УДК 517.98

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ G-СЕКТОРІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

А. В. Чайковський

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 7

We show that several kinds of parabolic type partial differential equations can be represented as differential equations in a Banach space with a G-sectorial operator coefficient.

Показано, что несколько типов дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа приводятся к дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве с G-секториальным операторным коэффициентом.

1. Вступ. Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, O — нульовий, I — одиничний оператор у просторі B. Через $D(A)$, $\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$ позначимо відповідно область визначення, спектр і резольвенту лінійного оператора A.

Велика кількість диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу та їх систем зводяться до диференціальних рівнянь у банаховому просторі вигляду

$$x'(t) + Ax(t) = y(t),$$

де $t \in U$ (U — відрізок, піввісь або вся дійсна вісь), $y : U \to B$ — відома функція, $x : U \to B$ — невідома, $A : D(A) \subset B \to B$ — операторний коефіцієнт.

У багатьох випадках оператор A при цьому секторіальний. Нагадаємо, що лінійний оператор $A : D(B) \subset B \to B$ називають секторіальним, якщо множина $D(A)$ скрізь щільна в B та існують такі сталі $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, що для множини

$$S_{a,\varphi} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq a, \ |\arg(z-a)| < \varphi\}$$

виконуються умови:

1) $\sigma(A) \subset S_{a,\varphi}$;

2) $\exists C > 0 \, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus S_{a,\varphi}, \ \lambda \neq a : \|R_\lambda(A)\| \leq \dfrac{C}{|\lambda - a|}$.

Теорію диференціальних рівнянь з секторіальним операторним коефіцієнтом та її застосування викладено, наприклад, у [1–3]. В роботах [4–7] розглядаються оператори, для яких справджується умова 1, а умову 2 замінено на таку:

2′) $\exists C > 0 \, \exists \alpha \in (0,1) \, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus S_{a,\varphi}, \ \lambda \neq a : \|R_\lambda(A)\| \leq \dfrac{C}{|\lambda - a|^\alpha}$.

Загальну теорію операторів з різною швидкістю спадання резольвенти поза деяким сектором та її застосування до лінійних диференціальних рівнянь викладено в роботі [8]. Наведемо відповідні означення.

Означення 1. *Будемо говорити, що функція* $G : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *належить класу* Ψ, *якщо вона задовольняє наступні умови:*

а) G не зростає на $[0, +\infty)$;
б) $G(t) \to 0,\ t \to +\infty$;
в) функція $1/G$ *ліпшицева на* $[0, +\infty)$.

Разом з кожною функцією $G \in \Psi$ будемо розглядати функцію $H(t) := \dfrac{1}{t} G\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $t > 0$.

Означення 2. *Лінійний оператор* $T : D(T) \subset B \to B$ *назвемо G-секторіальним, якщо існують такі сталі* $a \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, *що для множини* $S_{a,\varphi}$ *виконуються умови:*
1) $\sigma(T) \subset S_{a,\varphi}$;
2) $\exists M > 0\ \forall \lambda \notin S_{a,\varphi} : \|R_\lambda(T)\| \le MG(|\lambda - a|)$.

Приклад 1. Кожен секторіальний оператор T є G-секторіальним, якщо покласти $G(t) = (t+1)^{-1}$, $t \ge 0$.

У цій статті наведено кілька типів диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем, які зводяться до диференціальних рівнянь у банаховому просторі з G-секторіальним операторним коефіцієнтом A. Зокрема, розглянуто приклади рівнянь, коли для відповідних операторів не виконується умова $2'$.

Наведені методи є достатньо загальними і дають можливість розв'язати багато інших задач подібного типу.

