Физика низких температур, 1995, т. 21, № 4, с. 355–389 УДК 537.622.5

Солитоны в низкоразмерных антиферромагнетиках

(Обзор)

Б. А. Иванов, А. К. Колежук

Институт металлофизики НАН Украины, Украина, 252142, г. Киев, пр. Вернадского, 36

Статья поступила в редакцию 25 августа 1994 г.

С единых позиций рассмотрена структура, динамика и термодинамика магнитных солитонов в низкоразмерных антиферромагнетиках (АФМ). Основное внимание уделено тем задачам, для которых в настоящее время имеется экспериментальное подтверждение теории. Анализ проводится на основе простых феноменологических уравнений, описывающих динамику АФМ в терминах единичного вектора антиферромагнетизма, которые в простейшей модели АФМ имеют вид лоренц-инвариантной σ-модели (избранная скорость — фазовая скорость магнонов). Понижение симметрии АФМ при наличии внешнего магнитного поля или при учете взаимодействия Дзялошинского разрушает лоренц-инвариантность. Обсуждается перестройка структуры одномерных солитонов типа кинков при конечной скорости и ее влияние на солитонную термодинамику квазиодномерных магнетиков. Проведено квазиклассическое квантование солитонных решений. Показано, что динамика внутренних степеней свободы кинка в одномерном АФМ имеет квантовую природу, что существенно проявляется при рассмотрении двухпараметрических солитонов типа бионов в легкоосных АФМ. Рассмотрены двумерные топологические солитоны типа локализованных и нелокализованных магнитных вихрей и их вклад в термодинамику двумерных АФМ. Изложено современное состояние проблемы экспериментального обнаружения магнитных солитонов в квазидвумерных АФМ; рассмотрены различные возможные направления дальнейшего поиска.

З єдиних позицій розглянуто структуру, динаміку та термодинаміку магнітних солітонів в низьковимірних антиферомагнетиках (АФМ). Основну увагу приділено тим задачам, для яких на даний момент існує експериментальне підтвердження теорії. Аналіз проводиться на основі простих феноменологічних рівнянь, що описують динаміку АФМ в термінах одиничного вектора антиферомагнетизму. В найпростішому випадку вони зводяться до лоренц-інваріантної σ-моделі (вибрана швидкість — фазова швидкість магнонів). Зниження симетрії АФМ при наявності зовнішнього магнітного поля або врахуванні взаємодії Дзялошинського порушує лоренц-інваріантність. Обговорюється перебудова структури одновимірних солітонів типу кінків при кінцевій швидкості та її вплив на солітонну термодинаміку квазіодновимірних магнетиків. Проведено квазікласичне квантування солітонних розв'язків. Показано, що динаміка внутрішніх ступіней свободи кінка в одновимірному АФМ має квантову природу, що істотньо проявлюється при розгляді двопараметричних солітонів типу біонів в майже легковісних АФМ. Розглянуто двовимірні топологічні солітони типу локалізованих та нелокалізованих магнітних вихорів та їх внесок в термодинаміку двовимірних АФМ. Викладено сучасний стан проблеми експериментального виявлення магнітних солітонів в квазідвовимірних АФМ; розглянуто можливі напрями подальших досліджень.

Содержание

1. Введение 356
2. Эффективные уравнения динамики намагниченности антиферромагнетиков 356
3. Интегралы движения и квазиклассическое квантование солитонов . . . 360
4. Элементарные возбуждения одномерного АФМ — кинки и магноны . . 361
5. Возбужденные состояния кинков в АФМ 362
6. Солитонная термодинамика простой модели 1D АФМ 366
7. Легкоплоскостной АФМ во внешнем магнитном поле 370
8. Классификация неодномерных солитонов 375
9. Локализованные 2D солитоны, их структура и устойчивость 377
10. Солитоны и фазовый переход в двумерных легкоплоскостных магнетиках 380
11. Динамические свойства 2D магнетиков в рамках вихревой феноменологии 383
Литература 387

© Б. А. Иванов, А. К. Колежук, 1995

Введение

В последние годы в физике упорядоченных сред, в частности в физике магнетиков, большое внимание уделяется описанию существенно нелинейных процессов и явлений, а также проблеме низкоразмерных магнетиков. Эти два, на первый взгляд слабо связанные, класса проблем объединяет то, что для их анализа важно использование понятия солитон. Солитоном (в магнетиках) мы будем называть возбуждение поля намагниченности, локализованное в пространстве за счет нелинейности и способное перемещаться, сохраняя свою форму, а также энергию и импульс*. Магнитные солитоны обсуждались в монографиях и обзорах Косевича и др. [1,2], Барьяхтара и Иванова [3], Барьяхтара и др. [4,5], Микешки и Стайнера [6], Изюмова [7], Изюмова и Скрябина [8], см. также сборники статей [9,10]. В физике магнетизма существенным оказывается также свойство топологической устойчивости солитона (см. обзоры Мермина [11], Воловика [12], Минеева [13]).

Исследование магнитных солитонов и их применение в физике низкоразмерных упорядоченных сред более всего развито для моделей скалярного поля (достаточно упомянуть пионерские работы Крумхансла и Шриффера [14] и Микешки [15], в которых анализировались одномерные ($1D$) скалярные модели φ^4 и синус-Гордон соответственно, и Мертенса и др. [16], в которой аналитически исследовалась скалярная модель планарного магнетика). Это же ограничение характерно и для ряда обзоров [7,8]. Однако гейзенберговские магнетики описываются векторными моделями (уравнение Ландау—Лифшица для ферромагнетика (ФМ), σ-модель n-поля для антиферромагнетика (АФМ)), которые могут быть сведены к скалярным только приближенно, что отмечалось, например, в обзорах [2,6]. С другой стороны, в настоящее время накоплен значительный материал о солитонах в $1D$ и $2D$ векторных моделях магнетиков, практически не отраженный в обзорных работах.

Целью настоящего обзора является анализ солитонной физики в низкоразмерных АФМ. Этот анализ включает последовательный вывод эффективных уравнений спиновой динамики классических слабоанизотропных (гейзенберговских) АФМ и систематическое изложение свойств солитонов в АФМ на их основе. Обсуждаются как $1D$, так и $2D$ солитоны, их динамика и топологические свойства. Анализ свойств солитонов используется для описания термодинамических характеристик $1D$ и $2D$ АФМ, прежде всего для исследования солитонных функций отклика.

2. Эффективные уравнения динамики намагниченности антиферромагнетиков

Явление антиферромагнетизма было открыто в середине тридцатых годов и нашло теоретическое объяснение в работах Нееля [17] и Ландау [18]. С точки зрения классической теории, антиферромагнетики содержат несколько (n) магнитных подрешеток, каждая из которых имеет отличную от нуля намагниченность $\mathbf{M}_\alpha$, но суммарная намагниченность АФМ $\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{M}_\alpha$ в основном состоянии равна нулю. Мы ограничимся рассмотрением двухподрешеточного АФМ, в котором $\alpha = 1, 2$, и в основном состоянии $\mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2$, $|\mathbf{M}_1| = |\mathbf{M}_2| = M_0$.

Это определение относится только к классическим АФМ в обменном приближении. Учет магнитного поля $\mathbf{H}$ может приводить к неколлинеарности намагниченностей. Даже при $H = 0$ при наличии так называемого взаимодействия Дзялошинского компенсация намагниченностей не полная, и в основном состоянии АФМ значение $\mathbf{M} \neq 0$, но мало ($|\mathbf{M}| \simeq 10^{-2} M_0$). Такие АФМ называются слабыми ферромагнетиками. Теория слабого ферромагнетизма была построена Дзялошинским [19], микроскопическое описание этого явления на основе одновременного учета обменных и релятивистских взаимодействий предложил Мория [20]. Наличие взаимодействия Дзялошинского или магнитного поля может принципиально менять характер эффективных уравнений для намагниченности АФМ (см. ниже).

Каганов и Цукерник [21], Туров и Ирхин [22] (см. также монографию Ахиезера и др. [23]) предложили описывать динамику АФМ на основе системы n уравнений Ландау—Лифшица для намагниченностей подрешеток $\mathbf{M}_\alpha$. Несмотря на то что в случае АФМ этот подход не может быть строго

* В настоящее время в литературе нет общепринятого понятия солитон. В частности, в математической литературе солитоном часто называют самолокализованное возмущение нелинейного поля, уравнения динамики которого обладают свойством точной интегрируемости. В ряде физических работ солитоном называют элемент статической несоразмерной структуры (решетки солитонов). Использованное нами понятие эквивалентно понятию уединенной волны (solitary wave).

обоснован*, на его основе удалось описать огромное количество экспериментальных данных, касающихся линейных спиновых волн в АФМ (см. монографию Гуревича [24]). Что же касается нелинейных проблем, в частности структуры солитонов, то анализ системы n нелинейных уравнений является весьма сложным (однако некоторые частные решения, описывающие солитоны, могут быть получены [25]).

Более конструктивный путь, позволяющий провести полный анализ проблемы, основан на построении некоторого эффективного уравнения для вектора антиферромагнетизма $\mathbf{l} \propto \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$. Это уравнение было получено Барьяхтаром и Ивановым [26], Андреевым и Марченко [27],Микешкой [28], а впоследствии Халдейном [29] и Аффлеком [30] на основе различных подходов.

Следуя работам [26] и [30], продемонстрируем вывод эффективных уравнений движения АФМ в микроскопическом подходе на примере простейшей $1D$ модели с одноосной анизотропией. Рассмотрим модель $1D$ АФМ, которая описывается гамильтонианом вида

$$\hat{H} = J \sum_l \mathbf{S}_l \mathbf{S}_{l+1} + \sum_l \left\{ K(S_l^z)^2 + B S_l^z S_{l+1}^z \right\}, \quad (1)$$

где $J > 0$ — обменный интеграл; K, B — константы одноионной и межионной анизотропии. Спины $\mathbf{S}_l$ для простоты будем считать классическими векторами длиной s, расположенными в узлах $1D$ решетки (цепочки) с межатомным расстоянием a. (Заметим, что окончательные результаты оказываются справедливыми и для квантовых спинов при последовательном выводе в формализме континуального интегрирования.) Разобьем решетку на димеры (пары соседних узлов) и в центре каждого димера определим нормированные векторы намагниченности $\mathbf{m}$ и антиферромагнетизма $\mathbf{l}$:

$$\mathbf{m}_n = \frac{\mathbf{S}_{2n} + \mathbf{S}_{2n+1}}{2s}, \quad \mathbf{l}_n = \frac{\mathbf{S}_{2n} - \mathbf{S}_{2n+1}}{2s}. \quad (2)$$

При этом векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{l}$ связаны условиями

$$(\mathbf{ml}) = 0, \quad \mathbf{m}^2 + \mathbf{l}^2 = 1, \quad (3)$$

которые следуют из постоянства длин подрешеток АФМ $|\mathbf{M}_1| = |\mathbf{M}_2| = M_0$. Суммарная намагниченность АФМ $\mathbf{M}$ связана с вектором $\mathbf{m}$ соотношением $\mathbf{M} = 2M_0\mathbf{m}$.

