$, $N_1(L) \cong N(L^*)$.

В этом случае существуют:

линейный ограниченный обратимый оператор $J_2 : N_1(L) \to N(L^*)$ такой, что $J_2 \times N_1(L) = N(L^*)$, $J_2^{-1}N(L^*) = N_1(L)$;

ортопроектор $P_{N_1(L)} : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_1$, разбивающий подпространство $N(L)$ в прямую сумму замкнутых подпространств

$$N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L), \tag{6}$$

где $N_1(L) = P_{N_1(L)}\mathbf{H}_1$, $N_2(L) = P_{N_2(L)}\mathbf{H}_1$, $P_{N_2(L)} = P_{N(L)} - P_{N_1(L)}$ — ортопроектор.

3. *Подпространство* $N(L)$ *линейно изоморфно подпространству* $N(L^*)$, $N(L) \cong N(L^*)$.

В этом случае существует линейный ограниченный обратимый оператор $J_3 : N(L) \to N(L^*)$ такой, что $J_3N(L) = N(L^*)$, $J_3^{-1}N(L^*) = N(L)$.

Обозначим расширения операторов J_i, $i = 1, 2, 3$, на пространство $\mathbf{H}_1$ через $\overline{P}_{N_1(L^*)} : \mathbf{H}_1 \to N_1(L^*) \subseteq N(L^*)$, а через $\overline{P}_{N_1(L)} : \mathbf{H}_2 \to N_1(L) \subseteq N(L)$ расширения операторов J_i^{-1}, $i = 1, 2, 3$, на пространство $\mathbf{H}_2$. В случае 3 $N_1(L^*) \equiv N(L^*)$, $N_1(L) \equiv N(L)$ и поэтому $\overline{P}_{N_1(L^*)} \equiv \overline{P}_{N(L^*)}$, а $\overline{P}_{N_1(L)} \equiv \overline{P}_{N(L)}$.

Лемма 1. *Оператор* $\overline{L} = L + \overline{P}_{N_1(L^*)}$ *на подпространстве* $\mathbf{H}_2 \ominus N_2(L^*)$ *имеет ограниченный обратный*

$$\overline{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (L + \overline{P}_{N_1(L^*)})_l^{-1} & — \text{ левый, если } N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*), \\ (L + \overline{P}_{N(L^*)})_r^{-1} & — \text{ правый, если } N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*). \end{cases}$$

Общий вид односторонне обратных операторов $\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}$ *задается формулой*

$$\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1} = \begin{cases} \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L^*)}) & — \text{ левый, если } N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*), \\ (I_{\mathbf{H}_1} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)})\overline{L}_r^{-1} & — \text{ правый, если } N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*), \end{cases}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N_2(L^*)$ *и* $\widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)} : \mathbf{H}_1 \to N_2(L)$ — *произвольные бесконечномерные ограниченные проекторы.*

Доказательство. Пусть $N(L)$ изоморфно подпространству $N_1(L^*) \subset N(L^*)$.

Покажем, что оператор $\overline{L} = L + \overline{P}_{N_1(L^*)}$ имеет ограниченный левый обратный. Поскольку подпространства $R(L)$ и $R(P_{N_1(L^*)}) = N_1(L^*)$ замкнуты, из (3) и (5) следует, что

$R(\overline{L}) = R(L) \cup N_1(L^*)$ замкнуто. А так как любое замкнутое подпространство гильбертового пространства дополняемо, для существования левого обратного оператора $\overline{L}_l^{-1}$ необходимо и достаточно показать [1], что

$$N(\overline{L}) = N(L + \overline{P}_{N_1(L^*)}) = \{0\}.$$

Пусть существует $x_0 \in \mathbf{H}_1$, $x_0 \neq 0$, такое, что

$$(L + \overline{P}_{N_1(L^*)})x_0 = Lx_0 + \overline{P}_{N_1(L^*)}x_0 = 0. \tag{7}$$