2. Система рівнянь теплопровідності. Позначимо $X := L_2([0, +\infty))$. Нехай p_1, p_2, q_1, q_2, $r \in C^2([0, +\infty), \mathbb{R})$, $r \in X$, $q_1(s), q_2(s) \ge 1$, $s \ge 0$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(p_1(s)\frac{\partial x_1}{\partial s}\right)(t,s) - q_1(s)x_1(t,s) - r(s)x_2(t,s) + u_1(t,s),$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(p_2(s)\frac{\partial x_2}{\partial s}\right)(t,s) - q_2(s)x_2(t,s) + u_2(t,s), \quad t, s \ge 0,$$

де u_1, u_2 — відомі функції, неперервні за змінною t, що належать простору $L_2([0, +\infty))$ за змінною s; x_1, x_2 — шукані функції.

Цю систему можна записати у вигляді рівняння

$$x'(t) = -Ax(t) + u(t), \quad t \ge 0,$$

де $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $t \ge 0$, — відома функція з класу $C([0, +\infty), X^2)$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \ge 0$, — шукана функція з класу $C([0, +\infty), X^2) \cap C^1((0, +\infty), X^2)$, $A : D(A) \subset X^2 \to X^2$ — лінійний оператор, визначений формулою

$$(Az)(s) = \left(-(p_1 z_1')'(s) + q_1(s)z_1(s) + r(s)z_2(s), -(p_2 z_2')'(s) + q_2(s)z_2(s)\right),\ s \ge 0,\ z \in D(A),$$

$$D(A) = \left\{(z_1, z_2) | z_j(0) = 0,\ j = 1, 2,\ Az \in X^2\right\}.$$

Лема 1. *Нехай* $p \in C^1([0, +\infty), [0, +\infty))$, $q \in C^2([0, +\infty), [1, +\infty))$ *і*

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |(p(t)q'(t))'| q^2(t) < 1.$$

Лінійний оператор в $L_2([0,+\infty))$

$$(Tw)(s) = -(pw')' + qw, \quad w \in D(T) = \left\{ w | w(0) = 0,\ -(pw')' + qw \in L_2([0,+\infty)) \right\},$$

є самоспряженим та невід'ємним. При цьому $\sigma(T) \subset [1,+\infty)$ *і*

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq (\max\{|\mathrm{Im}\,\lambda|, 1-\mathrm{Re}\,\lambda\})^{-1}, \quad \lambda \notin [1,+\infty).$$

Крім того,

$$\forall \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \exists C = C(\varphi) > 0 \,\forall \lambda, \quad |\arg\lambda| \in \left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right) \forall w \in D(T) : \|qw\| \leq C\|(T-\lambda I)w\|.$$

Якщо додатково функції pq', $\dfrac{(pq')'}{q}$ *обмежені, то рівняння*

$$(T-\lambda I)w = qu$$

має для довільних λ, $|\mathrm{arg}\lambda| \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $u \in L_2([0,+\infty))$ *єдиний розв'язок* $w = w_u \in$ $\in L_2([0,+\infty))$, *до того ж*

$$\forall \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \exists L = L(\varphi) > 0 \,\forall \lambda, \quad |\arg\lambda| \in \left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right) \forall u \in L_2([0,+\infty)) : \|w_u\| \leq L\|u\|.$$

Доведення. Самоспряженість оператора показано в [9, с. 458, 477]. Невід'ємність та включення для спектра випливають з нерівності $(Tz, z) \geq \|z\|^2$, $z \in D(A)$, яка перевіряється безпосередньо. Крім того,

$$\|(T-\lambda I)z\|\,\|z\| \geq |((T-\lambda I)z, z)|,$$

$$\begin{aligned}((T-\lambda I)z, z) &= \int_0^{+\infty} (-(p(s)z'(s))' + q(s)z(s) - \lambda z(s))\overline{z(s)}\,ds = \\ &= \int_0^{+\infty} (p(s)z'(s))\overline{z'(s)}\,ds + \int_0^{+\infty} (q(s)z(s) - \lambda z(s))\overline{z(s)}\,ds = \\ &= \|\sqrt{p}z'\|^2 + \|\sqrt{q}z\|^2 - \lambda\|z\|^2, \quad z \in D(T), \quad \lambda \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Тому при $\lambda \notin [1,+\infty)$

$$\forall z \in D(T) : \|(T-\lambda I)z\| \geq \max\{|\mathrm{Im}\,\lambda|, 1-\mathrm{Re}\,\lambda\}\|z\|.$$