В гейзенберговских АФМ при достаточно слабых полях $H \ll H_e$ (H_e — обменное поле) $|\mathbf{m}| \ll |\mathbf{l}| \simeq 1$, и вектор $\mathbf{l}$ можно считать единичным (ниже мы увидим, что предположение о малости $|\mathbf{m}|$ требует выполнения неравенств $K, B \ll J$, а также условий длинноволнового приближения, т.е. малости пространственных и временных производных). Удерживая лишь члены главного порядка малости по $\mathbf{m}$, градиентам и анизотропии, получаем гамильтониан (1) в континуальном приближении:

$$\hat{H} = \int \frac{dx}{a} \left\{ Js^2 \left(2\mathbf{m}^2 + 2a\mathbf{m}\nabla\mathbf{l} + a^2(\nabla\mathbf{l})^2 \right) + \right.$$
$$\left. + (K - B)s^2 l_z^2 \right\}. \quad (4)$$

Переход от гамильтониана к лагранжиану может быть осуществлен разными способами. Наиболее изящно это можно проделать с помощью метода когерентных состояний [31], при этом лагранжиан имеет вид

$$L = \int \frac{dx}{a} s\hbar\mathbf{m}\,[\mathbf{l}, \dot{\mathbf{l}}] - \hat{H}, \quad (5)$$

где первый член представляет собой так называемую фазу Берри [32] для адиабатического движения спинов, $\dot{\mathbf{l}} = \partial\mathbf{l}/\partial t$.

Можно упростить выражение (5), исключив $\mathbf{m}$ и получив эффективный лагранжиан, зависящий только от $\mathbf{l}$. При учете связей (3) получим, что намагниченность АФМ выражается через $\mathbf{l}$ и его производные

$$\mathbf{m} = \left(\hbar/4Js\right)[\mathbf{l}, \dot{\mathbf{l}}] - (a/2)\nabla\mathbf{l}. \quad (6)$$

Особо отметим появление члена, пропорционального $\nabla\mathbf{l}$. Его возникновение связано с трансляционной неинвариантностью разбиения на димеры с учетом того обстоятельства, что переход от спинов $\mathbf{S}_l$ к векторам $\mathbf{m}$, $\mathbf{l}$ должен быть проведен так, чтобы сохранить число степеней свободы [30].

Подставляя (6) в (5), получаем плотность эффективного лагранжиана

$$L = \int dx\, \tilde{L},$$

* Существенные отклонения от простой картины, полученной в рамках этого подхода, возникают при анализе квантовых низкоразмерных АФМ. Например, для спиновой цепочки с $s = 1/2$ значение спина элементарного возбуждения равно $1/2$, а не единице, как для магнона [48], для изотропного $1D$ АФМ с $s = 1$ спектр магнонов обладает щелью [29] и т.д. Для $2D$ АФМ также существуют примеры неадекватности данного подхода, например АФМ в состоянии с резонирующими валентными связями [83]. По-видимому, только для трехмерных АФМ можно быть уверенным в справедливости простой модели подрешеток и адекватности описания динамики АФМ на основе уравнений для $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$. С другой стороны, учет магнитной анизотропии также расширяет область применимости этого подхода.

в одномерном случае

$$\widetilde{L} = \frac{\hbar^2}{8aJ}\dot{\mathbf{l}}^2 - \frac{1}{2}Js^2a(\nabla\mathbf{l})^2 -$$

$$- \frac{1}{a}(K-B)s^2l_z^2 - \frac{\hbar s}{2}\left(\mathbf{l}[\dot{\mathbf{l}}, \nabla\mathbf{l}]\right), \qquad (7)$$

где $\mathbf{l}$ уже считается единичным, $\mathbf{l}^2 = 1$. Отметим, что последнее слагаемое (так называемый топологический член) в $1D$ случае играет особую роль. Это слагаемое является полной производной и не меняет классических уравнений движения, однако при квантовом рассмотрении оно дает добавку к действию $A = \int Ldt$ вида $2\pi\hbar sQ$, где Q — целое число (индекс Понтрягина или топологический инвариант отображения плоскости $\{x, t\}$ на сферу $\{\mathbf{l}^2 = 1\}$, см. разд. 8) и приводит к тонким различиям между одномерными АФМ с целым и полуцелым спином [33].

В случае двухподрешеточного АФМ изложенный выше вывод легко обобщается на случай наличия магнитного поля или взаимодействия Дзялошинского, учета взаимодействия следующих за ближайшими соседей и т.п., а также большего числа измерений. Поскольку учет членов типа $\mathbf{m}\nabla\mathbf{l}$ для неодномерных АФМ не приводит к таким существенным следствиям, как для $1D$ АФМ, опустим эти слагаемые. В этом случае для гамильтониана АФМ можно использовать хорошо известное выражение $W\{\mathbf{m}, \mathbf{l}\}$, описывающее энергию АФМ как функционал $\mathbf{m}$ и $\mathbf{l}$ в рамках феноменологической теории [1,3,34]:

$$W\{\mathbf{m}, \mathbf{l}\} = M_0^2 \int dV \left\{\frac{1}{2}\delta\mathbf{m}^2 + \frac{1}{2}\alpha(\nabla\mathbf{l})^2 + \right.$$

$$\left. + w_a(\mathbf{l}) - 2\mathbf{mh} + D_{ik}m_i l_k\right\}. \qquad (8)$$

Здесь $M_0 = g\mu_B s/v_0$ — модуль намагниченности подрешетки; g — фактор Ланде; μ_B — магнетон Бора; v_0 — объем элементарной ячейки магнитной решетки; dV имеет размерность объема, в двумерном и одномерном случаях равно (толщине слоя)$\cdot d^2x$ и (сечению цепочки)$\cdot dx$ соответственно. Феноменологические константы δ, α описывают однородное и неоднородное обменное взаимодействие. Для микроскопического гамильтониана (1) параметры δ и α определяются формулами

$$\delta = \frac{16JaA_0}{(g\mu_B)^2}, \quad \alpha = \frac{4Ja^3A_0}{(g\mu_B)^2}, \qquad (8а)$$

где A_0 — площадь поперечного сечения, приходящаяся на одну цепочку; $v_0 = 2A_0a$. Функция $w_a(\mathbf{l})$ определяет энергию магнитной анизотропии, для гамильтониана (1)

$$w_a = -\frac{1}{2}\beta l_z^2, \quad \beta = \frac{8(K-B)aA_0}{(g\mu_B)^2}. \qquad (8б)$$

При записи (8) учтена также зеемановская энергия спинов во внешнем магнитном поле $\mathbf{H} = \mathbf{h}M_0$, плотность которой определяется формулой $-M\mathbf{H} = -2M_0^2\mathbf{mh}$, и взаимодействие Дзялошинского, описывающееся тензором D_{ik}, вид которого зависит от симметрии АФМ (см. табл. 3 в монографии Турова [34] или статье Гомонай и др. [35]). Аналогично (6) намагниченность может быть выражена через $\mathbf{l}$ и его производные:

$$\mathbf{m} = \frac{2}{\gamma\delta M_0}[\mathbf{l}, \dot{\mathbf{l}}] + \frac{1}{\delta}\left\{2\mathbf{h} - \mathbf{D} - \mathbf{l}(\mathbf{l}, 2\mathbf{h} - \mathbf{D})\right\}, \qquad (9)$$

где введен вектор $\mathbf{D}$, $D_i = D_{ik}l_k$, а через γ обозначено гиромагнитное отношение $\gamma = g\mu_B/\hbar$. Последнее слагаемое в (9) описывает неколлинеарность подрешеток АФМ, обусловленную магнитным полем и взаимодействием Дзялошинского. Из него легко получить связь константы однородного обмена δ со статической восприимчивостью АФМ $\chi = 4/\delta$ (точнее, со значением восприимчивости при $\mathbf{H} \perp \mathbf{l}$, так как при $\mathbf{H} \parallel \mathbf{l}$ восприимчивость АФМ равна нулю [23]). С учетом (9) лагранжиан

$$L = \int dV\left(2M_0/\gamma\right)\mathbf{m}[\mathbf{l}, \dot{\mathbf{l}}] - W$$

превращается в эффективный, зависящий только от единичного вектора $\mathbf{l}$. Плотность эффективного лагранжиана $\widetilde{L}$ имеет вид

$$\frac{\widetilde{L}}{M_0^2} = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\mathbf{l})^2\right] -$$

$$- \widetilde{w}_a(\mathbf{l}) + \frac{2}{\gamma\delta M_0}(2\mathbf{h} - \mathbf{D})\left[\mathbf{l}, \frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t}\right], \qquad (10)$$

где $\widetilde{w}_a$ — энергия анизотропии, перенормированная за счет взаимодействия Дзялошинского и внешнего поля. Выделяя вклад магнитного поля*, будем исходить из выражения

$$\widetilde{w}_a(\mathbf{l}) = w_a(\mathbf{l}) + \frac{2}{\delta}(\mathbf{l}, \mathbf{h})^2, \qquad (11)$$

* Именно эта величина $w_a(\mathbf{l})$ имеет смысл феноменологической энергии анизотропии, измеряемой в реальном эксперименте (как статическом, так и динамическом) при $H = 0$.

второе слагаемое, с учетом анизотропного характера восприимчивости, может быть представлено в стандартном виде $1/2(\mathbf{h}, \hat{\chi}\,\mathbf{h})$.

Динамические уравнения для l могут быть записаны как уравнения Эйлера—Лагранжа для лагранжиана (10). С учетом условия $\mathbf{l}^2 = 1$ получаем, что они имеют вид

$$\left[\mathbf{l}, \delta\widetilde{L}/\delta\mathbf{l}\right] = 0\,. \qquad (12)$$

В простейшем случае отсутствия поля и взаимодействия Дзялошинского они обладают свойством лоренц-инвариантности, при этом роль выделенной скорости играет величина

$$c = \gamma M_0 \sqrt{\alpha\delta}\,/2\,. \qquad (13)$$

Лоренц-инвариантный характер вынужденного движения доменной стенки в трехмерных АФМ со слабым ферромагнетизмом (в ортоферритах) надежно установлен экспериментально в работах группы Четкина [4,5]. Если пренебречь еще и магнитной анизотропией, то (12) переходят в уравнения так называемой киральной σ-модели n-поля, которые в одномерном случае, $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x, t)$, точно интегрируемы [36]. Анализ релаксации солитонов привел авторов [37] к выводу, что при учете даже простейшей магнитной анизотропии типа $\beta l_z^2/2$ свойство точной интегрируемости уравнений (12) разрушается.

Учет магнитного поля и взаимодействия Дзялошинского, как видно из (10), приводит к появлению линейных по $\partial\mathbf{l}/\partial t$ слагаемых в лагранжиане. За исключением случая антисимметричного взаимодействия Дзялошинского, т.е. при $D_{ik} \neq \varepsilon_{ikj}\, d_j$, эти слагаемые определяют разрушение лоренц-инвариантности уравнений для вектора l и ряд особенностей в динамике солитонов, которые мы обсудим ниже. Если же $D_{ik} = \varepsilon_{ikj}\, d_j$, $\mathbf{d} = \text{const}$, то слагаемое с D_{ik} в (10) сводится к полной производной по времени и не влияет на уравнения движения.

Изложенный выше вывод уравнений движения АФМ существенно базировался на использовании длинноволнового приближения, т.е. условий малости пространственных и временных производных: $|\nabla\mathbf{l}|^2 \ll \delta/\alpha$, $|\dot{\mathbf{l}}| \ll \gamma\delta M_0$. Выполнение этих неравенств необходимо для того, чтобы можно было считать $|\mathbf{m}| \ll |\mathbf{l}|$ и исключать m из уравнений движения; требование малости производных типично для макроскопических феноменологический теорий.

В работе [26,28] уравнение (12) для вектора l было получено на основе уравнений Ландау—Лифшица для макроскопических намагниченностей подрешеток $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, в работах [29,30] — на основе квантовых уравнений динамики спинов. На наш взгляд, весьма важную роль для обоснования этих уравнений сыграла работа Андреева и Марченко [27], в которой уравнения (12) были получены без использования уравнений динамики намагниченности подрешеток. По существу, в [27] использовалось только два предположения: то, что наиболее сильным взаимодействием является обменное и в АФМ существует отличная от нуля микроскопическая спиновая плотность $\mathbf{s}(\mathbf{r})$, среднее значение которой по элементарной ячейке равно нулю; при этом вектор l представляет собой дипольный момент спиновой плотности. Таким образом, уравнения (12) обладают большой общностью. Более серьезные модификации этого описания требуются для синглетных магнетиков, в частности, квантовых АФМ с основным состоянием типа спиновой жидкости [38,39].