Из (7) имеем

$$Lx_0 \in R(L), \quad \overline{P}_{N_1(L^*)}x_0 \in N_1(L^*).$$

Подпространства $R(L)$ и $N(L^*)$ взаимно дополняют одно другое и $R(L) \bigcap N(L^*) = 0$, $N_1(L^*) \subset N(L^*)$. Следовательно, $R(L) \bigcap N_1(L^*) = \{0\}$, откуда следует, что они имеют только один общий элемент — нулевой, т. е. $Lx_0 = 0$, $\overline{P}_{N_1(L^*)}x_0 = 0$. Это значит, что $x_0 \in N(L)$ и $x_0 \in N(\overline{P}_{N_1(L^*)}) \subset R(L^*)$. А поскольку $N(L)$ и $R(L^*)$ — взаимно дополняющие подпространства, из (3) имеем $N(L) \cap R(L^*) = \{0\}$. Отсюда следует, что $x_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $N(\overline{L}) = \{0\}$.

Таким образом, оператор $L + \overline{P}_{N_1(L^*)}$ имеет левый обратный.

Поскольку образ $R(\overline{L}) = R(L) \oplus N_1(L^*)$ оператора $\overline{L}$ не совпадает со всем пространством $\mathbf{H}_2$, нельзя говорить об ограниченности оператора $\overline{L}_l^{-1}$ на всем пространстве $\mathbf{H}_2$. Так как подпространство $\mathbf{H}_2 \ominus N_2(L^*)$ замкнуто, оно само является пространством. Оператор $\overline{L}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие пространств $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2 \ominus N_2(L^*)$. Поэтому по теореме Банаха [8] ограниченность оператора $\overline{L}_l^{-1}$ обеспечивается только если рассматривать его действие из пространства $\mathbf{H}_2 \ominus N_2(L^*)$ на пространство $\mathbf{H}_1$.

Левый обратный оператор $\overline{L}_l^{-1}$ не определяется однозначно. Использовав результаты [1], запишем совокупность левых обратных операторов в общем виде $\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1}\mathcal{P}_{R(\overline{L})}$, где $\mathcal{P}_{R(\overline{L})}$ — произвольный ограниченный проектор на образ оператора $\overline{L}$. Как следует из (5), такое свойство имеет проектор $I_{\mathbf{H}_2} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L^*)}$, т. е. $R(I_{\mathbf{H}_2} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L^*)}) = R(\overline{L})$, где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N_2(L^*)$ — произвольный бесконечномерный ограниченный проектор, который можно построить в общем виде, использовав лемму А. Собчика [9]. Отсюда следует, что семейство левых обратных операторов имеет представление

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L^*)}).$$

Пусть теперь $N(L^*)$ изоморфно подпространству $N_1(L) \subset N(L)$. Покажем, что оператор $\overline{L} = L + \overline{P}_{N(L^*)}$ имеет ограниченный правый обратный. Поскольку $N(L)$ дополняемо в $\mathbf{H}_1$, в силу равенств (3) и (6) подпространство $N(\overline{L})$ дополняемо в $\mathbf{H}_1$. Таким образом, для доказательства существования правого обратного оператора необходимо и достаточно показать, что [1]

$$R(\overline{L}) = R(L + \overline{P}_{N_1(L^*)}) \equiv \mathbf{H}_2.$$

Поскольку $N(L^*)$ изоморфно $N_1(L) \subset N(L)$, то $\overline{P}_{N_1(L^*)} \equiv \overline{P}_{N(L^*)} : \mathbf{H}_1 \to N(L^*)$. По определению операторов $\overline{L}$ и $\overline{P}_{N(L^*)}$ для произвольного элемента $x \in \mathbf{H}_1$ имеем

$$\overline{L}x = Lx + \overline{P}_{N(L^*)}x,$$

где $Lx \in R(L)$, а $\overline{P}_{N(L^*)}x \in N(L^*)$. Так как подпространства $R(L)$ и $N(L^*)$ взаимно дополняют одно другое в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_2$, то $R(\overline{L}) \equiv \mathbf{H}_2$.

Таким образом, оператор $L + \overline{P}_{N_1(L^*)}$ имеет правый обратный.

Оператор $\overline{L}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие пространств $\mathbf{H}_1 \ominus N_2(L)$ и $\mathbf{H}_2$, поэтому правый обратный оператор $\overline{L}_r^{-1}$ по теореме Банаха [8] ограничен.

