УДК 517.98

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Ю. В. Ільченко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 7

We find sufficient conditions for existence and uniqueness of a solution bounded on the real axis of an abstract linear first order differential equation with delay in the argument for the case of an unbounded operator coefficient.

Получены достаточные условия существования и единственности ограниченного на оси решения абстрактного линейного дифференциального уравнения первого порядка с запаздыванием аргумента в случае неограниченного операторного коэффициента.

1. Вступ та постановка задачі. Нехай $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір із нульовим елементом $\vec{0}$, I — одиничний оператор у просторі $\mathbf{B}$, $L(\mathbf{B})$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють з простору $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$. Розглянемо диференціальне рівняння з запізненням аргументу вигляду

$$x'(t) = A_1x(t) + A_2x(t-1) + y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ — шукана функція, $y \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ — відома, A_2 — лінійний оператор, $A_2 : D(A_2) \to \mathbf{B}$, $D(A_2) \subset \mathbf{B}$, $A_1 \in L(\mathbf{B})$, A_1 і A_2 комутують між собою.

Відомо [1], що якщо A_1 — нульовий оператор, а A_2 — обмежений, то умова

$$\{ite^{it} |\, t \in \mathbb{R}\} \cap \sigma(A_2) = \varnothing$$

є необхідною і достатньою для того, щоб рівняння (1) мало для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$. У цій роботі знайдено умови існування і єдиності обмеженого розв'язку рівняння (1) у випадку ненульового оператора $A_1 \in L(\mathbf{B})$ та необмеженого оператора $A_2 : D(A_2) \to \mathbf{B}$, $D(A_2) \subset \mathbf{B}$.

2. Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай рівняння (1) має для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$. Тоді*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \ i\alpha e^{i\alpha} \notin \sigma(e^{i\alpha}A_1 + A_2) \tag{2}$$

і

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \|(e^{i\alpha}A_1 + A_2 - i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1}\| < +\infty. \tag{3}$$

© Ю. В. Ільченко, 2012

Якщо, додатково, для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ *обмежений розв'язок* $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ *має обмежену похідну, то*

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \|\alpha(e^{i\alpha}A_1 + A_2 - i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1}\| < +\infty. \tag{4}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок існування розв'язків з обмеженою похідною. Нехай $X_1 = \{x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{B}) | \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty < +\infty\}$ — комплексний банахів простір із нормою $\|x\|_1 = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$. Введемо оператор $J : D(J) \subset X_1 \to C(\mathbb{R}, \mathbf{B})$, що визначається за формулою

$$(Jx)(t) := x'(t) - A_1 x(t) - A_2 x(t-1), \quad t \in \mathbb{R},$$

$x \in D(J) := \{x \in X_1 | \ A_2 x \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B})\}$. За умовою цей оператор є бієкцією, отже, за теоремою Банаха має неперервний обернений, тому

$\forall\, y \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B})\ \exists!\, x_y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{B}) : x_y'(t) = A_1 x_y(t) + A_2 x_y(t-1) + y(t), t \in \mathbb{R}$,

$\exists\, C > 0\ \forall\, y \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B}) : \|x_y\|_1 \le C\|y\|$.

Розглянемо для довільного елемента $b \in \mathbf{B}$ та довільного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ функцію $y(t) = e^{i\alpha t} b$, $t \in \mathbb{R}$. Виконавши у рівнянні (1) заміну $z(t) = e^{-i\alpha t} x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, отримаємо еквівалентне рівняння

$$z'(t) + (i\alpha I - A_1) z(t) = A_2 z(t-1) e^{-i\alpha} + b, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Довільна функція $g(t) := z(t+k)$, $k \in \mathbb{R}$, тобто отримана зсувом із функції z, є розв'язком цього рівняння. Тому з єдиності розв'язку випливає, що функція z є сталою.

Отже,

$$\forall\, b \in \mathbf{B}\ \exists!\, z_0 = -e^{-i\alpha} z(0) \in \mathbf{B} : \ b = (i\alpha I - A_1 - A_2 e^{-i\alpha}) z(0) = (e^{i\alpha}A_1 + A_2 - i\alpha e^{i\alpha}I) z_0,$$

тому виконується умова (2).