Вернемся к обсуждению свойств эффективных уравнений для вектора антиферромагнетизма l. Для их записи удобно использовать обычные угловые переменные для единичного вектора

$$l_3 = \cos\theta\,, \quad l_1 + il_2 = \sin\theta\exp(i\varphi)\,, \qquad (14)$$

полярную ось (ось 3) мы будем обычно выбирать вдоль легкой оси АФМ. В этих переменных плотность лагранжиана имеет вид

$$\frac{\widetilde{L}}{M_0^2} = \frac{\alpha}{2c^2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right] -$$

$$- \frac{\alpha}{2}\left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\varphi)^2\right] - \widetilde{w}_a(\theta, \varphi) +$$

$$+ \Delta_1(\theta, \varphi)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \Delta_2(\theta, \varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,. \qquad (15)$$

Три последних слагаемых лагранжиана определяются линейными по $\partial\mathbf{l}/\partial t$ членами в (10). Если $\partial\Delta_2/\partial\theta \neq \partial\Delta_1/\partial\varphi$, то они приводят к разрушению лоренц-инвариантности уравнений движения для θ, φ, которые можно представить в виде

$$\alpha\left(\nabla^2\theta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right) - \alpha\sin\theta\cos\theta\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\varphi)^2\right] -$$

$$- \frac{\partial\widetilde{w}_a}{\partial\theta} = D(\theta, \varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,, \qquad (16)$$

$$\alpha\nabla\left(\sin^2\theta\,\nabla\varphi\right) - \frac{\alpha}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \frac{\partial\widetilde{w}_a}{\partial\varphi} =$$

$$= -D(\theta, \varphi)\frac{\partial\theta}{\partial t}\,, \qquad (17)$$

где $D(\theta, \varphi) = \partial\Delta_1/\partial\varphi - \partial\Delta_2/\partial\theta$. Заметим, что предельный переход $1/c^2 \to 0$ при конкретном выборе $D(\theta, \varphi) = \sin\theta/\gamma M_0$ переводит (16), (17) в уравнение Ландау—Лифшица для ФМ, записанное в уг-

ловых переменных. Таким образом, эти уравнения применимы для описания широкого класса коллинеарных магнетиков (ФМ, АФМ, включая слабые ферромагнетики), а также ферритов [3].

3. Интегралы движения и квазиклассическое квантование солитонов

Система уравнений (16), (17) имеет ряд фундаментальных интегралов движения, важных для анализа солитонов в АФМ. Выражения для этих интегралов легко получить из явного вида лагранжиана (10). Прежде всего приведем формулу для энергии АФМ:

$$E = \int dV \left\{ \frac{\alpha}{2} \left[(\nabla\theta)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{2} \sin^2\theta \left[(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 \right] + \widetilde{w}_a(\theta, \varphi) \right\} \tag{18}$$

и импульса поля вектора антиферромагнетизма

$\mathbf{P} = \int \mathrm{p} dV$, где

$$\mathrm{p} = -M_0^2 \left\{ \frac{\alpha}{c^2} \left[\nabla\theta \frac{\partial\theta}{\partial t} + \sin^2\theta \nabla\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right] + \right.$$

$$\left. + \Delta_1(\theta, \varphi)\nabla\theta + \Delta_2(\theta, \varphi)\nabla\varphi \right\} . \tag{19}$$

Отметим, что формула для импульса (в отличие от уравнений (16), (17)) неоднозначна и изменяется при добавлении к лагранжиану полной производной по времени от произвольной функции θ и φ. Подобная неоднозначность определения импульса характерна для магнитных систем и обсуждалась в обзорах [1,2].

Помимо энергии и импульса при анализе солитонов могут оказаться существенными и другие интегралы движения. Если считать, что полярная ось 3 в (14) совпадает с избранной осью АФМ z и пренебречь анизотропией в базисной плоскости, то сохраняется z-проекция суммарного спина

$$S^z_{\mathrm{tot}} = \left(2M_0/\hbar\gamma \right) \int m_z dV .$$

В таком АФМ следует считать, что $\widetilde{w}_a = \widetilde{w}_a(\theta)$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \Delta_2(\theta)$. Тогда формула для этого интеграла движения принимает вид

$$S^z_{\mathrm{tot}} = S^z_0 + \frac{1}{\hbar} \int \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{\varphi}} dV =$$

$$= S^z_0 + \frac{M_0}{g\mu_B} \int dV \left\{ \frac{2}{\gamma H_e} \sin^2\theta \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \gamma M_0 \Delta_2(\theta) \right\} , \tag{20}$$

где $H_e = \delta M_0/2$ — обменное поле АФМ. Величина S^z_0 обусловлена слагаемым $(a/2)\nabla\mathbf{l}$ (см. (6)). Она отлична от нуля только для таких спиновых конфигураций, которые содержат доменные стенки вектора $\mathbf{l}$. Для модели (4)–(6)

$$S^z_0 = \frac{1}{2} s \int dx \frac{\partial l_z}{\partial x} = \frac{1}{2} s \left[l_z(+\infty) - l_z(-\infty) \right] . \tag{21}$$

Таким образом, в одномерном АФМ без взаимодействия Дзялошинского и в отсутствие внешнего поля статическая доменная стенка (солитон типа кинка) имеет z-проекцию спина $\pm s$, совпадающую по величине со спином магнитного иона. Этот результат, полученный нами на квазиклассическом уровне, согласуется с выводами квантовой теории, в частности, с заключением Халдейна [29], что спин солитона должен быть целым либо полуцелым в зависимости от того, целым или полуцелым является спин магнитных ионов системы.

Другой возможный закон сохранения связан с вращательной симметрией не в спиновом, а в координатном пространстве. Эта инвариантность приводит к сохранению не спинового, а орбитального момента поля намагниченности $\mathbf{L} = \int [\mathbf{r}, \mathbf{p}] dV$, где $\mathbf{p}$ — плотность импульса поля намагниченности, определяемая формулой (19). Сохранение величины L_z или $\mathbf{L}$ приводит к стабилизации неодномерных, так называемых ротационных солитонов в ФМ (см. разд. 9).

Квантовые свойства солитонов в магнетиках могут быть исследованы на основе квазиклассического квантования поля намагниченности, отвечающего солитонному решению. Для ФМ этот подход был развит в работах Иванова и Косевича [40,41], Косевича и др. [42,43], см. также монографии [1,2]. Энергия и импульс солитона в АФМ, найденные на основе формул (18), (19), имеют ясный квантовомеханический смысл. Что касается величины $S_z \equiv S^z_{\mathrm{tot}}$, то, в соответствии с общими соотношениями квантовой механики, ее значения могут быть целыми или полуцелыми. При этом изменение величины S_z при переходе от одного состояния данного солитона к другому может быть только целым.

В ФМ основному состоянию отвечает параллельная ориентация спинов и солитону всегда отвечает целочисленное значение S_z. Величина S_z для солитона в ФМ порядка $(J/2\mu_B\beta M_0)^{d/2} \gg 1$, где $d = 1, 2, 3$ отвечает $1D$, $2D$ и $3D$ солитонам [1,2]. Зависимость $E(P, S_z)$ для $1D$ солитона в ФМ, полученная таким образом, точно совпадает с кванто-

вомеханическим результатом, полученным для интегрируемой модели спиновой цепочки со спином $s = 1/2$, см. подробнее в [1,44].

Квазиклассическое квантование солитонов в АФМ проводилось Барьяхтаром (мл.) и Ивановым [45]. Из данных этой работы следует, что для $1D$ солитона характерное значение $S_z \sim s(\alpha a^2/\delta)^{1/2} \sim s$, однако квантовый характер $1D$ солитона в этой работе подробно не обсуждался. Квазиклассическое квантование $2D$ топологических солитонов было проделано Ивановым и Стефановичем [46]. Тот факт, что для $1D$ солитона в АФМ значение $S_z \sim s$ может быть целым и полуцелым, вследствие чего солитон является квантовым объектом, был впервые установлен в работах Халдейна [29] и Аффлека [47]. Отметим также работу Фаддеева и Тахтаджана [48], в которой показано, что элементарное возбуждение (кинк) в АФМ цепочке со спином $1/2$ имеет спин, равный $1/2$. Фактически, с этих работ началось развитие квантовой физики АФМ солитонов, детальное обсуждение которой выходит за рамки данного обзора. Квазиклассическое квантование $1D$ АФМ солитона мы обсудим более детально в разд. 5. Результаты этого анализа будут существенно использованы при построении солитонной термодинамики $1D$ АФМ.

4. Элементарные возбуждения одномерного АФМ — кинки и магноны

Начнем с анализа одномерных решений, $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x, t)$, описывающих солитоны в $1D$ АФМ (а также плоские доменные стенки $3D$ АФМ [4,5], обсуждение которых выходит за рамки данного обзора). Ограничимся пока анализом простейшей модели АФМ, которой отвечает лоренц-инвариантная динамика $\mathbf{l}$ (т.е. $H = 0$, $D_{ik} = \varepsilon_{ikj} d_j$) и энергия анизотропии, квадратичная по компонентам $\mathbf{l}$. Эта простейшая модель описывается лагранжианом (10) со следующим конкретным выбором функций:

$$w_a = \frac{1}{2}\left(\beta_1 l_x^2 + \beta_2 l_y^2\right), \quad \Delta_1(\theta, \varphi) = \Delta_2(\theta, \varphi) = 0. \tag{22}$$

При записи (22) предполагается, что АФМ имеет ромбическую симметрию. При $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ ось z является легкой осью АФМ, т.е. в основном состоянии $\mathbf{l} = \pm \mathbf{e}_z$. Для определенности будем считать, что $\beta_1 > \beta_2 > 0$, тогда ось x является более трудной осью, а ось y — промежуточной. Анизотропия в базисной плоскости (xy) определяется разностью констант $\beta_1 - \beta_2$. Удобно ввести также параметр ромбичности $\rho = (\beta_1 - \beta_2)/\beta_2$, который определяет относительную величину анизотропии в базисной плоскости по сравнению с одноосной.

Если $\beta_1 = \beta_2$, то АФМ имеет анизотропию типа «легкая ось», и все направления в базисной плоскости (xy) эквивалентны. При $\beta_2 = 0$ выражение (22) описывает энергию легкоплоскостного АФМ, легкая плоскость совпадает с плоскостью (zy).

Записывая линеаризованную по l_x и l_y версию уравнений (12), легко показать, что в АФМ существуют две ветви спиновых волн с линейной поляризацией. В одной из них вектор $\mathbf{l}$ колеблется в плоскости (zy) (zy-магноны), в другой — в плоскости (zx) (zx-магноны). Для обеих ветвей закон дисперсии имеет лоренц-инвариантный вид:

$$\omega_{1,2}(k) = \left(\omega_{01,02}^2 + c^2 k^2\right)^{1/2}, \qquad \omega_{01,02} = \frac{1}{2}\gamma M_0 (\delta\beta_{1,2})^{1/2}, \tag{23}$$

ω_{01} и ω_{02} отвечают активации zx- и zy-магнонов соответственно. Частоты активации магнонов обеих ветвей могут быть записаны через значения полей анизотропии $H_{ai} = \beta_i M_0/2$ и обменного поля $H_e = \delta M_0/2$:

$$\omega_{0i} = \gamma\left(H_{ai} H_e\right)^{1/2}, \quad i = 1, 2. \tag{24}$$

Для легкоплоскостного АФМ активация одной из ветвей магнонов обращается в нуль и $\omega_2(k) = c|\mathbf{k}|$.