Нехай $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ є фіксованим, $|\arg\lambda| = \varphi$, $w \in D(T)$. З результату [9, с. 707] випливає, що $qw \in X$. Розглянемо оператор $D(T) \ni w \mapsto qw \in X$, де $D(T)$ розглядається як банахів простір з нормою $\|w\|_{D(T)} := \|Tw\|$, $w \in D(T)$. Цей оператор замкнений і визначений на всьому просторі, а тому обмежений. Це означає, що

$$\exists C_1 > 0\, \forall w \in D(T) : \|qw\| \le C_1 \|Tw\|.$$

Тому

$$\begin{aligned} \forall w \in D(T) : \|qw\| &\le C_1(\|(T-\lambda I)w\| + |\lambda|\, \|w\|) \le \\ &\le C_1(\|(T-\lambda I)w\| + \|(T-\lambda I)^{-1}\|\, |\lambda|\, \|(T-\lambda I)w\|) \le \\ &\le C_1 \|(T-\lambda I)w\| \left(1 + \frac{1}{\sin\varphi}\right). \end{aligned}$$

Доведемо останнє твердження теореми. Нехай $v = (T-\lambda I)^{-1}u$, $z = qv$. З доведеної частини леми випливає, що норми функцій zv' обмежені в X незалежно від λ при $|\arg\lambda| \in \in \left(\varphi, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тоді

$$\begin{aligned} -(pz')' + qz - \lambda z &= -(p(v'q + vq'))' + q^2 v - \lambda qv = \\ &= -p'(v'q + vq') - p(v''q + 2v'q' + vq'') + q^2 v - \lambda qv = qu - v(pq')' - 2pv'q'. \end{aligned}$$

Отже, можна покласти

$$w_u = z + (T-\lambda I)^{-1}(v(pq')' + 2pv'q').$$

Лему 1 доведено.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*
1) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, |(p_j(t)q_j'(t))'|q_j^2(t) < 1$, $j = 1, 2$,
2) $R := \sup\limits_{s\ge 0} \dfrac{|r(s)|}{q_1(s)q_2(s)} < +\infty$.
Покладемо

$$G(u) = \sup_{t\in[u,+\infty)} \inf_{N\in\mathbb{N}} \left(\sup_{s\ge N} \frac{|r(s)|}{q_1(s)q_2(s)} + \frac{1}{t+1} + \frac{\sup\limits_{s\in[0,N]} |r(s)|}{(t+1)^2} \right), \quad u \ge 0.$$

Якщо $G(u) \to 0$, $u \to +\infty$, *то оператор* A *є* G*-секторіальним, до того ж* $a = 0$, $\varphi \in \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *довільне.*

Доведення. Рівняння

$$Ax - \lambda x = u,$$

де $u \in X^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, можна записати у вигляді системи

$$(A_1 - \lambda I)x_1 + rx_2 = u_1,$$

$$(A_2 - \lambda I)x_2 = u_2,$$

де

$$(A_j w)(s) = -(p_j w')' + q_j w,$$

$$w \in D(A_j) = \left\{ w | w(0) = 0,\ -(p_j w')' + q_j w \in L_2([0,+\infty)) \right\}, \quad j = 1, 2.$$