Крім того,

$$\begin{aligned} \|\alpha(e^{i\alpha}A_1 + A_2 - i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1} b\| &= \| \left((e^{i\alpha}A_1 + A_2)(e^{i\alpha}A_1 + A_2 - i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1} - I \right) b\| \le \\ &\le \|(e^{i\alpha}A_1 + A_2) x_y\|_\infty + \|b\| \le \|y\|_\infty + \|x_y'\|_\infty + \|b\| \le \\ &\le \|x_y\|_1 + \|y\|_\infty + \|b\| \le (C+1)\|y\|_\infty + \|b\| = (C+2)\|b\|. \end{aligned}$$

Оскільки $\alpha \in \mathbb{R}$ є довільним, то маємо

$$\|(e^{i\alpha}A_1 + A_2) z_0\| = \|(e^{i\alpha}A_1 + A_2)(e^{i\alpha}A_1 + A_2 - i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1} b\| \le (C+1)\|b\|,$$

тобто виконується умова (4). У випадку розв'язків, похідна яких не обов'язково обмежена, формули (2) та (3) встановлюються аналогічно вищенаведеному, якщо простір $\{x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{B}) | \ \|x\|_\infty < +\infty\}$ розглядати з рівномірною нормою.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай виконується умова $\|A_1\| < \pi$. Тоді якщо відстань між множинами $\{z + i\alpha e^{i\alpha} | \, |z| \leq \|A_1\|, \alpha \in \mathbb{R}\}$ та $\sigma(A_2)$ є додатною, то при кожному $\alpha \in \mathbb{R}$ оператор $A_2 + e^{i\alpha}A_1 - i\alpha e^{i\alpha}I$ є неперервно оборотним.*

Доведення. З умови випливає, що

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall z : \; |z| \leq \|A_1\| + \varepsilon, \; \forall \alpha \in \mathbb{R} : \; z + i\alpha e^{i\alpha} \notin \sigma(A_2).$$

Розглянемо функцію від оператора A_1 :

$$(A_2 + e^{i\alpha}A_1 - i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (A_2 + e^{i\alpha}\lambda - i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1}(A_1 - \lambda I)^{-1} \, d\lambda,$$

де Γ — деяка крива, що пробігається проти годинникової стрілки та охоплює спектр оператора A_1 таким чином, що

$$\forall \lambda \in \Gamma : \; |\lambda| \leq \|A_1\| + \varepsilon.$$

З вищевикладеного випливає, що $(A_2 - (-e^{i\alpha}\lambda + i\alpha e^{i\alpha})I)^{-1}$ існує для довільного $\lambda \in \Gamma$, тоді $(A_2 + e^{i\alpha}A_1 - i\alpha e^{i\alpha}I)$ є неперервно оборотним оператором.

Лему 2 доведено.

Нехай $\|A_1\| < \pi$. Позначимо через U_n, $n \geq 1$, обмежені зв'язні відкриті множини, об'єднання яких є множиною $\mathbb{C} \setminus \{ite^{it} - z | \; t \in \mathbb{R}, |z| \leq \|A_1\| + 2\delta\}$, де $\delta \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ фіксоване, пронумеровані у порядку віддалення від нуля, через Γ_n, $n \geq 1$, їхні межі. Додатково введемо наступні позначення: V_n, $n \geq 1$, — обмежені зв'язні відкриті частини, на які крива $\{ite^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ розбиває множину $\mathbb{C}$, Ω_n, $n \geq 1$, — їхні межі, а Ω'_n, $n \geq 1$, — криві, що пробігаються проти годинникової стрілки та обмежують області $\bigcup_{k=1}^{n} V_k$, $n \geq 1$ відповідно. Тоді $U_n \subset V_n$ і нескладно перевірити, що

$$r := \inf_{n \geq 3} \left(\inf_{z \in \Omega'_n} \frac{|z|}{n} \right) > 0, \quad l := \sup_{n \geq 1} \frac{|\Omega'_n|}{n} < +\infty. \tag{5}$$

Тут $|\Omega'_n|$ — довжина кривої Ω'_n.