Выражения для магнонных частот в АФМ, полученные в конце 50-х годов [21,22], согласуются с огромным числом экспериментальных данных [23, 24,34,49]. Отметим, что характерные магнонные частоты в АФМ существенно больше (в $(H_e/H_a)^{1/2} \gg 1$ раз), чем в ФМ с тем же значением поля анизотропии H_a. Об этом явлении говорят как об обменном усилении динамических эффектов релятивистских взаимодействий в АФМ, которое играет принципиальную роль при анализе солитонной термодинамики квазиодномерных АФМ.

Для удобства читателя приведем запись магнонных частот через параметры обменного гамильтониана (1) в приближении ближайших соседей, ввиду того, что последние используются в большинстве экспериментальных работ по низкоразмерным магнетикам. Записывая энергию анизотропии, отвечающую нашей простейшей модели (22), в виде

$$\sum_l \left\{K_1 (S_l^x)^2 + K_2 (S_l^y)^2\right\}$$

(обобщение на случай обменной анизотропии очевидно) и учитывая (8а), (8б), нетрудно получить

$$\hbar\omega_{0i} = 2s\sqrt{2JK_i}, \quad c = 2Jas/\hbar. \tag{25}$$

В случае чисто легкоосного АФМ ($\beta_1 = \beta_2$) частоты ω_{01} и ω_{02} совпадают. В этом случае нормальными модами являются как линейно, так и циркулярно поляризованные моды, например

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \quad \varphi = kx - \omega(k)t,$$
$$\omega(k) = \sqrt{\omega_0^2 + c^2k^2}\ . \tag{26}$$

Интересно заметить, что в модели (22) при $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ точно такой же формулой определяется и закон дисперсии нелинейной волны с произвольной амплитудой $\theta_0 \le \pi/2$. Такая уникальная ситуация (независимость частоты нелинейной волны от ее амплитуды) означает специфическое вырождение АФМ как нелинейной системы в модели (22) при $\beta_1 = \beta_2$. Это вырождение проявляется в свойствах прецессионных солитонов (см. разд. 5 и 9) и снимается при учете более общего вида энергии анизотропии, например

$$w_a = \frac{1}{2}\beta\left(l_x^2 + l_y^2\right) - \frac{1}{4}b\left(l_x^2 + l_y^2\right)^2. \tag{27}$$

Вернемся к анализу ромбического АФМ. В рамках модели (22) уравнения (16), (17) допускают два класса точных одномерных решений вида $\varphi = 0, \pi$ или $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$, $\theta = \theta(x, t)$, где функция $\theta(x, t)$ для обоих классов решений удовлетворяет хорошо известному уравнению синус-Гордон для переменной $u = 2\theta$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_{0i}^2 \sin u = 0\ , \tag{28}$$

$i = 1$ и 2 для $\varphi = 0, \pi$ и $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ соответственно. Это уравнение является точно интегрируемым методом обратной задачи рассеяния [50].

Простейшее решение уравнения синус-Гордон описывает солитоны типа кинков, в которых

$$\varphi = \left(\frac{\pi}{2}\right)n, \quad \cos\theta = \sigma\,\text{th}\left(\frac{\xi}{\Delta_{0i}}\right), \quad \sin\theta = \frac{\sigma'}{\text{ch}\,(\xi/\Delta_{0i})}\ , \tag{29}$$

где

$$\xi = \frac{x - vt}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}, \quad \Delta_{0i} = \sqrt{\alpha/\beta_i}$$

$i = 1, 2$ для $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ соответственно. Параметры $\sigma = \pm 1$ и $\sigma' = \pm 1$ определяют различные варианты эквивалентных кинков, величина σ называется топологическим зарядом. Четные или нечетные значения n в (29), $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$, отвечают развороту l в двух неэквивалентных плоскостях: (zx) и (zy). Соответствующие решения мы будем называть zx- и zy-кинками соответственно. Энергии обоих кинков как функции их скорости v или импульса P в $1D$ АФМ определяются релятивистскими формулами

$$E_i(v) = \frac{E_{0i}}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}, \quad E_i(P) = \sqrt{E_{0i}^2 + c^2P^2}\ ,$$
$$E_{0i} = 2M_0^2A_0\sqrt{\alpha\beta_i} = 2\alpha M_0^2A_0/\Delta_{0i}\ . \tag{30}$$

В трехмерном АФМ величина E_{0i}/A_0 имеет смысл энергии плоского кинка (доменной стенки) на единицу площади стенки. Если считать, что $\beta_1 > \beta_2 > 0$, то zy-кинк является энергетически более выгодным.

Интересный результат получается при сравнении энергий элементарных возбуждений $1D$ АФМ — кинков и магнонов. Записывая отношение энергии активации магнона $\hbar\omega_{0i}$ и энергии покоя кинка E_{0i}, легко получить, что для обоих классов решений эта величина зависит только от спина АФМ s:

$$E_{0i}/\hbar\omega_{0i} = s\ . \tag{31}$$

Здесь, как и при квазиклассическом квантовании солитонов в ферромагнетиках, величина спина возникает при вычислении отношения $M_0/2\mu_B$ [1,2]. Этот факт обусловлен отмеченным выше «обменным усилением» и никак не проявляется для обычных трехмерных АФМ. Но он определяет принципиальное различие термодинамики $1D$ АФМ и ферромагнетиков. Если для последних $E_0/\hbar\omega_0 \sim (H_e/H_a)^{1/2} >> 1$, то для АФМ при реальном значении величины спина $s \le 5/2$ энергии кинков и магнонов сравнимы.

В «предельно квантовом» случае $s = 1/2$ из (31) следует, что именно кинк является элементарным возбуждением с минимальной энергией — факт, хорошо известный из точного анализа [48]. Обсуждение проблем квантовых АФМ выходит за рамки данного обзора; заинтересованного читателя мы отсылаем к обзорам [6,33]. Только отметим, что нелинейная σ-модель в квантово-полевом варианте успешно применялась для описания свойств квантовых АФМ, как одномерных [29,30], так и двумерных [51]. Однако для квантовых АФМ, в основном состоянии которых присутствует существенная примесь синглетных состояний, оказывается необходимым выход за рамки простой версии σ-модели с $l^2 = 1$ [38].

5. Возбужденные состояния кинков в АФМ

Рассмотренные в предыдущем разделе решения типа $l = l(x - vt)$ описывают «основное состояние» кинка, которому отвечает минимум энергии при данном значении импульса кинка [1,2]. Возбуждения на фоне кинка могут быть исследованы экспериментально и дать полезную информацию о

динамике АФМ. Кроме того, анализ возбужденных состояний кинков представляет интерес для построения кинковой термодинамики АФМ (см. разд. 6, 7). Однако возбужденные состояния кинков даже в простейшей модели АФМ (22) не всегда могут быть найдены точно.

В случае чисто одноосного АФМ можно построить точное двухпараметрическое решение, описывающее «прецессионный» кинк [26,29,45]:

$$\cos\theta = \sigma \operatorname{th}\left[\frac{\xi}{\Delta_0}\left(1-\omega^2/\omega_0^2\right)^{1/2}\right],\quad \varphi = \varphi_0 + \omega\tau\,, \tag{32}$$

$$\xi = \frac{x - vt}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}},\quad \tau = \frac{t - xv/c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}},$$

в котором вектор $\mathbf{l}$ прецессирует с частотой ω в системе отсчета, движущейся вместе с кинком со скоростью v. Для случая $w_a = 1/2\beta \sin^2\theta$ частота прецессии ω связана с интегралом движения S^z_{tot} соотношением

$$S^z_{\text{tot}} = \sigma s + \frac{\omega s}{(\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}}, \tag{33}$$

где первое слагаемое определяется S^z_{tot} в статическом случае (см. (21)), второе определяется прецессией. Этот кинк представляет собой состояние, которое описывает минимум энергии АФМ при заданном значении двух интегралов движения: импульса P и $S_z \equiv S^z_{\text{tot}}$ [1,2]. Ясно, что состояние с $S_z = \sigma s$, которому отвечает $\omega = 0$, определяет кинк с наименьшей энергией при данном значении P, а состояния с $S_z \neq \sigma s$ и $\omega \neq 0$ — возбужденные состояния этого кинка.

При классическом описании параметр ω может принимать любые значения $|\omega| < \omega_0$. При квазиклассическом квантовании надо потребовать, чтобы динамическая добавка к значению S_z в основном состоянии кинка была равна целому числу * $n = \omega s/(\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2} = 0, \pm 1, \ldots$. Число n есть квантовое число, определяющее возбужденные состояния кинка; при $n = 0$ значение $\omega = 0$. Ниже мы убедимся, что в некоторых случаях оно может быть интерпретировано как число специфических локализованных магнонов, связанных с кинком. Квазиклассическое выражение для энергии кинка вида (32) зависит от двух параметров — квантового числа n и импульса P, и может быть записано в лоренц-инвариантном виде:

$$E(P, n) = \sqrt{E_0^2(n) + c^2P^2},\quad E_0(h) = \hbar\omega_0\sqrt{s^2 + n^2}. \tag{34}$$

Зависимость энергии покоящегося кинка ($v = 0$, $P = 0$) от n является более сложной, чем стандартная линейная зависимость типа $\hbar\omega_0(n + 1/2)$, характерная для линейных магнонов. При $n << s$ получаем $E_0(n) \simeq \hbar\omega_0 s(1 + n^2/2s^2)$, т.е. возбужденные состояния солитона описываются формулой, характерной для энергии свободного ротатора; напротив, при $n >> s$ выражение (34) описывает энергию системы n слабо связанных магнонов [29].

Результат (34) может существенно изменяться при учете более общего вида энергии анизотропии (это связано с уже упоминавшимся выше вырождением задачи при $\beta_1 = \beta_2$). Для энергии анизотропии вида (27) характер солитонного решения зависит от знака константы b и определяется двумя параметрами: $\omega_0 = \gamma H_0$ и $\omega_t = \gamma H_t$, где $H_0 = M_0\sqrt{\beta\delta}/2$, $H_t = M_0\sqrt{(\beta - b/2)\delta}/2$. При $b > 0$ величина H_t имеет смысл поля спин-флоп перехода, который происходит как переход первого рода. Вид $E_0(n)$ зависит от соотношения ω_0, ω_t и ω. При $\omega << \omega_0$, ω_t или $\omega_t \to \omega_0$ мы снова получаем формулы (32)–(34), однако при увеличении ω или $(\omega_0 - \omega_t)$ зависимости $S_z(n)$ и $E_0(n)$ существенно модифицируются (см. подробнее [45]). В случае $b > 0$ ($\omega_t < \omega_0$) решение типа кинка существует только при $\omega^2 < \omega_t^2$, а при $\omega_t^2 < \omega^2 < \omega_0^2$ существует решение типа локализованного нетопологического (но стабильного) $1D$ солитона. Величина $S_z(\omega)$ расходится при $\omega \to \omega_t \pm 0$, но характер этой расходимости меняется при $|\omega - \omega_t| < |\omega_0 - \omega_t|$ со степенного на логарифмический. Если же $b < 0$, то в АФМ существуют только солитоны типа кинков; при $\omega \to \omega_0$ этот кинк становится алгебраическим, значения E, S_z при $\omega \to \omega_0$ остаются конечными [45,46].