При $\lambda \notin [1,+\infty)$ за лемою 1 друге рівняння системи має єдиний розв'язок, до того ж

$$\|q_2 x_2\| \le C \|u_2\|.$$

На підставі другої частини леми перше рівняння має єдиний розв'язок, причому

$$\|x_1\| \le C_2 R(\|u_1\| + \|u_2\|).$$

Безпосереднє оцінювання також показує, що якщо виконується умова $L := \sup_{s \ge 0} |r(s)| < < +\infty$, то

$$\|x_1\| \le \frac{C_3}{|\lambda| + 1} \left(\|u_1\| + L \frac{\|u_2\|}{|\lambda| + 1} \right).$$

Отримані оцінки для $\|x_1\|$ можна уточнити, якщо при деякому $N > 0$ функцію r подати у вигляді суми функцій $r_1(s) = \begin{cases} r(s), & s \in [0, N], \\ 0, & s > N, \end{cases}$ та $r_2 = r - r_1$. Тоді

$$\|x_1\| \le C_4 \left(\sup_{s \ge N} \frac{|r(s)|}{q_1(s) q_2(s)} + \frac{1}{|\lambda| + 1} + \frac{\sup\limits_{s \in [0,N]} |r(s)|}{(|\lambda| + 1)^2} \right) (\|u_1\| + \|u_2\|).$$

Потрібна оцінка для x_2 випливає з леми 1.

Перевірка того, що функція G належить класу Ψ, аналогічна доведенню теореми 1 з роботи [8].

Теорему 1 доведено.

Наведемо приклад, який показує, що резольвента розглянутого в теоремі оператора за межами відповідного сектора може спадати повільніше за довільну степеневу функцію.

Приклад 2. Якщо $p_1(s) = p_2(s) = 1$, $q_1(s) = q_2(s) = s + 1$, $r(s) = \dfrac{(s+1)^2}{\ln(s+2)}$, $s \ge 0$, то умови теореми виконано. Поклавши $N = |\lambda|$ в означенні функції G, отримаємо оцінку

$$G(t) \le \frac{2}{\ln(t+2)} + \frac{1}{t+1}, \quad t \ge 0.$$

Покажемо, що ця оцінка дає правильну (з точністю до сталої) швидкість спадання норми резольвенти. Нехай $\omega \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\omega(s) = 0$, $s \notin [-1, 1]$, $\omega(0) \ne 0$. Покладемо

$$x_1(s) = -r(s)\omega(s - |\lambda|), \quad x_2(s) = (q_2(s) - \lambda)\omega(s - |\lambda|), \quad s \ge 0.$$

Тоді при фіксованому $\arg \lambda \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ маємо

$$u_1(s) = (r(s)\omega(s - |\lambda|))'', \quad u_2(s) = -((q_2(s) - \lambda)\omega(s - |\lambda|))'' + (q_2(s) - \lambda)^2 \omega(s - |\lambda|).$$

Бачимо, що існують $L_1, L_2 > 0$ такі, що $\|u_1\| \leq L_2|\lambda|^2$, $L_1|\lambda|^2 \leq \|u_2\| \leq L_2|\lambda|^2$. З іншого боку,

$$\exists L_3 > 0 : \|x_1\| \geq L_3 \frac{|\lambda|^2}{\ln(2+|\lambda|)}.$$

Тому

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \geq \frac{L_3}{2L_2} \frac{1}{\ln(2+|\lambda|)}.$$

3. Система рівнянь першого порядку. Нехай a, b, c, d — визначені на $[0,+\infty)$ неперервні дійснозначні функції. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}(s,t) = a(s)x_1(t,s) + b(s)x_2(t,s) + u_1(t,s),$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t}(s,t) = c(s)x_1(t,s) + d(s)x_2(t,s) + u_2(t,s),$$

де $u_1, u_2 \in C([0,+\infty)^2, \mathbb{C})$ — відомі функції, $x_1, x_2 \in C([0,+\infty)^2, \mathbb{C}) \cap C^1((0,+\infty)\times[0,+\infty), \mathbb{C})$ є шуканими.