Лема 3. *Нехай виконується умова*

$$\sigma(A_2) \cap \{i\alpha e^{i\alpha} - z | \, |z| \leq \|A_1\|, \alpha \in \mathbb{R}\} = \varnothing. \tag{6}$$

Тоді існує послідовність проекторів $\{P_n : \; n \geq 1\}$ у банаховому просторі $\mathbf{B}$ така, що:

1) $P_jP_k = P_kP_j = 0$, $j \neq k$;

2) при кожному $n \in \mathbb{N}$ підпростір $\mathbf{B}_n = P_n\mathbf{B}$ є інваріантною множиною для оператора A_2;

3) при кожному $n \in \mathbb{N}$ звуження $A_{2,n}$ оператора A_2 на підпростір $\mathbf{B}_n = P_n\mathbf{B}$ є обмеженим оператором зі спектром $\sigma_n = \sigma(A_2) \cap V_n$;

4) якщо виконується умова (4), то $\sum_{k=1}^{\infty} A_2^{-1}P_k = A_2^{-1}$, якщо додатково величина $\varepsilon_n := \sup_{z \in \Omega'_n} \|A_2(A_2 - zI)^{-1}\| \to 0$, $n \to \infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = I$.

Доведення. Покладемо

$$P_n := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega_n}(A_2-\lambda I)^{-1}d\lambda, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Тоді твердження 1 – 3 леми випливають з результатів [3, с. 445]. Оскільки при великих $n\in\mathbb{N}$ виконуються рівність

$$A_2^{-1}-A_2^{-1}\sum_{k=1}^{n}P_k = A_2^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega'_n}(\lambda^{-1}I+(A_2-\lambda I)^{-1})d\lambda\right) =$$

$$= A_2^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Omega'_n}A_2\lambda^{-1}(A_2-\lambda I)^{-1}d\lambda\right)$$

і нерівність (4), то для великих за модулем $\alpha\in\mathbb{R}$ має місце рівність

$$(A_2-i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1} = (A_2+e^{i\alpha}A_1-i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\alpha}A_1)^n(A_2+e^{i\alpha}A_1-i\alpha e^{i\alpha}I)^{-n}.$$

Тому

$$\exists K>0\;\forall\alpha\in\mathbb{R}:\;\|A_2(A_2-i\alpha e^{i\alpha}I)^{-1}\|\le K.$$

Отже, маємо

$$\left\|A_2^{-1}-\sum_{k=1}^{n}A_2^{-1}P_k\right\| = \frac{1}{2\pi}\left\|\int\limits_{\Omega'_n}A_2\lambda^{-2}(A_2-\lambda I)^{-1}d\lambda\right\| \le \frac{K}{2\pi n^2r^2}\,nl\to 0, \quad n\to\infty.$$

Якщо $\varepsilon_n\to 0$, $n\to\infty$, то

$$\left\|I-\sum_{k=1}^{n}P_k\right\| = \frac{1}{2\pi}\left\|\int\limits_{\Omega'_n}A_2\lambda^{-1}(A_2-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right\| \le \frac{\varepsilon_n}{2\pi nr}\,nl\to 0, \quad n\to\infty.$$

Лему 3 доведено.

Позначимо через γ межу круга з центром у точці $(0;0)$, радіусом $\|A_1\|+\delta$ та напрямком обходу проти годинникової стрілки, де δ було визначено вище, $S:=\{z\in\mathbb{C}|\;|z|=1\}$.

Лема 4. *Нехай* $\delta<\dfrac{\pi\sqrt{e}}{2}$. *Тоді мають місце наступні твердження:*

1) $\exists L>0\;\forall n\ge 1\;\forall\lambda\in\Gamma_n\;\forall\mu\in\gamma\;\forall z\in S:\;|1-ze^{\mu+\lambda z}|\ge L$;

2) $\exists L_1>0\;\forall n\ge 1\;\forall\lambda\in\Gamma_n\;\forall\mu\in\gamma\;\forall z\in S\;\forall\theta\in[0,1]:\;\left|\frac{e^{(\mu+\lambda z)\theta}}{1-ze^{\mu+\lambda z}}\right|\le L_1$.

Доведення. Введемо позначення $\mu z^{-1} + \lambda := re^{i\alpha}$, $\eta := \mu z^{-1} + \lambda$, $z := e^{i\varphi}$, $R := \|A_1\|$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Оскільки точки λ лежать на кривій Γ_n, а μ є точками кривої γ, то точки вигляду $\mu z^{-1} + \lambda$ не належать $\{ite^{it} - w|\, |w| < \delta\}$, тобто

$$\forall t \in \mathbb{R}\, \forall w \in \mathbb{C}\, |w| < \delta : \; re^{i\alpha} \neq ite^{it} - w.$$