Решение, описывающее прецессионный кинк, в случае $\beta_1 = \beta_2$ может быть построено также и при наличии внешнего магнитного поля, параллельно-

* Барьяхтар (мл.) и Иванов [45] фактически предполагали, что $S_z >> 1$, и не обсуждали вопрос о том, целой или полуцелой является величина S_z. Халдейн [29] получил правильный результат, что величина S_z в солитоне является целой или полуцелой в зависимости от того, целым или полуцелым является спин s АФМ. Однако без учета члена σs это приводит к неверному, на наш взгляд, выводу, что величина $n = s\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}$ в солитоне должна принимать полуцелые значения при нецелом s и что наименьшей энергии солитона отвечает $\omega \neq 0$ и $n = 1/2$.

го легкой оси. Энергия кинка $E(S_z, P)$ при $H \neq 0$ может быть представлена в виде

$$E(S_z, P) = -g\mu_B H S_z + \sqrt{E_0^2(S_z) + c^2 P^2} ,$$

(см. подробнее [45,46]).

При учете анизотропии в базисной плоскости (в простейшей модели при $\beta_1 \neq \beta_2$) простое решение типа $\varphi = \omega t$ отсутствует*. Точное решение, описывающее возбужденные состояния кинка, в этом случае построить не удается. Однако мы покажем, что анализ этой проблемы может быть проведен с достаточной степенью полноты, если использовать некоторые приближения.

Простейшая модель с $\beta_1 \neq \beta_2$ допускает точный анализ линейных колебаний намагниченности на фоне кинка в рамках классических уравнений для θ, φ. Запишем угловые переменные θ, φ в виде

$$\theta = \theta_0(\xi) + \vartheta(\xi) \exp(-i\omega t) ,$$
$$\varphi = \varphi_0 + \left[\mu(\xi)/\sin\theta_0\right] \exp(-i\omega t) , \qquad (35)$$

где $\theta_0(\xi)$ и $\varphi_0 = 0, \pi/2, \pi, \ldots$ описывают простейший кинк; ξ, τ — лоренц-инвариантные комбинации x, t, см. (32). Линеаризуя уравнения (16), (17) для θ, φ по ϑ и μ, получаем для этих переменных две независимые задачи на собственные значения:

$$\hat{L}_0\vartheta = \left(\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)^2 \vartheta, \quad \left[\hat{L}_0 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2}\right]\mu = \left(\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)^2 \mu .$$

Здесь конкретные вычисления проделаны для энергетически выгодного при $\beta_1 > \beta_2$ zy-кинка; $\hat{L}_0$ — хорошо известный оператор с простейшим безотражательным потенциалом

$$\hat{L}_0 = -\Delta_0^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 1 - \frac{2}{\mathrm{ch}^2(\xi/\Delta_0)} , \qquad (36)$$

для которого известен полный набор собственных функций [52], $\Delta_0 \equiv \Delta_{02} = (\alpha/\beta_2)^{1/2}$. Этот набор включает одно локализованное состояние ψ_0, отвечающее нулевому собственному значению:

$$\hat{L}_0\psi_0 = 0, \quad \psi_0 = \frac{1}{(2\Delta_0)^{1/2}\,\mathrm{ch}\,(\xi/\Delta_0)} , \qquad (37)$$

и состояния непрерывного спектра ψ_k:

$$\hat{L}_0\psi_k = \left(1 + k^2\Delta_0^2\right)\psi_k ,$$
$$\psi_k = \frac{\mathrm{th}\,(\xi/\Delta_0) - ik\Delta_0}{\left(1 + k^2\Delta_0^2\right)^{1/2}} e^{ikx} . \qquad (38)$$

Отсюда следует, что спектр линейных магнонов на фоне кинка состоит из состояний непрерывного спектра $\vartheta_k \propto \psi_k$ и $\mu_k \propto \psi_k$, частоты которых равны $\omega_2(k)$ и $\omega_1(k)$ соответственно, см. (23), а также двух локализованных мод. Мода с $\vartheta \propto \psi_0$ является нулевой модой $\vartheta \propto d\theta_0/d\xi$ и может быть интерпретирована как смещение кинка как целого. Такие «нулевые» трансляционные моды появляются для любых солитонов, их особая роль в солитонной физике описана в [53]. Мода, отвечающая локализованным на кинке колебаниям μ, имеет частоту

$$\omega_l = \sqrt{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2} = \frac{1}{2}\gamma M_0 \sqrt{\delta(\beta_1 - \beta_2)} . \qquad (39)$$

Возбуждение колебаний, отвечающих этой моде, наблюдалось экспериментально в пластине (т.е. в $3D$ образце) туллиевого ортоферрита с доменной структурой [54].

Все результаты для магнонный мод на фоне невыгодного zx-кинка получаются из выписанных выше заменой $\beta_1 \to \beta_2$, $\beta_2 \to \beta_1$. В этом случае частота локализованной моды колебаний μ является чисто мнимой, что описывает неустойчивость невыгодного кинка относительно малых возмущений переменной φ. Этот результат, полученный в работах [55,56], справедлив для лоренц-инвариантных моделей АФМ, однако вопрос об устойчивости кинков в моделях с разрушением лоренц-инвариантности является более сложным (см. [35,57,58] и разд. 7).

Таким образом, в рамках классических уравнений в линейном приближении возбужденному состоянию кинка в простейшей модели (22) отвечают малые колебания переменной μ с частотой ω_l. Отсюда следует, что в линейном приближении квазиклассическое квантование дает энергию покоящегося ($P = 0$) возбужденного кинка в виде

$$E_0(n) = E_0 + \hbar\omega_l(n + 1/2) , \qquad (40)$$

где E_0 — энергия простейшего кинка (30); целое число n определяет число локализованных магнонов. Однако применение формул линейного приближения для осциллятора с некоторым потенциа-

* Солитонные решения с периодическим колебанием могут быть построены: для ФМ с ромбической анизотропией вида $(\beta_1 m_x^2 + \beta_2 m_y^2)/2$, но такая возможность обусловлена точной интегрируемостью уравнения Ландау—Лифшица в этом случае [1,2].

лом $U(\varphi)$ в квантовой механике не всегда возможно. Дело в том, что если амплитуда нулевых колебаний превосходит то значение амплитуды, при котором потенциал $U(\varphi)$ можно заменить параболическим, то даже для анализа слабовозбужденных состояний необходимо учитывать ангармонизмы и формула (40) неприменима.

Рассмотрим «степень квантовости» колебаний μ, отвечающих локальной моде с ненулевой частотой ω_l. Для этого оценим соответствующую амплитуду нулевых колебаний. Так как для локальной моды $\mu = \varphi \sin\theta_0 \propto \psi_0$, а в нашей простейшей модели АФМ $\psi_0 \propto \sin\theta_0$, то в линейном приближении φ не зависит от переменной x ($\varphi = \varphi(t)$). Выбирая $\varphi(t)$ в качестве обобщенной координаты и используя лагранжиан (10), для канонического импульса P_φ, сопряженного этой координате, получаем простое выражение

$$P_\varphi = \alpha M_0^2 A_0 \Delta_0 \dot{\varphi}/c^2 .$$

Соотношение неопределенностей гласит, что в основном состоянии осциллятора $\varphi P_\varphi \gtrsim \hbar/2$. Тогда, учитывая, что $\dot{\varphi} \sim \omega_l \varphi$, для амплитуды нулевых колебаний $\langle\varphi^2\rangle$ локализованной моды получаем простую оценку:

$$\langle\varphi^2\rangle \sim \frac{1}{s}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\right)^{1/2} . \qquad (41)$$

В силу этой оценки (которую мы уточним ниже) амплитуда нулевых колебаний при реальных значениях спина не мала даже при $\beta_1 - \beta_2 \sim \beta_2$. Уравнение, описывающее колебания угловой переменной φ, обязательно содержит тригонометрические функции и является нелинейным. Эта нелинейность проявляется при $\langle\varphi^2\rangle \sim 1$. Отсюда следует, что кинк в $1D$ АФМ представляет собой существенно нелинейную квантовую яму для спиновой волны. Заметим, что в ферромагнетике ситуация принципиально иная: даже если на кинке и существует локальная мода (это бывает не для всех моделей ФМ), то амплитуда ее нулевых колебаний мала, $\langle\varphi^2\rangle \sim (H_a/H_e)^{1/2} \ll 1$. Поэтому в ФМ локальные моды можно рассматривать классически.

Таким образом, исследование локализованных на кинке в $1D$ АФМ локальных мод должно проводиться на основе квантовомеханического подхода с учетом нелинейности колебаний. Этот анализ при учете анизотропии в базисной плоскости не может быть проведен точно, так как колебания ϑ и μ являются независимыми только в линейном приближении. Однако для случая $\rho \equiv (\beta_1 - \beta_2)/\beta_2 \ll 1$, когда $\langle\varphi^2\rangle$ особенно велико (см. (41)), можно построить согласованную схему анализа таких колебаний.

Для анализа нелинейной динамики переменной φ на фоне кинка заметим, что в силу (41) при $\rho s^2 \gg 1$ колебания φ линейные, и $\varphi = \varphi(t)$. По мере уменьшения параметра ромбичности ρ амплитуда нулевых колебаний угла φ возрастает, «забрасывая» осциллятор в область существенной нелинейности. С другой стороны, в чисто одноосном пределе $\rho = 0$ ($\beta_1 = \beta_2$) локализованная мода становится нулевой, приводя к возникновению прецессионного кинка вида (32) с $\varphi = \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. Это означает, что при некотором достаточно малом $\rho \sim 1/s^2$ колебания φ полностью делокализуются, переходя во вращения. При $\rho s^2 \ll 1$ для этого вращения также можно приближенно считать, что $\varphi = \varphi(t)$.

Для анализа перехода от обычных кинков к прецессионным воспользуемся тем, что в обоих предельных случаях $\rho s^2 \gg 1$ и $\rho s^2 \ll 1$ угол φ не зависит от x, т.е. $\varphi = \varphi(t)$. С учетом того, что толщина кинка $\Delta \propto (1 + \rho \sin^2\varphi)^{-1/2}$, следует считать, что $\Delta = \Delta(t)$. Таким образом, решение для кинка с $\varphi = \varphi(t)$ можно искать в следующем виде:

$$\theta = \theta_0 \left(\frac{x - x_s(t)}{\Delta_0(\varphi_s)\left(1 - \dot{x}_s^2/c^2\right)^{1/2}}\right), \quad \varphi = \varphi_s(t) , \qquad (42)$$

где $\Delta_0(\varphi_s) = \Delta_{02}(1 + \rho \sin^2\varphi_s)^{-1/2}$. В этом выражении при $\rho s^2 \ll 1$ переменные $x_s(t)$ и $\varphi_s(t)$ можно считать «медленными», имея в виду малость скоростей кинков по сравнению со скоростью c и малость характерной частоты локализованной моды по сравнению с ω_0. Тогда, подставляя (42) в лагранжиан (15) и удерживая лишь члены главного порядка по малым параметрам ρ, $\dot{x}_s$, $\dot{\varphi}_s$, получим эффективный лагранжиан для переменных x_s и φ_s:

$$L = \frac{1}{2}\frac{E_0}{c^2}\left(\dot{x}_s^2 + \Delta_0^2 \dot{\varphi}_s^2\right) - E_0\left(1 + \frac{1}{2}\rho \sin^2\varphi_s\right) . \qquad (43)$$

Таким образом, в нашей простой модели уравнения движения для φ_s и x_s независимы (это свойство нарушается при включении внешнего магнитного поля или учете взаимодействия Дзялошинского). Выполняя каноническое квантование лагранжиана (43), получаем следующее уравнение для собственных функций u и уровней энергии ε локализованной моды (ε отсчитывается от энергии статического солитона E_0):

$$-\frac{(\hbar\omega_0)^2}{2E_0}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi_s^2} + U(\varphi_s)u = \varepsilon u , \qquad (44)$$