Позначимо через Z простір визначених на $[0,+\infty)$ неперервних обмежених комплекснозначних функцій з рівномірною нормою. Систему можна записати у вигляді рівняння

$$x'(t) = -Ax(t) + u(t), \quad t \geq 0,$$

де $u(t) = (u_1(t), u_2(t)), t \geq 0,$ — відома функція з класу $C([0,+\infty), Z^2)$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \geq 0,$ — шукана функція з класу $C([0,+\infty), Z^2) \cap C^1((0,+\infty), Z^2)$, $A : D(A) \subset Z^2 \to Z^2$ — лінійний оператор, визначений формулою

$$(Az)(s) = (a(s)z_1(s) + b(s)z_2(s), c(s)z_1(s) + d(s)z_2(s)), \quad s \geq 0, \quad z \in D(A),$$

$$D(A) = \{(z_1, z_2) | z_j(0) = 0, \ j = 1, 2\}.$$

Теорема 2. *Нехай $a(s) + d(s) \geq 0$, $s \geq 0$, і*

$$\exists k > 0 : a(s)d(s) \geq b(s)c(s) \geq a(s)d(s) - k(a(s)+d(s))^2, \quad s \geq 0.$$

Тоді існує $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ таке, що оператор A є G-секторіальним зі сталою $a = -1$ в означенні, де

$$G(t) := \sup_{\lambda \notin S_{-1,\varphi},\ |\lambda| \geq t} \ \sup_{s \geq 0} \frac{|a(s)-\lambda| + |d(s)-\lambda| + |b(s)| + |c(s)|}{|\lambda^2 - (a(s)+d(s))\lambda + (a(s)d(s) - b(s)c(s))|}.$$

Доведення. Нехай $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ — корені рівняння $(a(s)-\lambda)(d(s)-\lambda) - b(s)c(s) = 0$, $\triangle(s) := (a(s)+d(s))^2 - 4a(s)d(s) + 4b(s)c(s)$ — його дискримінант. Розглянемо два випадки:

1) $\triangle(s) \geq 0$, тоді $\lambda_j(s) \in \mathbb{R}$, $2\lambda_j \geq a(s) + d(s) - \sqrt{\triangle(s)} \geq 0$, $j = 1, 2$;

2) $\triangle(s) < 0$, тоді $k > \dfrac{1}{4}$ і $2|\mathrm{Im}\,\lambda_j(s)| = \sqrt{-\triangle(s)} \le \sqrt{4k-1}(a(s)+d(s)) = 2\sqrt{4k-1}\mathrm{Re}\,\lambda_j(s)$, $j = 1, 2$.

В обох випадках $\lambda_j(s) \in S_{-1,\varphi}$, $s \ge 0$, при деякому $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

При $\lambda \notin S_{-1,\varphi}$ маємо

$$((A-\lambda I)^{-1}z)(s) = \left(\frac{(d(s)-\lambda)z_1(s) - b(s)z_2(s)}{(\lambda-\lambda_1(s))(\lambda-\lambda_2(s))}, \frac{-c(s)z_1(s) + (a(s)-\lambda)z_2(s))}{(\lambda-\lambda_1(s))(\lambda-\lambda_2(s))}\right), \quad s \ge 0.$$

Додавши оцінки норм компонент цього вектора, отримаємо потрібну рівність для функції G.

Перевірка того, що G належить Ψ, аналогічна доведенню теореми 1 з роботи [8].

Теорему 2 доведено.