З огляду на те, що при $r_k = \alpha - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ або $r_k = \alpha + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, маємо $r_k e^{i\alpha} = ir_k e^{ir_k}$ або $-r_k e^{i\alpha} = -ir_k e^{-ir_k}$ відповідно, звідси отримуємо

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \; r \notin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} + 2\pi k - \delta, \alpha - \frac{\pi}{2} + 2\pi k + \delta\right) \tag{7}$$

і

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \; r \notin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi k - \delta, \alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi k + \delta\right). \tag{8}$$

Тепер запишемо

$$|1 - ze^{\mu+\lambda z}| = \left|1 - e^{i\varphi + re^{i(\alpha+\varphi)}}\right| = \left((1 - e^{r\cos(\alpha+\varphi)})^2 + 2e^{r\cos(\alpha+\varphi)}(1 - \cos(\varphi + r\sin(\alpha+\varphi)))\right)^{1/2}$$

і знайдемо оцінки для доданків у правій частині рівності. Припустимо, що виконується умова

$$|1 - e^{r\cos(\alpha+\varphi)}| < \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Тоді

$$-\frac{\varepsilon}{r} \leq \frac{\ln(1-\varepsilon)}{r} < \cos(\alpha+\varphi) < \frac{\ln(1+\varepsilon)}{r} \leq \frac{\varepsilon}{r},$$

звідки

$$\exists\, C_1 > 0\; \exists l \in \mathbb{Z} : \; -\frac{C_1\varepsilon}{r} \leq \alpha + \varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi l \leq \frac{C_1\varepsilon}{r},$$

або

$$-\frac{C_1\varepsilon}{r} \leq \frac{\pi}{2} - \alpha - \varphi + 2\pi l \leq \frac{C_1\varepsilon}{r}.$$

Крім того,

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{2r^2} \leq \sin(\alpha+\varphi) \leq 1 \quad \text{або} \quad -1 \leq \sin(\alpha+\varphi) \leq -1 + \frac{\varepsilon^2}{2r^2}.$$

Отже, оскільки

$$|r + r\sin(\alpha+\varphi)| \leq \frac{\varepsilon^2}{2r} \quad \text{і} \quad |\alpha + \frac{\pi}{2} + \varphi + 2\pi l| \leq \frac{C_1\varepsilon}{r}$$

або

$$|r - r\sin(\alpha+\varphi)| \leq \frac{\varepsilon^2}{2r} \quad \text{і} \quad |-\alpha + \frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi l| \leq \frac{C_1\varepsilon}{r},$$

то, використавши (7) та (8), отримаємо, що:

а) при $|\sin(\alpha+\varphi)-1|<\varepsilon$ мають місце наступні нерівності:

$$|\varphi+r\sin(\alpha+\varphi)-2\pi l| = \left|\left(r-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-(r-r\sin(\alpha+\varphi))-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\varphi+2\pi l\right)\right| \geq$$

$$\geq |r-\alpha+\frac{\pi}{2}|-|r-r\sin(\alpha+\varphi)|-\left|\frac{\pi}{2}-\alpha-\varphi+2\pi l\right| \geq$$

$$\geq \delta-\frac{\varepsilon^2}{2r}-\frac{C_1\varepsilon}{r};$$

б) при $|\sin(\alpha+\varphi)+1|<\varepsilon$ виконується

$$|\varphi+r\sin(\alpha+\varphi)-2\pi l| = \left|\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-r\right)-(-r-r\sin(\alpha+\varphi))-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\varphi+2\pi l\right)\right| \geq$$

$$\geq \left|\frac{\pi}{2}+\alpha-r\right|-|-r-r\sin(\alpha+\varphi)|-\left|\frac{\pi}{2}+\alpha+\varphi+2\pi l\right| \geq$$

$$\geq \delta-\frac{\varepsilon^2}{2r}-\frac{C_1\varepsilon}{r}.$$

Аналогічно одержимо

$$|\varphi+r\sin(\alpha+\varphi)+2\pi k| \geq \delta-\frac{\varepsilon^2}{2r}-\frac{C_1\varepsilon}{r}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Використавши рівність $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, а також отриману вище та нерівність $\sin x\geq \frac{2}{\pi}x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, будемо мати

$$2e^{r\cos(\alpha+\varphi)}(1-\cos(\varphi+r\sin(\alpha+\varphi))) \geq \frac{4}{\pi^2 e}\left(\delta-\frac{\varepsilon^2}{2r}-\frac{C_1\varepsilon}{r}\right)^2.$$