где $U(\varphi_s) = 1/2\,\rho \sin^2\varphi_s$. Это уравнение является хорошо известным уравнением Матье, и его уровни энергии могут быть записаны в виде

$$\varepsilon_n^{(\pm)} = \frac{1}{4}\rho E_0 + \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2E_0}\begin{cases} a_n\left[-\frac{1}{4}\rho\left(E_0/\hbar\omega_0\right)^2\right], \\ b_n\left[-\frac{1}{4}\rho\left(E_0/\hbar\omega_0\right)^2\right], \end{cases} \tag{45}$$

где $a_n(z)$ и $b_n(z)$ — собственные значения уравнения Матье, отвечающие четным и нечетным собственным функциям соответственно [59]. Точное выражение (45) можно упростить в двух предельных случаях. Если $\rho s^2 >> 4$, то начало спектра отвечает линейному осциллятору (40), а с повышением энергии до значений порядка глубины потенциальной ямы $\rho E_0/2$ уровни переходят в уровни свободного ротатора, т.е.

$$\varepsilon_n^{(\pm)} = \begin{cases} \hbar\omega_0\sqrt{\rho}\,(n+1/2), & \varepsilon_n << \rho E_0/2, \quad (46а) \\ (\hbar\omega_0/2s)n^2, & \varepsilon_n >> \rho E_0/2. \quad (46б) \end{cases}$$

Если же $\rho s^2 << 4$ (что является более реальным условием при $\rho << 1$), то движение по φ не ограничено, и энергетические уровни локализованной моды уже с самого начала отвечают ротатору; с точностью до членов порядка ρ^2 имеем

$$\varepsilon_0 \simeq \rho E_0/4\,, \quad \varepsilon_1^{(\pm)} \simeq \hbar\omega_0/2s + \varepsilon_0 \pm \rho E_0/8\,,$$
$$\varepsilon_n^{(\pm)} \simeq \varepsilon_0 + \left(\hbar\omega_0/2s\right)n^2\,, \quad n \geq 2\,. \tag{47}$$

Напомним, что аналогичный результат получался при квазиклассическом квантовании прецессионного решения (32), если число связанных с кинком магнонов $n << s$ (см. (34)). Область применимости нашего результата (47) та же, так как при его выводе предполагалась малость частоты локализованной моды по сравнению с ω_0, а эта частота есть $\Omega_n \equiv (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)/\hbar = (\omega_0/s)(n+1/2)$, и условие $\Omega_n << \omega_0$ выполняется при $n << s$. Таким образом, при $\rho s^2 << 4$ квантовые флуктуации угла φ переходят во вращения, а динамика практически совпадает с динамикой прецессионного кинка в чисто одноосном случае. Можно ожидать, что при росте степени возбуждения (росте n) это соответствие будет сохраняться. Отсюда следует, что при $\rho s^2 << 4$ для уровней энергии при произвольном n будет приближенно справедливо выражение (34). В противоположном же случае $\rho s^2 >> 4$ (что при реалистичных s отвечает «легкоплоскостному» случаю $\rho >> 1$) энергетический спектр локализованной моды при не очень больших уровнях возбуждения ($n \lesssim s\sqrt{\rho}/2$) хорошо описывается выражением (40) или (46а) для гармонического осциллятора, а при больших — также переходит в (46б).

6. Солитонная термодинамика простой модели 1D АФМ

Согласно Ландау и Пайерлсу [60], для любых 1D магнетиков с конечным радиусом взаимодействия спинов дальний порядок невозможен при любой температуре T, отличной от нуля. Отсутствие дальнего порядка можно объяснить наглядно, заметив, что солитоны типа кинков в 1D магнетиках имеют конечную энергию, и при любой температуре $T \neq 0$ их плотность n_s конечна. Очевидно, что это приводит к разрушению корреляций на расстояниях $\xi \sim 1/n_s$, величина ξ имеет смысл корреляционной длины.

Однако представление о солитонах как о тепловых возбуждениях не сводится только к возможности простого и наглядного объяснения разрушения дальнего порядка в 1D магнетиках. В середине 70-х годов в своей пионерской работе Крумхансл и Шриффер [14] показали, что при построении статистической механики нелинейных 1D систем топологические солитоны (кинки) должны рассматриваться как отдельный тип элементарных возбуждений наряду с квазичастицами линейной теории (в нашем случае магнонами). Микешка [15] впервые предсказал особый вклад солитонов в динамический структурный фактор легкоплоскостного ФМ, находящегося во внешнем магнитном поле, что послужило толчком к экспериментальному исследованию этого вклада (Кьемз и Стайнер [61]). Карри и др. [62] предложили феноменологический подход, при котором кинки и магноны рассматриваются как идеальный газ, а солитон-магнонное взаимодействие учитывается лишь в главном порядке и сводится к «перенормировке» энергии кинка. Такая перенормировка возникает вследствие того, что при появлении солитонного возбуждения число магнонных степеней свободы уменьшается, и поэтому изменяется свободная энергия магнонов (как непрерывного спектра, так и локализованных на кинке мод). В приближении разреженности солитонного газа это изменение энергии является аддитивным (т.е. пропорционально числу кинков), поэтому его можно рассматривать как вклад в энергию кинка, после чего «забыть» о взаимодействии магнонов и солитонов.

Такой подход получил название солитонной феноменологии и широко применяется для расчета вклада солитонов в термодинамику и функций отклика квазиодномерных магнетиков [3,6,7–10]. Его основные преимущества — универсальность (в отличие, скажем, от методов, использующих специфику точной интегрируемости [63–65]) и возможность вычислять динамические корреляцион-

ные функции (чего не позволяют строгие методы типа техники трансфер-оператора [66,67]).

В феноменологическом подходе функция распределения солитонов по импульсам, нормированная на полное число кинков и антикинков, имеет обычный больцмановский вид:

$$w(P) = \frac{L}{2\pi\hbar} \exp\left(-\frac{E_s(P) + \Sigma_s'(P)}{T}\right), \quad (48)$$

где L — размер системы, $E_s(P)$ — энергия солитона, а величина Σ_s, которая в общем случае также зависит от P, представляет собой упомянутую выше «перенормировку» энергии кинка. Она вычисляется как изменение свободной энергии магнонов при появлении одного кинка и состоит из двух слагаемых, отвечающих учету энергий газа магнонов непрерывного спектра и локализованных на кинке мод соответственно. Магнон непрерывного спектра с волновым вектором k при взаимодействии с кинком испытывает асимптотический сдвиг фазы $\Delta(k)$ (например, для волновых функций (38) этот сдвиг равен $-2\,\mathrm{arctg}\,k\Delta_0$), что приводит к изменению набора допустимых значений волнового вектора k_n: вместо обычного условия $k_n L = 2\pi n$ получаем $k_n L + \Delta(k_n) = 2\pi n$. В континуальном приближении это можно рассматривать как изменение магнонной плотности состояний в k-пространстве dn/dk на величину $(1/2\pi)d\Delta(k)/dk$. Соответственно изменение свободной энергии магнонов

$$\Sigma_s = T\sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\frac{1}{2\pi}\frac{d\Delta(k)}{dk} \times$$

$$\times \ln\left\{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_\alpha(k)}{T}\right)\right\} - T\ln Z_{\mathrm{loc}}', \quad (49)$$

где α нумерует различные ветви непрерывного спектра, а Z_{loc}' обозначает статистическую сумму локализованных на кинке мод. Штрих у статистической суммы означает, что при ее вычислении все уровни отсчитываются от энергии основного состояния; аналогичное преобразование фактически проделано и в первом слагаемом.*

Аномальная «легкость» кинков в АФМ существенно проявляется в термодинамике системы. Очевидно, что результаты конкретных вычислений по методу солитонной феноменологии существенно зависят от соотношения между температурой и характерными энергиями солитонов и магнонов.

В модели структурного фазового перехода, использованной Крумханслом и Шриффером [14], $\hbar\omega_0 \propto \Phi_0$ и $E_0 \propto \Phi_0^3$, где Φ_0 — величина параметра порядка. Вблизи точки перехода $\Phi \to 0$ и $E_0 << \hbar\omega_0$, поэтому при $T < E_0$ (условие разреженности солитонного газа) вкладом магнонов, в частности эффектами взаимодействия кинка с магнонами, можно пренебречь (как это и было сделано в [14]). В ферромагнетиках $E_0/\hbar\omega_0 \propto (J/K)^{1/2}$, где J и K — соответственно обменный интеграл и константа анизотропии. В гейзенберговских магнетиках $J >> K$, поэтому выполняется обратное неравенство $\hbar\omega_0 << E_0$, и кинки являются «тяжелыми» частицами. В этом случае возможно выполнение неравенства $\hbar\omega_0 << T << E_0$, обычно используемого при расчетах в рамках солитонной феноменологии [62]. Аналогичная ситуация имеет место и в модели синус-Гордон с малой константой связи $g << 1$, где $E_0/\hbar\omega_0 \propto 1/g$ [53].

Одномерные антиферромагнетики замечательны тем, что в них реализуется «промежуточная» ситуация: E_0 и $\hbar\omega_0$ — величины одного порядка, а именно, $E_0/\hbar\omega_0 = s$. Отсюда следует, что неравенство $E_0/\hbar\omega_0 >> 1$ выполняется лишь в случае асимптотически больших s. Условие $s >> 1$ часто используется как критерий применимости классического описания магнетиков, в частности, АФМ в рамках σ-модели, однако на практике классические уравнения движения адекватны уже при $s = 5/2$, как в случае $1D$ АФМ ТММС, см. следующий раздел. Таким образом, в АФМ при реалистических значениях s величина E_0 в лучшем случае в два-три раза больше $\hbar\omega_0$, и обычно используемое соотношение $\hbar\omega_0 << T << E_0$ не применимо как сильное неравенство.

Единственным условием применимости феноменологического подхода является малость толщины кинка по сравнению со средним расстоянием между кинками, что означает малость экспоненты $\exp(-E_0/T)$. Практически достаточно, чтобы выполнялось неравенство $T \lesssim (1/2-1/3)E_0$, отсюда следует, что для одномерных АФМ актуальной областью температур будет $T \lesssim \hbar\omega_0$. Данное обстоятельство, насколько нам известно, нигде не отме-

* Причина, по которой мы отбрасываем вклад энергии нулевых колебаний в (49), заключается в том, что этот вклад расходится, и при последовательном квантовом рассмотрении расходимость должна компенсироваться другой ультрафиолетовой расходимостью, возникающей из-за нормального упорядочения операторов; в сумме эти вклады образуют конечную квантовую поправку к энергии солитона [84]. Детальное обсуждение вычисления квантовых поправок не входит в нашу задачу; заметим лишь, что, поскольку квантовая поправка к E_0 пропорциональна $\hbar\omega_0$, в АФМ этот эффект выражен гораздо сильнее, чем в ФМ, из-за меньшей величины отношения $E_0/\hbar\omega_0$.

чалось и не учитывалось; между тем, как легко понять, оно существенно изменяет все ответы в солитонной термодинамике (см. ниже).

Еще одно следствие «легкости» кинков в АФМ — нелинейный квантовый характер динамики внутренних степеней свободы кинка (локализованных мод), что одновременно затрагивает и динамические, и термодинамические свойства системы, меняя формулы для уровней энергии локализованных мод по сравнению с соответствующими выражениями, полученными в линейном приближении (см. разд. 5). Это обстоятельство также может существенно проявиться в основных термодинамических характеристиках $1D$ АФМ (по сравнению с «линейным классическим» случаем, рассмотренным в работах [14,62]).