Правый обратный оператор также не определяется однозначно. Использовав результаты [1], запишем совокупность правых обратных операторов в общем виде $\overline{L}_{r_0}^{-1} = \mathcal{P}_{N(\overline{L})} \times \times \overline{L}_r^{-1}$, где $\mathcal{P}_{N(\overline{L})}$ — произвольный проектор, имеющий свойство $N(\mathcal{P}_{N(\overline{L})}) = N(\overline{L})$. Из (6) следует, что такое свойство имеет проектор $I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)}$, т. е. $N(I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)}) = N(\overline{L})$, где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)} : \mathbf{H}_1 \to N_2(L)$ — произвольный бесконечномерный ограниченный проектор, который строится в общем виде с использованием леммы А. Собчика [9]. Тогда общее представление левых обратных операторов таково:

$$\overline{L}_{r_0}^{-1} = (I_{\mathbf{H}_1} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)})\overline{L}_r^{-1}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Если L — нетеров оператор ($\operatorname{ind} L = \dim\ker L - \dim\ker L^* = s - k < \infty$), то лемма 1 переходит в лемму 2.4 из [10, с. 66].

Для случая 3, когда подпространство $N(L)$ изоморфно $N(L^*)$, имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Оператор* $\overline{L} = L + \overline{P}_{N(L^*)}$ *имеет ограниченный обратный*

$$\overline{L}^{\,-1} = (L + \overline{P}_{N(L^*)})^{-1}.$$

Доказательство. Если $N(L)$ изоморфно $N(L^*)$, то $N_1(L) \equiv N(L)$, а $N_1(L^*) \equiv N(L^*)$. В этом случае существуют и левый, и правый обратный операторы к оператору $\overline{L}$, а значит, существует единственный ограниченный обратный оператор $\overline{L}^{\,-1}$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Если нормально разрешимый оператор L действует из гильбертова пространства $\mathbf{H}$ в себя и $N(L)$ изоморфно $N(L^*)$, то он называется приводимо-обратимым. В этом случае доказанная лемма переходит в теорему 1.6 из [11, с. 28].

Замечание 3. Если оператор L фредгольмов ($\operatorname{ind} L = 0$), то лемма 2 переходит в известную лемму Шмидта [8, с. 231].

Рассмотрим некоторые соотношения, связывающие „косые" проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}, \mathcal{P}_{N(L^*)}$, ортопроекторы $P_{N(L)}$, $P_{N(L^*)}$, линейные операторы $\overline{P}_{N_1(L)}$, $\overline{P}_{N_1(L^*)}$ и операторы $\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}$.

Лемма 3. *Ортопроекторы* $P_{N(L)}$, $P_{N(L^*)}$ *и операторы* $\overline{P}_{N_1(L)}$, $\overline{P}_{N_1(L^*)}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$P_{N(L^*)}\overline{P}_{N_1(L^*)} = \overline{P}_{N_1(L^*)}P_{N(L)} = \overline{P}_{N_1(L^*)},$$
$$P_{N(L)}\overline{P}_{N_1(L)} = \overline{P}_{N_1(L)}P_{N(L^*)} = \overline{P}_{N_1(L)}. \tag{8}$$

Доказательство. Докажем первое из соотношений (8). Пусть $x \in \mathbf{H}_1$, тогда $\overline{P}_{N_1(L^*)}x \in \in N_1(L^*) \subset N(L^*)$ и, значит, $P_{N(L^*)}\overline{P}_{N_1(L^*)}x = \overline{P}_{N_1(L^*)}\, x$, так как $P_{N(L^*)}N(L^*) = N(L^*)$. Следовательно, $P_{N(L^*)}\overline{P}_{N_1(L^*)} = \overline{P}_{N_1(L^*)}$.

Пусть $x \in N(L)$, тогда $P_{N(L)}x = x$. Подействовав оператором $\overline{P}_{N_1(L^*)}$ на обе части последнего равенства, получим $\overline{P}_{N_1(L^*)}P_{N(L)}x = \overline{P}_{N_1(L^*)}x$. Следовательно, $\overline{P}_{N_1(L^*)}P_{N(L)} = = \overline{P}_{N_1(L^*)}$.