З викладеного вище випливає

$$|1-ze^{\eta z}| \geq \min\left\{\varepsilon;\frac{2}{\pi\sqrt{e}}\left(\delta-\frac{\varepsilon^2}{2r}-\frac{C_1\varepsilon}{r}\right)\right\} \geq \min\left\{\varepsilon;\frac{2\delta}{\pi\sqrt{e}}-(1+2C_1)\frac{\varepsilon}{\pi r\sqrt{e}}\right\}.$$

При виконанні умови

$$(\pi r\sqrt{e}+1+2C_1)\frac{\varepsilon}{\pi r\sqrt{e}}-\frac{2\delta}{\pi\sqrt{e}}=0$$

отримана оцінка буде оптимальною, тобто

$$\varepsilon=\frac{2\delta r}{\pi r\sqrt{e}+1+2C_1}.$$

Отже, маємо

$$|1 - ze^{\eta z}| \geq \varepsilon \quad \text{і} \quad \lim_{r\to\infty} \varepsilon = \frac{2\delta}{\pi\sqrt{e}}.$$

Звідси випливає виконання пункту 1 леми.

Далі оцінимо функцію $\dfrac{e^{\mu+\lambda z}}{1 - ze^{\mu+\lambda z}}$. Розглянемо такі випадки:

1) $e^{r\cos(\alpha+\varphi)} \geq 2$, тоді $\left(1 - e^{r\cos(\alpha+\varphi)}\right)^2 \geq \left(\dfrac{e^{r\cos(\alpha+\varphi)}}{2}\right)^2$ і

$$\left|\frac{e^{\eta z\theta}}{1 - ze^{\eta z}}\right| \leq \frac{2e^{r\cos(\alpha+\varphi)}}{e^{r\cos(\alpha+\varphi)}} = 2;$$

2) $e^{r\cos(\alpha+\varphi)} < 2$, тоді за п. 1 леми

$$\left|\frac{e^{\eta z\theta}}{1 - ze^{\eta z}}\right| \leq \frac{e^{r\theta\cos(\alpha+\varphi)}}{L} \leq \frac{2}{L}.$$

Лему 4 доведено.

3. Основні результати. Наступна теорема для рівняння (1) встановлює необхідну умову існування та єдиності обмеженого розв'язку $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbf{B})$ з обмеженою похідною для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbb{R}; \mathbf{B})$.

Теорема 1. *Якщо рівняння (1) має для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbb{R}; \mathbf{B})$ єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbf{B})$ з обмеженою похідною, то оператор A_2 є обмеженим і виконуються умови (2) та (4).*

Доведення. Припустимо, що спектр оператора A_2 є необмеженим, тоді існує послідовність його точок $\{\beta_k : k \geq 1\}$, $\beta_k \in \sigma(A_2)$ така, що

$$\forall\, C > 0\ \exists n_0 \geq 1\ \forall k \geq n_0 :\ |\beta_k| > C.$$

Згідно з лемою 1 існує $R > 0$ таке, що для всіх $\lambda_1 \in \sigma(A_1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ та $\beta_k \in \sigma(A_2)$, $k \geq 1$, виконується

$$\left|\alpha(e^{i\alpha}\lambda_1 + \beta_k - i\alpha e^{i\alpha})^{-1}\right| \leq R. \tag{9}$$

Очевидно також, що

$$\forall k \geq 1\ \exists \alpha \in \mathbb{R} :\ |\beta_k - i\alpha e^{i\alpha}| \leq \pi.$$

Тоді

$$\left|\alpha(e^{i\alpha}\lambda_1 + \beta_k - i\alpha e^{i\alpha})^{-1}\right| = \left|i\alpha e^{i\alpha}(e^{i\alpha}\lambda_1 + \beta_k - i\alpha e^{i\alpha})^{-1}\right| =$$

$$= \left|(e^{i\alpha}\lambda_1 + \beta_k)(e^{i\alpha}\lambda_1 + \beta_k - i\alpha e^{i\alpha})^{-1} - 1\right| \geq \frac{C - \|A_1\|}{\pi + \|A_1\|} - 1.$$

Отримали суперечність з нерівністю (9). Отже, спектр оператора A_2 є обмеженим. Якщо Γ — деяка крива, що охоплює цей спектр і містить всередині точку 0, $\sigma(A_2) \subset \subset \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < N\}$, то маємо