Возникновение всех этих специфических для АФМ эффектов удобно проиллюстрировать на примере простейшей лоренц-инвариантной модели АФМ (22) с ромбической (двухосной) анизотропией. Помимо соображений простоты, эта модель привлекательна тем, что описывает реальные квазиодномерные АФМ с ярко выраженной ромбической анизотропией: $CsMnCl_3 \cdot 2H_2O$ (CMC) [68] и $CH_3NH_3MnCl_3 \cdot 2H_2O$ (MMC) [69] а также $CsMnI_3$ [70], который практически является одноосным (в (22) $\beta_1 \simeq \beta_2$).

Начнем анализ с более простого случая $\rho s^2 >> 4$, когда динамику локализованной моды можно рассматривать в рамках линейного приближения. Для реальных значений спина $s \leq 5/2$ этому неравенству отвечают немалые значения ρ (для CMC значение $s = 5/2$, $\rho \simeq 3$ и $\rho s^2 \simeq 19$). В этом случае статистическая сумма локализованной моды определяется обычной формулой, характерной для бозонов с энергией $\hbar\omega_l = \hbar\omega_0 \sqrt{\rho}$:

$$Z'_{\text{loc}} = \left[1 - \exp\left(-\hbar\omega_0 \sqrt{\rho}/T\right)\right]^{-1}. \qquad (50)$$

Тогда в зависимости от значений параметров ρ и $T/\hbar\omega_0$ легко получить различные приближенные ответы для поправки к энергии кинка Σ_s:

$$\Sigma_s \simeq \begin{cases} -T \ln\left(\dfrac{\hbar\omega_0}{T}\right) - T \ln\left[\dfrac{2 + 2\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{\rho}}\right], & T >> \hbar\omega_0 \sqrt{1+\rho}\,, \\ -T \ln\left(\dfrac{\hbar\omega_0}{T}\right) - T \ln 2, & \hbar\omega_0 << T << \hbar\omega_0 \sqrt{\rho}\,, \end{cases} \qquad (51)$$

и

$$\Sigma_s \propto \exp\left(-\hbar\omega_0 \sqrt{\rho}/T\right)$$

при $T << \hbar\omega_0$.

В пределе $\rho >> 1$, формально отвечающем рассматриваемому линейному случаю, первые две строки в (51) практически совпадают, и поэтому в высокотемпературной области $T >> \hbar\omega_0$ для полной плотности солитонов

$$n_s = L^{-1} \int w(P) dP$$

получаем единый ответ

$$n_s = \frac{1}{\Delta_0} \left(\frac{2E_0}{\pi T}\right)^{1/2} e^{-E_0/T}, \qquad (52)$$

такой же, как для уравнения синус-Гордон [6,62], который часто приводится в литературе без комментариев относительно области применимости. В области низких температур $T << \hbar\omega_0$ поправкой Σ_s можно пренебречь (она экспоненциально мала), и плотность солитонов определяется выражением

$$n_s = \frac{s}{\Delta_0} \left(\frac{T}{2\pi E_0}\right)^{1/2} e^{-E_0/T}, \qquad (53)$$

похожим на формулу в работе Крумхансла и Шриффера [14], полученную (для модели φ^4) в пренебрежении солитон-магнонным взаимодействием и вкладом локализованных мод. Естественно, это выражение всегда возникает в низкотемпературном пределе, когда локализованные моды заморожены. Напомним еще раз, что для АФМ, в отличие от ФМ, температуры ниже $\hbar\omega_0$ являются все же достаточно высокими, чтобы плотность солитонов не была исчезающе малой.

В «нелинейном квантовом» случае почти легкоосного АФМ $\rho s^2 << 4$ основной вклад в статистическую сумму

$$Z'_{\text{loc}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{T}\left(\sqrt{s^2 + n^2} - s\right)\right)$$

при $T << E_0 = \hbar\omega_0 s$ дают малые n ($|n| < s$), поэтому приближенно Z'_{loc} отвечает статистической сумме свободного ротатора (см. (47)). Если $T >> \hbar\omega_0/s$, то этот ротатор можно рассматривать классически и $Z'_{\text{loc}} = (2\pi Ts/\hbar\omega_0)^{1/2}$. Для поправки к энергии солитона получаем соответственно

$$\Sigma_s = \begin{cases} -\frac{3}{2} T \ln\left(\frac{\hbar\omega_0}{T}\right) - T \ln\left(4\sqrt{2\pi s}\right), & T >> \hbar\omega_0, \\ -\frac{1}{2} T \ln\left(\frac{2\pi Ts}{\hbar\omega_0}\right), & \frac{\hbar\omega_0}{s} << T << \hbar\omega_0. \end{cases} \tag{54}$$

В низкотемпературной области $T << \hbar\omega_0/s$ уровни ротатора «вымерожены», т.е. $Z'_{\text{loc}} \simeq 1$ и $\Sigma_s \simeq 0$. Солитонная плотность в области высоких температур $T >> \hbar\omega_0$ дается выражением

$$n_s = \frac{4}{\Delta_0}\left(E_0/T\right) e^{-E_0/T}, \tag{55}$$

совпадающим с точным результатом Накамуры и Сасады [71] для чисто одноосного случая, полученным в технике трансфер-оператора. В промежуточном интервале $\hbar\omega_0/s << T << \hbar\omega_0$ получается

$$n_s = \frac{s^2}{\Delta_0}\left(T/E_0\right) e^{-E_0/T}. \tag{56}$$

Такая необычная температурная зависимость предэкспоненты полностью обусловлена квантовым характером динамики локализованной моды. В низкотемпературной области $T << \hbar\omega_0/s$ для плотности солитонов опять получаем формулу (53). Отметим, что формулы (53) и (56) не могут быть получены в рамках классического метода трансфер-оператора, так как они фактически учитывают квантовые эффекты «вымораживания» тех или иных мод. Таким образом, проведенный анализ показывает существенную специфику вклада солитонов в статические термодинамические характеристики одномерных АФМ (прежде всего корреляционную длину $\xi = 1/2n_s$) по сравнению с другими солитонсодержащими системами.

Одним из важнейших результатов солитонной феноменологии, хорошо согласующимся с экспериментом, является предсказание специфического центрального пика в динамическом структурном факторе $1D$ магнетиков [14,15,28]. Динамический структурный фактор определяет отклик системы на внешнее воздействие и представляет собой фурье-образ двухточечной спиновой корреляционной функции $S^{ij}(q, \omega) = \langle S^i_t(t) S^j_0(0)\rangle_{q,\omega}$ (см. подробнее [6,72]). Как мы убедимся ниже, квантовый характер динамики локальной моды принципиально меняет результаты, полученные для классических моделей АФМ.

Для АФМ с точностью до членов порядка $|\mathbf{m}|/|\mathbf{l}|$ или a/Δ_0 динамический структурный фактор может быть записан через корреляторы вектора $\mathbf{l}$:

$$S^{ij}\left(Q_B + q, \omega\right) = \int\int dx dx' \exp\left(iq(x - x')\right) \times$$

$$\times \int dt \exp\left(-i\omega t\right) \langle l_i(x, t)\, l_j(x', 0)\rangle, \tag{57}$$

где $Q_B = \pi/a$ есть волновой вектор магнитного брэгговского пика. Вклад корреляторов типа $\langle m_i\, m_j\rangle$ в динамический структурный фактор $1D$ АФМ был вычислен Сасаки [73]. Этот вклад приводит к слабому пику не в окрестности Q_B, а около нулевого волнового вектора.

Нетрудно видеть, что в нашей модели отличны от нуля лишь диагональные компоненты S_{ij}. Для вычисления солитонного вклада в продольную (по отношению к легкой оси) компоненту S^{zz} обычно аппроксимируют z-компоненту N-солитонного решения выражением вида [57]

$$l_z(x, t) = \pm \prod_{n=1}^{N} \text{th}\left(\frac{x - x_n^0 - v_n t}{\Delta_0}\right). \tag{58}$$

Подстановка (58) в (57) и усреднение по начальным координатам и скоростям солитонов с функцией распределения (49) приводит к достаточно сложной зависимости для $S^{zz}(q, \omega)$ в области центрального пика [28]. Форма центрального пика хорошо аппроксимируется выражением [74]

$$S^{zz}\left(Q_B + q, \omega\right) =$$

$$= \frac{4 n_s v_T^2}{\left[\omega^2 + \left(2v_T^2/\pi\right)\left(q^2 + 4n_s^2\right)\right]^{3/2}}, \tag{59}$$

где $v_T = c(T/E_0)^{1/2}$ — среднеквадратичная тепловая скорость солитона. С физической точки зрения формула (59) описывает уширенный за счет присутствия кинков магнитный брэгговский пик. Интересно, что при $q = 0$ ширина пика (59) не обращается в нуль, а пропорциональна солитонной

плотности n_s. Интегральная интенсивность пика $I(q) = \int S(q, \omega)d\omega$, которая определяет статическую корреляционную функцию, имеет Лоренцеву форму:

$$I^{zz}(q) = \frac{4\pi n_s}{q^2 + 4n_s^2}. \qquad (60)$$

Отсюда следует, что величина $\xi = 1/2n_s$ имеет смысл корреляционного радиуса $1D$ АФМ. Формулы (59) и (60) не зависят от параметров «квантовости» АФМ s и ρs^2 (точнее, зависят только через n_s).

Вид поперечных компонент динамического структурного фактора существенно зависит от параметра ρ. При $\rho s^2 >> 4$ («линейный случай») локализованная мода является жесткой, ее вклад в динамический структурный фактор сосредоточен в области высоких частот и при описании центрального пика им можно пренебречь, считая вектор l лежащим в плоскости (zy). Тогда $S^{xx} \simeq 0$, а для $S^{yy}(q, \omega)$ получаем

$$S^{yy}\left(Q_B + q, \omega\right) =$$

$$= Ln_s \left|F_\perp(q)\right|^2 \frac{(2\pi)^{1/2}}{v_T|q|} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2q^2v_T^2}\right). \qquad (61)$$

В отличие от (59), интенсивность такого пика пропорциональна плотности солитонов, в связи с чем о нем часто говорят как о собственно солитонном отклике; для АФМ этот вклад был впервые обнаружен экспериментально группой Буше [75]. Формфактор

$$F_\perp(q) = \frac{\pi}{\mathrm{ch}\,(\pi q\Delta_0/2)} \qquad (62)$$

описывает геометрическую структуру солитона, а гауссовская форма пика отвечает доплеровски размытому отклику на трансляционной (нулевой) моде.

В противоположном «квантовом нелинейном» случае $\rho s^2 << 4$ поперечный динамический структурный фактор определяется переходами между уровнями ротатора, которые также доплеровски уширяются за счет теплового движения кинков. Поскольку при $\rho << 1$ система является почти аксиально симметричной, в этом случае $S^{xx} = S^{yy} = S^{\perp}$. Результирующее выражение для $S^{\perp}(q, \omega)$ имеет вид

$$S^{\perp}\left(Q_B + q, \omega\right) = \frac{(\pi/2)^{1/2}}{v_T|q|} L\left|F_\perp(q)\right|^2 n_s(Z'_{\mathrm{loc}})^{-1} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon_n/T\right) \left\{\exp\left[-\frac{(\omega - \Omega_n)^2}{2q^2v_T^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\frac{\hbar\Omega_n}{T} - \frac{(\omega + \Omega_n)^2}{2q^2v_T^2}\right]\right\}, \qquad (63)$$

где

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_0\left[\left(s^2 + n^2\right)^{1/2} - s\right],$$

$$\Omega_n = \left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\right)/\hbar,$$

а статистическая сумма ротатора

$$Z'_{\mathrm{loc}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\varepsilon_n/T\right).$$

Эта формула описывает систему гауссовских пиков на частотах Ω_n с ширинами порядка qv_T. Огибающая этих пиков также имеет приблизительно Гауссову (при $T << \hbar\omega_0 s$) форму с дисперсией $\Gamma = \omega_0(T/E_0)^{1/2}$. При малых волновых векторах отдельные пики хорошо различимы, и лишь при $q\Delta_0 \gtrsim (E_0/Ts^2)^{1/2}$ они сливаются в один пик шириной Г. Выражение (63) асимметрично по частоте ω, причем эта асимметрия наиболее ярко проявляется при низких температурах $T << \hbar\omega_0/s$, когда ротатор «вымерожен» и наблюдается практически единственный пик при $\omega = \Omega_0$. Для легкоосного АФМ $CsMnI_3$ оценка, согласно данным работы [70], дает $\Omega_0 \simeq 28$ ГГц, что вполне доступно для ЭПР-экспериментов. Наличие внешнего магнитного поля должно приводить к расщеплению пиков; это явление является полуклассическим аналогом так называемого «солитонного магнитного резонанса», наблюдавшегося в легкоосном АФМ изинговского типа $CsCoCl_3$ со спином 1/2 [76]. Аналогичные эксперименты с гейзенберговскими магнетиками, насколько нам известно, пока не проводились.