Второе из соотношений (8) доказывается аналогично.

Заметим, что лемма 3 имеет место, если ортопроекторы $P_{N(L)}$, $P_{N(L^*)}$ заменить на „косые” проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{N(L^*)}$.

Лемма 4. *Ортопроекторы* $P_{N(L)}$, $P_{N(L^*)}$ *и „косые” проекторы* $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{N(L^*)}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$P_{N(L)}\mathcal{P}_{N(L)} = \mathcal{P}_{N(L)}, \quad \mathcal{P}_{N(L)}P_{N(L)} = P_{N(L)},$$
$$\mathcal{P}_{N(L^*)}P_{N(L^*)} = \mathcal{P}_{N(L^*)}, \quad P_{N(L^*)}\mathcal{P}_{N(L^*)} = P_{N(L^*)}. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем первое соотношение из (9). Пусть $x_0 = \mathcal{P}_{N(L)}x \ \ \forall x \in \mathbf{H}_1$, а $P_{N(L)}x_0 = x_0 \ \forall x_0 \in N(L)$. Тогда, подставив вместо x_0 его значение $\mathcal{P}_{N(L)}x$ в последнее равенство, получим

$$P_{N(L)}\mathcal{P}_{N(L)}x = \mathcal{P}_{N(L)}x \quad \forall x \in \mathbf{H}_1.$$

Второе соотношение доказывается аналогично.

Выше было отмечено, что пространства $\mathbf{H}_i^*$, $i = 1, 2$, совпадают с пространствами $\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2$, с точностью до изоморфизма. Сопряженные пространства $\mathbf{H}_i^*$ — это пространства вектор-строк y^*, x^*. Проектор $\mathcal{P}_{N(L^*)}$ $(L^*\mathcal{P}_{N(L^*)} = 0)$ действует на вектор-строку $y^* \in \in \mathbf{H}_2^*$ по правилу $y^*\mathcal{P}_{N(L^*)}^*$, а ортопроектор $P_{N(L^*)}$, с учетом его самосопряженности — по правилу $y^*P_{N(L^*)}$. Тогда соотношение, аналогичное первому, будет иметь вид

$$y^*P_{N(L^*)}\mathcal{P}_{N(L^*)}^* = y^*\mathcal{P}_{N(L^*)}^*.$$

Применив операцию сопряжения к обеим частям последнего равенства, получим третье соотношение из (9).

Четвертое соотношение доказывается аналогично.

Лемма даказана.

Далее установим некоторые свойства операторов $\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}$ и L.

Лемма 5. *Оператор* $\overline{L}^{-1}_{l_0,r_0}$ *удовлетворяет соотношениям*

$$
\begin{aligned}
L\overline{L}^{-1}_{l_0,r_0} &= I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)},\\
\overline{L}^{-1}_{l_0,r_0}L &= I_{\mathbf{H}_1} - \mathcal{P}_{N(L)},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $I_{\mathbf{H}_1}$ *и* $I_{\mathbf{H}_2}$ *— тождественные операторы в пространствах* $\mathbf{H}_1$ *и* $\mathbf{H}_2$ *соответственно,* $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \to N(L)$, $\mathcal{P}_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N(L^*)$ *— некоторые ограниченные проекторы.*

Доказательство. Из определения правого обратного оператора $\overline{L}^{-1}_{r_0}$ следует, что если он существует, то [1]

$$\overline{L}\,\overline{L}^{-1}_{r_0} = I_{\mathbf{H}_2},$$

$$\overline{L}^{-1}_{r_0}\overline{L} = I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N_2(L)},$$

где $\mathcal{P}_{N_2(L)}$ — некоторый ограниченный проектор на подпространство $N_2(L) \subset N(L)$. А если существует левый обратный оператор $\overline{L}^{-1}_{l_0}$, то

$$\overline{L}\,\overline{L}^{-1}_{l_0} = I_{\mathbf{H}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L^*)},$$

$$\overline{L}^{-1}_{l_0}\overline{L} = I_{\mathbf{H}_1},$$

где $\mathcal{P}_{N_2(L^*)}$ — некоторый ограниченный проектор на подпространство $N_2(L^*) \subset N(L^*)$.