Приклад 3. Нехай $a(s) = d(s) = (s+1)e^s$, $b(s) = e^{2s}$, $c(s) = 0$, $s \ge 0$. Тоді умови леми виконано і при $\mathrm{Re}\,\lambda > 1$ маємо

$$\sup_{s\ge 0}\frac{|a(s)-\lambda| + |d(s)-\lambda| + |b(s)| + |c(s)|}{|\lambda^2 - (a(s)+d(s))\lambda(s) + (a(s)d(s) - b(s)c(s))|} =$$

$$= \sup_{s\ge 0}\frac{2|(s+1)e^s - \lambda| + e^{2s}}{|\lambda - (s+1)e^s|^2} \le \sup_{s\ge 0}\frac{2}{|\lambda - (s+1)e^s|} + \sup_{s\ge 0}\frac{e^{2s}}{|\lambda-(s+1)e^s|^2} \le$$

$$\le \frac{2}{|\mathrm{Im}\,\lambda|} + \frac{|\lambda|^2}{|\lambda - (1+\ln|\lambda|)|\lambda||^2} \le \frac{2}{|\mathrm{Im}\,\lambda|} + \frac{1}{\ln|\lambda|}.$$

Також $\exists C > 0\ \forall\lambda \notin S_{-1,\varphi}, \mathrm{Re}\,\lambda \le 1 : \|(A-\lambda I)^{-1}\| \le \dfrac{C}{|\lambda|+1}$.

З іншого боку, при $\mathrm{Re}\,\lambda > 1$, вибираючи $z_1 \in C([0,+\infty))$, $z_1(s) = 0$, $|s - \ln|\lambda|| > 1$, $\|z_1\| = 1$, $z_1(|\lambda|) = 1$, і покладаючи $z_2(s) = z_1(s)\dfrac{\lambda-(s+1)e^s}{e^{2s}}$, отримуємо

$$\|z\| \le \frac{(\ln|\lambda|+2)}{|\lambda|}, \quad \|(A-\lambda I)z\| \ge \frac{(|\lambda|(\ln|\lambda|+1) - \mathrm{Re}\,\lambda)^2}{|\lambda|^2},$$

тобто

$$\forall\varphi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ \exists C_1 = C_1(\varphi) > 0, \quad C_2 = C_2(\varphi) > 0\ \forall\lambda,\ |\arg\lambda| \in \left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right):$$

$$\frac{C_1}{\ln(|\lambda|+2)} \le \|(A-\lambda I)^{-1}\| \le \frac{C_2}{\ln(|\lambda|+2)}.$$

4. Інтегро-диференціальне рівняння. У цьому пункті на прикладі деякого модельного інтегро-диференціального рівняння параболічного типу показано, як теорію G-секторіальних операторів можна застосувати для розв'язання подібних рівнянь.

Нехай $g \in L_2([0,2\pi])$, $h \in C([0,2\pi])$.

Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,s) = -\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(t,s) + \int\limits_0^{2\pi} g(s-\tau)h(s)\frac{\partial^4 z}{\partial \tau^4}(t,\tau)d\tau + y(t,s), \quad t \geq 0, \quad s \in [0,2\pi],$$

з крайовими умовами

$$\frac{\partial^k z}{\partial s^k}(t,0) = \frac{\partial^k z}{\partial s^k}(t,2\pi), \quad k = 0,1,2,3,$$

де y — відома функція, яка неперервна за змінною t і належить класу $L_2([0,2\pi])$ за змінною s, z — шукана функція.

Покладемо $X_0 := L_2([0,2\pi])$. Рівняння можна записати у вигляді

$$x'(t) = -Ax(t) + u(t), \quad t \geq 0,$$

де $u(t) = y(t,\cdot)$, $t \geq 0$, — відома функція з класу $C([0,+\infty), X_0)$, $x(t) = z(t,\cdot)$, $t \geq 0$, — шукана функція з класу $C([0,+\infty), X_0) \cap C^1((0,+\infty), X_0)$, $A : D(A) \subset X_0 \to X_0$ — лінійний оператор, визначений формулою

$$(Az)(s) = -z''(s) + \int\limits_0^{2\pi} g(s-\tau)h(s)z''''(\tau)\,d\tau, \quad s \geq 0, \quad z \in D(A),$$

$$D(A) = \left\{ z | z^{(j)}(0) = z^{(j)}(2\pi),\ j = 0,1,2,3,\ Az \in X_0 \right\}.$$

Наведемо одну з можливих достатніх умов, яка гарантує, що оператор A є G-секторіальним.