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} A_2(A_2-\lambda I)^{-1}d\lambda\right)x = A_2\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(A_2-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right)x =$$

$$= A_2\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{-1}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}A_2\int\limits_{\Gamma}\lambda^{-1}(A_2-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\right)x =$$

$$= A_2\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{-1}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}A_2\int\limits_{|\lambda|=N}\lambda^{-1}(A_2-\lambda I)^{-1}d\lambda\right)x =$$

$$= A_2(I-O)x = A_2x, \quad x \in \mathbf{B}.$$

Звідси випливає, що $A_2 = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma} A_2(A_2-\lambda I)^{-1}d\lambda$ — обмежений оператор.

Теорему 1 доведено.

Наступна теорема для рівняння (1) встановлює достатні умови існування та єдиності обмеженого розв'язку $x \in C^1(\mathbb{R};\mathbf{B})$ з обмеженою похідною для певного класу обмежених функцій $y \in C(\mathbb{R};\mathbf{B})$.

Теорема 2. *Нехай $y \in C(\mathbb{R},\mathbf{B})$ — обмежена функція і виконуються умови:*

1) $\exists\delta \in \left(0;\dfrac{\pi\sqrt{e}}{2}\right) : \sigma(A_2) \cap \{i\alpha e^{i\alpha} - z | \, |z| \le \|A_1\| + \delta, \ \alpha \in \mathbb{R}\} = \varnothing$,

2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Gamma_n} \|(A_{2,n}-\lambda I)^{-1}\||d\lambda| < +\infty$, *де $A_{2,n}$ — оператори з леми 3,*

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\|P_n y\|_\infty < +\infty$.

Тоді рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbf{B})$, що має обмежену похідну.

Доведення. З комутовності A_1, A_2 випливає комутовність A_1, $A_{2,n}$, P_n

$$\exists\delta \in \left(0;\frac{\pi\sqrt{e}}{2}\right) \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \sigma(A_{2,n}) \cap \{i\alpha e^{i\alpha} - z | \, |z| \le \|A_1\| + \delta, \ \alpha \in \mathbb{R}\} = \varnothing.$$

Відомо [1], що при кожному $n \in \mathbb{N}$ існує єдиний обмежений розв'язок $x_n \in C^1(\mathbb{R},\mathbf{B})$ рівняння

$$x_n'(t) = A_1 x_n(t) + A_{2,n}x_n(t-1) + P_n y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

до того ж цей розв'язок можна подати у вигляді

$$x_n(t) = \int\limits_{t-1}^{t}\left[e^{(A_1+A_{2,n}M)(t-s)}\left(I - Me^{A_1+A_{2,n}M}\right)^{-1}P_n y\right](s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $(Mx)(t) := x(t-1)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in C(\mathbb{R},\mathbf{B})$.

Розглянемо функцію $\Psi_n(z,\theta) := e^{(A_1+A_{2,n}z)\theta}(I - ze^{A_1+A_{2,n}z})^{-1}$, $z \in S = \{z \in \mathbb{C} \| z| = 1\}$, $\theta \in [0;1]$. Маємо

$$\Psi_n(z,\theta) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{\Gamma_n} e^{(\mu+\lambda z)\theta}(1 - ze^{\mu+\lambda z})^{-1}(A_{2,n} - \lambda I)^{-1}(A_1 - \mu I)^{-1}\,d\lambda\,d\mu.$$

Знайдемо другу похідну функції $\Psi_n(z,\theta)$:

$$(\Psi_n)'_z(z,\theta) = A_{2,n}\theta e^{(A_1+A_{2,n}z)\theta}(I - ze^{A_1+A_{2,n}z})^{-1} +$$
$$+ e^{(A_1+A_{2,n}z)}(zA_{2,n} + I)e^{A_1+A_{2,n}z}(I - ze^{A_1+A_{2,n}z})^{-2} =$$
$$= A_{2,n}\theta\Psi_n(z,\theta) + (zA_{2,n} + I)\Psi_n(z,\theta)\Psi_n(z,1), \quad z \in S, \quad \theta \in [0,1],$$

$$(\Psi_n)''_z(z,\theta) = A_{2,n}\theta(\Psi_n)'_z(z,\theta) + A_{2,n}\Psi_n(z,\theta)\Psi_n(z,1) +$$
$$+ (zA_{2,n} + I)\left((\Psi_n)'_z(z,\theta)\Psi_n(z,1) + \Psi_n(z,\theta)(\Psi_n)'_z(z,1)\right),$$