Поскольку $\mathcal{P}_{N(L^*)}\overline{P}_{N_1(L^*)} = \overline{P}_{N_1(L^*)}$ и $L\mathcal{P}_{N_2(L)} = 0$, $\mathcal{P}_{N(L^*)}L = 0$, подействовав справа оператором $\overline{L}$ на обе части первого соотношения из (10), получим тождество

$$
\begin{aligned}
L = LI_{\mathbf{H}_1} = L\,\overline{L}^{-1}_{l_0}\,\overline{L} \equiv (I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)})\overline{L} = (I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)})(L + \overline{P}_{N_1(L^*)}) =\\
= L - \mathcal{P}_{N(L^*)}L + \overline{P}_{N_1(L^*)} - \mathcal{P}_{N(L^*)}\overline{P}_{N_1(L^*)} = L + \overline{P}_{N_1(L^*)} - \overline{P}_{N_1(L^*)} = L,
\end{aligned}
$$

доказывающее это соотношение.

Далее, так как $L\mathcal{P}_{N(L)} = 0$ и $\mathcal{P}_{N(L^*)}L = 0$, подействовав слева оператором L на второе соотношение из (10), получим тождество

$$L = L + \mathcal{P}_{N(L^*)}L = (I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)})L = L\overline{L}^{-1}_{l_0,r_0}L \equiv L(I_{\mathbf{H}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}) = L,$$

которое доказывает это соотношение.

Лемма доказана.

Доказанные леммы позволяют предложить конструкции односторонне псевдообратных операторов к нормально разрешимому.

Левый и правый псевдообратные операторы к нормально разрешимому оператору.

Определение 1. *Оператор* $L^+_r : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_1$, *удовлетворяющий условиям*

$$
\begin{aligned}
LL^+_rL &= L,\\
L^+_rLL^+_r &= L^+_r,\\
(LL^+_r)^* = LL^+_r &= I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

называется правым псевдообратным оператором к нормально разрешимому оператору L.

Определение 2. *Оператор* $L_l^+ : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_1$, *удовлетворяющий условиям*

$$\begin{gathered} LL_l^+L = L, \\ L_l^+LL_l^+ = L_l^+, \\ (L_l^+L)^* = L_l^+L = I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}, \end{gathered} \tag{12}$$

называется левым псевдообратным оператором к нормально разрешимому оператору L.

Естественно, что оператор, являющийся и левым, и правым псевдообратным одновременно, будет псевдообратным в смысле Мура – Пенроуза.

Конструкции односторонне псевдообратных операторов дают следующие теоремы.

Теорема 1. *Оператор*

$$L_r^+ = \overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = \begin{cases} \overline{L}_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \textit{если} \quad N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*), \\ \overline{L}_{r_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \textit{если} \quad N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*), \end{cases}$$

является ограниченным правым псевдообратным к нормально разрешимому оператору L.

Доказательство. Проверим выполнение свойств (11). Пусть для определенности $N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*)$. Из леммы 1 следует, что существует правый обратный оператор $\overline{L}_{r_0}^{-1}$.

Сначала проверим выполнение третьего условия из (11):

$$\begin{aligned} LL_r^+ &= L\overline{L}_{r_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = (I_{\mathbf{H_2}} - \mathcal{P}_{N(L^*)})(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = \\ &= I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)} - P_{N(L^*)} + \mathcal{P}_{N(L^*)}P_{N(L^*)} = I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)} = \\ &= (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})^* = (LL_r^+)^*, \end{aligned}$$

так как в силу четвертого соотношения из (9) имеем $\mathcal{P}_{N(L^*)}P_{N(L^*)} = \mathcal{P}_{N(L^*)}$.

Далее проверим выполнение первого и второго условий из (11):

$$LL_r^+L = (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})L = L - P_{N(L^*)}L = L,$$

так как $P_{N(L^*)}L = 0$, и

$$\begin{aligned} L_r^+LL_r^+ &= L_r^+(I_{\mathbf{H_2}} - P_{N(L^*)}) = L_r^+ - \overline{L}_{r_0}^{-1}(I_{\mathbf{H_2}} - P_{N(L^*)})P_{N(L^*)} = \\ &= L_r^+ - \overline{L}_{r_0}^{-1}(P_{N(L^*)} - P_{N(L^*)}) = L_r^+, \end{aligned}$$

поскольку $P^2_{N(L^*)} = P_{N(L^*)}$.