Теорема 3. *Нехай* $h(s) = e^{is}$, $g(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_{2k-1}e^{i(2k-1)s}$, $s \in [0,2\pi]$, $g_{2k-1} \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *довільне. Тоді оператор* A *є* G*-секторіальним при* $a = 0$, *де*

$$G(t) := \sup_{\lambda \notin S_{0,\varphi}, |\lambda| \geq t} \sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{m^4 g_{2m-1}}{|4m^2 - \lambda|^2}.$$

Доведення. Нехай $v \in X_0$, $\lambda \notin S_{0,\varphi}$. Розв'язок $z \in X_0$ рівняння $(A - \lambda I)z = v$ шукатимемо у вигляді

$$z(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z_k e^{iks}, \quad s \in [0,2\pi].$$

Тоді, поклавши $g_{2m} := 0$, $m \in \mathbb{Z}$, отримаємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^2 - \lambda) z_k e^{iks} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^4 g_k z_k e^{i(k+1)s} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k e^{iks}.$$

При кожному $k = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, маємо систему

$$(k^2 - \lambda)z_k + (k-1)^4 g_{k-1} z_{k-1} = v_k,$$

$$((k-1)^2 - \lambda)z_{k-1} = v_{k-1}.$$

Отже, при $k = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, і $\lambda \notin S_{0,\varphi}$

$$z_k = \frac{v_k((k-1)^2 - \lambda) - (k-1)^4 g_{k-1} v_{k-1}}{((k-1)^2 - \lambda)(k^2 - \lambda)},$$

$$z_{k-1} = \frac{v_{k-1}}{(k-1)^2 - \lambda}.$$

Звідси випливає, що $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |z_k|^2 < +\infty$ і

$$\|z\| \le \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda - n^2|} \|v\| + \sup_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(2m-1)^4 |g_{2m-1}|}{((2m-1)^2 - \lambda)(4m^2 - \lambda)} \|v\| \le$$

$$\le C \|v\| \sup_{m \in \mathbb{Z}} \frac{m^4 g_{2m-1}}{|4m^2 - \lambda|^2},$$

де стала C залежить лише від оператора A та кута φ.

Перевірка того, що G належить Ψ, аналогічна доведенню теореми 1 з роботи [8].

Теорему 3 доведено.

Приклад 4. Якщо

$$g_{2m-1} = \frac{1}{\sqrt{|m|+1}\,\ln(m^2+2)}, \quad m \in Z,$$

то з огляду на теорему можна покласти

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}\,\ln(t+2)}, \quad t \ge 0.$$

При цьому, як і в попередніх прикладах, можна показати, що оператор не буде G-секторіальним, якщо замінити функцію G на довільну функцію $G_1(t) = o(G(t))$, $t \to +\infty$.

5. Висновки. Для кількох типів диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу показано, що їх можна подати у вигляді лінійних диференціальних рівнянь першого порядку в банаховому просторі з G-секторіальним операторним коефіцієнтом та застосувати відомі методи розв'язання.

1. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
4. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Мир, 1962.

5. *Сильченко Ю. Т., Соболевский П. Е.* Разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с неплотно заданным операторным коэффициентом, порождающим полугруппу с особенностью // Сиб. мат. журн. — 1986. — **27**, № 4. — С. 93 – 104.
6. *Сильченко Ю. Т.* Об одном классе полугрупп // Функцион. анализ и его прил. — 1999. — **33**, № 4. — С. 90 – 93.
7. *Якубов С. М.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. — Баку, 1985.
8. *Городний М. Ф., Чайковский А. В.* Об одном обобщении понятия секториального оператора // Мат. сб. — 2006. — **197**, № 7. — С. 29 – 46.
9. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. — М.: 1966.

Одержано 02.06.10,
після доопрацювання — 05.03.11