$$(\Psi_n)''_z(z,\theta) = -\frac{\theta^2}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{\Gamma_n} e^{(\mu+\lambda z)\theta}\lambda^2(1 - ze^{\mu+\lambda z})^{-1}(A_{2,n} - \lambda I)^{-1}(A_1 - \mu I)^{-1}\,d\lambda\,d\mu -$$
$$-\frac{\theta^2}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma}\int_{\Gamma_n} e^{(\mu+\lambda z)(\theta+1)}(\lambda + (z\lambda + 1)\lambda(\theta+1))(1 - ze^{\mu+\lambda z})^{-2} \times$$
$$\times (A_{2,n} - \lambda I)^{-1}(A_1 - \mu I)^{-1}\,d\lambda\,d\mu -$$
$$-\frac{\theta^2}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{\Gamma_n} e^{(\mu+\lambda z)(\theta+2)}(z\lambda + 1)^2(1 - ze^{\mu+\lambda z})^{-3}(A_{2,n} - \lambda I)^{-1}(A_1 - \mu I)^{-1}\,d\lambda\,d\mu.$$

Оскільки

$$A_{2,n} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \lambda(A_{2,n} - \lambda I)^{-1}d\lambda,$$

то з умови 2 теореми та (5) випливає, що $\|A_{2,n}\| = O(n)$, $n \to \infty$, а додатково з леми 4 і з умови 2 теореми одержимо

$$\sup_{\theta\in[0,1]} \|\Psi_n(\cdot,\theta)\| = O(1), \quad n \to \infty,$$

$$\sup_{\theta\in[0,1]} \|(\Psi_n(\cdot,\theta))''_z\| = O(n^2), \quad n \to \infty.$$

В роботі [4] показано, що

$$\exists C > 0: \ \|\Psi_n(M)\| \le C\sqrt{\|\Psi_n\|_\infty \|\Psi''_n\|_\infty},$$

тому

$$\|A_{2,n}x_n\|_\infty \leq \|\Psi_n(M)A_{2,n}\| \, \|P_n y\|_\infty = O(n^2)\cdot\|P_n y\|_\infty, \quad n\to\infty.$$

Покладемо

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Оскільки з умови 3 теореми випливає рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} A_2 x_n$, то існує обмежена функція $A_2 x \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B})$, і функція x задовольняє рівняння (1).

Покажемо, що побудований розв'язок єдиний. Припустимо, що існує такий розв'язок z рівняння (1), що $x \neq z$. Тоді функція $g(t) := x(t) - z(t)$ задовольняє однорідне рівняння, що відповідає (1), тобто

$$g'(t) = A_1 g(t) + A_2 g(t-1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Подіявши на отримане рівняння оператором P_n, $n \in \mathbb{N}$, одержимо

$$P_n g'(t) = P_n A_1 g(t) + P_n A_2 g(t-1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Одержані рівняння розглядаються на просторах B_n, де всі оператори будуть обмеженими, і згідно з [1] матимемо єдиність розв'язку, а отже, $P_n g(t) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тепер будемо розглядати функцію $g(t)$ на всьому просторі $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$. Подіємо на функцію g оператором A_2^{-1} і використаємо рівність $\sum_{k=1}^{\infty} A_2^{-1} P_k = A_2^{-1}$, яка буде мати місце, враховуючи лему 3:

$$A_2^{-1} g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_2^{-1} P_k g(t) = 0.$$

З останнього випливає, що функція $g(t) := x(t) - z(t)$ дорівнює нулю на всьому просторі $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$, а отже, розв'язок єдиний.

Теорему 2 доведено.

4. Висновки. В роботі отримано необхідні умови існування та єдиності обмеженого на осі розв'язку з обмеженою похідною абстактного лінійного диференціального рівняння першого порядку для довільної обмеженої функції та достатні умови для певного класу обмежених функцій.

1. *Чайковський А. В.* Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доп. НАН України. — 2000. — № 8. — С. 33–37.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 592 с.
4. *Чайковський А. В.* Функції від оператора зсуву та їх застосування до різницевих рівнянь // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 10. — С. 1408–1419.

Одержано 27.05.11,
після доопрацювання — 16.09.11