Легко проверить, что четвертое условие из (2) не выполняется. Действительно,

$$L_r^+ L = \overline{L}_{r_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})L = \overline{L}_{r_0}^{-1} L = I_{\mathbf{H}_1} - \mathcal{P}_{N(L)},$$

так как в силу леммы 5 имеем $\overline{L}_{r_0}^{-1} L = I_{\mathbf{H}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}$, где $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \to N(L)$ — некоторый проектор.

Ограниченность правого псевдообратного оператора L_r^+ следует из ограниченности операторов $\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}$ и $I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}$.

Теорема 2. *Оператор*

$$L_l^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1} = \begin{cases} (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\overline{L}_{l_0}^{-1}, & \text{если} \quad N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*), \\ (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\overline{L}_{r_0}^{-1}, & \text{если} \quad N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*), \end{cases}$$

является левым псевдообратным к нормально разрешимому оператору L.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Оператор, псевдообратный к линейному ограниченному нормально разрешимому. Теоремы 1, 2 позволяют предложить формулу для псевдообратного оператора к нормально разрешимому в гильбертовом пространстве.

Теорема 3. *Оператор*

$$L^+ = L_l^+(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L_r^+ \tag{13}$$

является единственным ограниченным псевдообратным к нормально разрешимому оператору L.

Доказательство. Проверим выполнение свойств (2), определяющих псевдообратный оператор. Пусть для определенности $N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*)$. Это значит, что в силу леммы 1 существует левый обратный оператор $\overline{L}_{l_0}^{-1}$.

Поскольку

$$L(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}) = L, \quad (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})L = L, \quad \mathcal{P}_{N(L^*)}L = 0,$$

имеем равенство

$$LL^+L = L(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\overline{L}_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})L = L\overline{L}_{l_0}^{-1}L = (I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)})L = L,$$

доказывающее первое свойство.

Так как по лемме 5 $L\overline{L}_{l_0}^{-1} = I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)}$, а по лемме 4 $\mathcal{P}_{N(L^*)}P_{N(L^*)} = \mathcal{P}_{N(L^*)}$, получим равенство

$$L^+LL^+ = L^+L(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\overline{L}_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = L^+L\overline{L}_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) =$$
$$= L^+(I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)})(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = L^+(I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)} - P_{N(L^*)} + \mathcal{P}_{N(L^*)}) = L^+,$$

которое доказывает второе свойство.

Проверим выполнение третьего и четвертого свойств:

$$LL^{+} = L(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = LL_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) =$$

$$= (I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)})(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)} = (LL^{+})^*,$$

$$L^{+}L = L_l^{+}(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L^*)})L = L_l^{+}L = I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)} = (L^{+}L)^*,$$

так как L_l^{+} — левый псевдообратный оператор.

Ограниченность псевдообратного оператора L^{+} следует из ограниченности односторонне псевдообратных операторов L_r^{+}, L_l^{+} и ортопроекторов $I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}$, $I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Если $L^{-} : \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_1$ — некоторый обобщенно-обратный оператор, удовлетворяющий свойствам (1), то используя конструкцию, аналогичную (13), можно доказать, что оператор

$$L^{+} = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L^{-}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})$$

будет единственным псевдообратным оператором к нормально разрешимому оператору L.

С помощью предложенной в теореме 3 конструкции псевдообратного оператора L^{+} можно решить вопрос о записи в явном виде общего решения линейного операторного уравнения (4) с линейным ограниченным нормально разрешимым оператором L.

Теорема 4. *Пусть $L : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ — нормально разрешимый оператор. Уравнение (4) разрешимо для тех и только тех $y \in \mathbf{H}_2$, для которых выполнено условие*

$$P_{N(L^*)}y = 0. \tag{14}$$

и при этом имеет семейство решений, представимое в виде прямой ортогональной суммы

$$x = \tilde{x} + \bar{x} = P_{N(L)}\hat{x} + L^{+}y, \tag{15}$$

в которой первое слагаемое $\tilde{x}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения $Lx = 0$, а второе $\bar{x}$ — единственное частное решение неоднородного операторного уравнения (4), $\hat{x}$ — произвольный элемент пространства $\mathbf{H}_1$.

Доказательство. Из соотношений (3) следует, что общее решение уравнения (4) представляет собой прямую ортогональную сумму общего решения $\tilde{x}$ соответствующего (4) однородного уравнения $Lx = 0$ и единственного частного решения $\bar{x} = L^{+}y$ неоднородного уравнения (4). Из определения ортопроектора на нуль-пространство $N(L)$ оператора L следует, что общее решение однородного уравнения $Lx = 0$ можно записать в виде

$$\tilde{x} = P_{N(L)}\hat{x}.$$

Поскольку линейное операторное уравнение (4) является нормально разрешимым, для его разрешимости [8] необходимо и достаточно, чтобы y был ортогонален любому вектору из нуль-пространства $N(L^*)$ сопряженного оператора L^*. Так как $R(L) = N(\mathcal{P}_{N(L^*)})$, а $R(L)$ и $N(L^*)$ взаимно ортогональны и дополняют одно другое в пространстве $\mathbf{H}_2$, это условие эквивалентно условию (14), выполнение которого гарантирует принадлежность элемента y образу $R\,(L)$ оператора L.

Подставив решение (15) в исходное уравнение (4) с учетом третьего соотношения из (2) и условия (14), получим

$$Lx = LP_{N(L)}\hat{x} + LL^+y = LL^+y = (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})\,y = I_{\mathbf{H}_2}y - P_{N(L^*)}y = I_{\mathbf{H}_2}y = y,$$

так как $LP_{N(L)} = 0$.

Теорема доказана.

Если условие (14) не выполняется, т. е. y не принадлежит образу $R(L)$ оператора L, то операторное уравнение (4) не имеет решения. В этом случае задача (4) некорректна и имеет так называемое псевдорешение [12], которое минимизирует норму невязки $\|Lx - y\|_{\mathbf{H}_2}$.

Пример. Найдем условия разрешимости и общий вид решения операторного уравнения

$$Qx = y, \tag{16}$$

в котором линейный матричный оператор

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

действует из вещественного гильбертова пространства $\mathbf{l}^2$ числовых последовательностей $x = \mathrm{col}\,(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots, \xi^{(i)}, \ldots)$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty}(\xi^{(i)})^2 < \infty$, в вещественное гильбертово пространство $\mathbf{l}^2$ числовых последовательностей $y = \mathrm{col}\,(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}, \ldots, \eta^{(j)}, \ldots)$, для которых $\sum_{j=1}^{\infty}(\eta^{(j)})^2 < \infty$.

Проверим, является ли оператор Q ограниченным в этом пространстве:

$$\|Q\|_{\mathbf{l}^2} = \sup_{x\in\mathbf{l}^2, x\neq 0} \frac{\|Qx\|_{\mathbf{l}^2}}{\|x\|_{\mathbf{l}^2}} = \sup_{x\in\mathbf{l}^2, x\neq 0} \frac{\sup\limits_{j\in N}|\eta^{(j)}|}{\sup\limits_{i\in N}|\xi^{(i)}|} = \sup_{x\in\mathbf{l}^2, x\neq 0} \frac{\sup\limits_{j\in N}(|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|, 0, |\xi^{(3)} - \xi^{(4)}|, 0, \ldots)}{\sup\limits_{i\in N}|\xi^{(i)}|} \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbf{l}^2, x\neq 0} \frac{\sup\limits_{j\in N}(|\xi^{(1)}| + |\xi^{(2)}|, 0, |\xi^{(3)}| + |\xi^{(4)}|, 0, \ldots)}{\sup\limits_{i\in N}|\xi^{(i)}|} \leq 2\frac{\sup\limits_{j\in N}|\xi^{(j)}|}{\sup\limits_{i\in N}|\xi^{(i)}|} = 2,$$

так как $\sup_{i\in N}(|\xi^{(i)}| + |\xi^{(i+1)}|) \leq 2\sup_{i\in N}(|\xi^{(i)}|, |\xi^{(i+1)}|)$. Оператор $Q : \mathbf{l}^2 \to \mathbf{l}^2$ ограничен.

Ортопроекторы $P_{N(Q)}$ и $P_{N(Q^*)}$ имеют вид

$$P_{N(Q)} = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ldots\right\},$$

$$P_{N(Q^*)} = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots\right\},$$

а псевдообратный оператор Q^+ имеет вид

$$Q^+ = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right\}.$$

По теореме 4 операторное уравнение (16) имеет ограниченное решение для тех и только тех $y \in \mathbf{l}^2$, $y = \mathrm{col}\,(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}, \ldots)$, которые удовлетворяют условию

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ \eta^{(2)} \\ \eta^{(3)} \\ \eta^{(4)} \\ \ldots \\ \eta^{(i)} \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{(2)} \\ 0 \\ \eta^{(4)} \\ \ldots \\ \eta^{(2k)} \\ \ldots \end{pmatrix} = 0. \tag{17}$$

Условие разрешимости (17) будет выполнено, например, для векторов $y \in \mathbf{l}^2$, $y = \mathrm{col}\,(\eta^{(1)}, 0, \eta^{(3)}, 0, \eta^{(5)}, 0, \ldots)$

Для таких векторов операторное уравнение (16) имеет ограниченное на $R(Q)$ решение $x \in \mathbf{l}^2$ вида

$$x = P_{N(Q)}\hat{x} + Q^+ y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\xi}^{(1)} \\ \hat{\xi}^{(2)} \\ \hat{\xi}^{(3)} \\ \hat{\xi}^{(4)} \\ \ldots \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ 0 \\ \eta^{(3)} \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(\hat{\xi}^{(1)} + \hat{\xi}^{(2)} + \eta^{(1)}) \\ \frac{1}{2}\,(\hat{\xi}^{(1)} + \hat{\xi}^{(2)} - \eta^{(1)}) \\ \frac{1}{2}\,(\hat{\xi}^{(3)} + \hat{\xi}^{(4)} + \eta^{(3)}) \\ \frac{1}{2}\,(\hat{\xi}^{(3)} + \hat{\xi}^{(4)} - \eta^{(3)}) \\ \dots \end{pmatrix},$$

где $\hat{x} = \operatorname{col}(\hat{\xi_1}, \hat{\xi_2}, \hat{\xi_3}, \dots, \hat{\xi_i}, \dots)$ — произвольный элемент гильбертова пространства l^2, вектор $\operatorname{col}\left(\frac{1}{2}(\hat{\xi}^{(1)} + \hat{\xi}^{(2)}), \frac{1}{2}\,(\hat{\xi}^{(1)} + \hat{\xi}^{(2)}), \frac{1}{2}\,(\hat{\xi}^{(3)} + \hat{\xi}^{(4)}), \frac{1}{2}\,(\hat{\xi}^{(3)} + \hat{\xi}^{(4)}), \dots\right)$ — общее решение однородного уравнения $Qx = 0$, вектор $\operatorname{col}\left(\frac{\eta^{(1)}}{2}, -\frac{\eta^{(1)}}{2}, \frac{\eta^{(3)}}{2}, -\frac{\eta^{(3)}}{2}, \dots\right)$ — единственное частное решение операторного уравнения (16).

1. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
3. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix (Abstract) // Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — № 26. — P. 394–395.
4. *Penrose R.* A Generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51**, № 3. — P. 406–413.
5. *Пытьев Ю. П.* Псевдообратный оператор. Свойства и применения // Мат. сб. Нов. сер. — 1982. — **118**, № 1. — С. 19–49.
6. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 587 с.
7. *Садовничий В. А.* Теория операторов. — 2-е изд. — М.: Изд-во Мос. гос. ун-та, 1986. — 368 с.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 495 с.
9. *Sobczyk A.* Projections in Minkowski and Banach spaces // Duke Math. J. — 1941. — № 8. — P. 78–106.
10. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
11. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. — Киев: Наук. думка, 1978. — 218 с.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

Получено 30.03.10