Таким образом, уже в простейшей лоренц-инвариантной модели (22) квантовая динамика локализованной моды приводит к большому разнообразию эффектов. Магнитное поле или взаимодействие Дзялошинского нарушают лоренц-инвариантность и делают картину более сложной.

7. Легкоплоскостный АФМ во внешнем магнитном поле

Рассмотренная в предыдущем разделе простейшая модель $1D$ АФМ обладает лоренц-инвариантностью. Разрушение лоренц-инвариантности, обусловленное влиянием взаимодействия Дзялошинского или магнитного поля, приводит к качественным отличиям в динамике кинков, прежде всего к динамической стабилизации или нарушению стабильности кинка данного типа при измене-

нии его скорости, соответствующего размягчения локальных мод и т.д.

Впервые вопрос об устойчивости различных типов кинков в АФМ в присутствии магнитного поля был поставлен Харадой и соавторами [55]. Динамика кинков для случая поля впервые рассмотрена Флюгтеном и Микешкой [77], а для случая взаимодействия Дзялошинского — Ивановым и Оксюк [78]; впоследствии динамические эффекты более подробно исследовались в работах [35, 57, 58, 79]. В настоящем разделе мы продемонстрируем роль эффектов разрушения лоренц-инвариантности в солитонной термодинамике на примере наиболее популярной модели легкоплоскостного АФМ при наличии внешнего магнитного поля, лежащего в легкой плоскости. Эта модель описывает геометрию экспериментов, проведенных в квазиодномерном АФМ $(CH_3)_4NMnCl_3$, известном под названием TMMC. На этом соединении было впервые доказано существование солитонов в АФМ (Буше и Ренар [80]). Необходимость магнитного поля в этих экспериментах была обусловлена тем, что анизотропия в базисной плоскости TMMC весьма мала (менее 1% от одноосной). Следовательно, энергия солитона с разворотом l в легкой плоскости оказывалась слишком малой. Выбирая, как обычно при описании этого соединения, ось z вдоль трудной оси (перпендикулярно легкой плоскости), а поле вдоль оси x, запишем эффективную энергию анизотропии $\widetilde{w}_a = w_a + 2h^2 l_x^2/\delta$ (см. (11), (27)), в виде

$$\widetilde{w}_a = \frac{1}{2}\left(\beta_1 l_z^2 + \bar{\beta}_2 l_x^2\right), \quad \bar{\beta}_2 = \beta_2 + 4h^2/\delta, \qquad (64)$$

в основном состоянии АФМ вектор l параллелен оси y.

Для TMMC значения параметров спинового гамильтониана (1) (см. также (25)) $Js^2 \simeq 85$ K, $K_1 s^2 \simeq 1{,}9$ K, $K_2 s^2 \simeq 0{,}022$ K [81], спин $s = 5/2$. Так как $\beta_2 \ll \beta_1$, то практически при всех значениях магнитного поля $\bar{\beta}_2 = 4h^2/\delta$. С увеличением поля константа $\bar{\beta}_2$ возрастает и при $H = H_c$, где

$$H_c = \frac{1}{2} M_0 \left[\delta\left(\beta_1 - \beta_2\right)\right]^{1/2} \simeq \frac{1}{2} M_0 \left(\delta\beta_1\right)^{1/2}, \qquad (65)$$

$\bar{\beta}_2 = \beta_1$. При $H > H_c$ вместо (xy) более легкой плоскостью становится (zy).

При любом значении поля легко выписать два типа статических кинковых решений вида (29) с разворотом l в плоскостях (xy) и (zy) (угол $\varphi = \pm\pi/2$ и 0, π соответственно). Энергии кинков, согласно (30), обратно пропорциональны их характерным толщинам $\Delta_{xy} = (\alpha/\bar{\beta}_2)^{1/2}$ и $\Delta_{zy} = (\alpha/\beta_1)^{1/2}$, поэтому энергия xy-кинка линейно растет с H, а энергия zy-кинка постоянна и не зависит от поля. При $H < H_c$ нелинейным возбуждением с наименьшей энергией является xy-кинк, а при $H > H_c$ эта роль переходит к zy-кинку [55]. Для TMMC оценка дает $H_c \simeq 106$ кЭ, так что для изучения такого перехода требуются достаточно сильные поля. Величиной, наиболее легко определяемой экспериментально, является энергия кинка E_0, так как основная температурная зависимость любого солитонного вклада определяется экспоненциальным множителем $\exp(-E_0/T)$, входящим в выражения для плотности солитонов. Эксперименты по неупругому рассеянию нейтронов, проведенные в широком интервале полей [82], приводят к зависимости $E_0(H)$, изображенной на рис. 1. Экспериментальные данные показывают, что при $H \lesssim 100$ кЭ энергия линейно растет с ростом H, и что энергия не зависит от H при $H \gtrsim 110$ кЭ. Таким образом, данные эксперимента подтверждают предложенную в [55] и описанную выше простую картину перехода от xy-кинков ($E_0 = \alpha_0 H$) к zy-кинкам (E_0 не зависит от H) при увеличении поля.

Количественное согласие является не столь хорошим (ожидаемое значение коэффициента α_0 в зависимости $E_0 = \alpha_0 H$ равно 0,34 K/кЭ, а экспериментально наблюдаемое — 0,26 K/кЭ [6]). Это различие может быть объяснено квантовыми поправками к энергии солитона. Подробное обсуждение этих поправок выходит за рамки нашей работы, анализ этой проблемы читатель может найти в

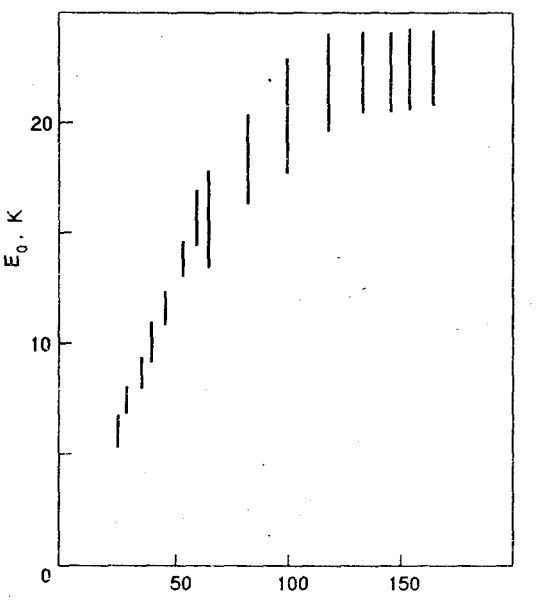

Рис. 1. Эффективная энергия кинка E_0 в TMMC как функция магнитного поля H (согласно данным [82]).

обзоре Микешки и Стайнера [6]. Следуя работам [35,57,58], рассмотрим динамические свойства классических солитонных решений в легкоплоскостном АФМ. Уравнения движения в угловых переменных имеют вид (16), (17), с

$$\widetilde{w}_a = \frac{1}{2}\beta(\varphi)\sin^2\theta,\ D(\theta,\varphi) = \left(\frac{2\alpha\gamma H}{c^2}\right)\sin^2\theta\sin\varphi\ ,$$

где

$$\beta(\varphi) = \beta_1\cos^2\varphi + \bar{\beta}_2\sin^2\varphi\ . \qquad (66)$$

Вследствие отсутствия лоренц-инвариантности анализ этих уравнений крайне сложен, и решения для движущихся кинков могут быть получены аналитически лишь приближенно в тех или иных предельных случаях.

При малых полях роль слагаемых, разрушающих лоренц-инвариантность, мала, и их эффекты проявляются только при достаточно больших скоростях солитона $v \sim c$, которые не актуальны для низкотемпературной термодинамики (см. подробнее [77] и обзоры [3,6]). Поэтому рассмотрим, на наш взгляд, наиболее интересный случай полей, близких к H_c, когда эффекты разрушения лоренц-инвариантности проявляются наиболее ярко.

Будем искать солитонные решения в виде $\theta = \theta(\xi)$, $\varphi = \varphi(\xi)$. Уравнения движения в этом случае принимают вид

$$\theta'' - (\varphi')^2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{\Delta_0^2(\varphi)}\sin\theta\cos\theta + \frac{2\gamma H\tilde{v}}{c^2}\varphi'\sin^2\theta\sin\varphi = 0\ , \qquad (67а)$$

$$(\varphi'\sin^2\theta)' + \frac{\beta_1 - \bar{\beta}_2}{\alpha}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \frac{2\gamma H\tilde{v}}{c^2}\theta'\sin^2\theta\sin\varphi = 0\ , \qquad (67б)$$

где $\Delta_0(\varphi) = [\alpha/\beta(\varphi)]^{1/2}$, штрих обозначает дифференцирование по ξ, и использовано обозначение $\tilde{v} = v[1 - v^2/c^2]^{-1/2}$. Легко видеть, что при $\varphi = 0, \pi$ уравнение (67б) удовлетворяется тождественно, т.е. решение с $\varphi = 0, \pi$, отвечающее zy-кинку, остается справедливым и при произвольной скорости v. Для xy-кинка ситуация иная; при $v \neq 0$ точного решения с $\varphi = \pm\pi/2$ нет. Приближенное решение для xy-кинка можно найти, воспользовавшись вариационным подходом [79]. Однако при $H \to H_c$ можно построить асимптотически точное решение [57,58]. Для этого отметим, что характерный масштаб, на котором происходит изменение угла φ, есть $[\alpha/(\beta_1 - \bar{\beta}_2)]^{1/2}$, что при $H \to H_c$ много больше характерной толщины кинка $(\alpha/\beta_1)^{1/2}$. В этом случае можно считать, что φ в пределах кинка постоянно и не зависит от ξ. Полагая $\varphi = \varphi_0(v)$, из (67а) подучаем для θ решение вида (29) с $\Delta = \Delta_0(\varphi_0)$. Подставляя это решение в (67б) и интегрируя его в бесконечных пределах, получаем самосогласованную зависимость для $\varphi_0(v)$ в виде

$$\cos\varphi_0(v) = (\tilde{v}/\tilde{v}_c)\ \mathrm{sgn}\left\{H\theta'\left(H - H_c\right)\right\}\ , \qquad (68)$$

где $\tilde{v}_c = v_c[1 - v_c^2/c^2]^{-1/2}$, критическая скорость v_c дается выражением

$$v_c = c\left[1 + \frac{\pi^2H^2H_c^2}{4(H_c^2 - H^2)^2}\right]^{-1/2}\ . \qquad (69)$$

При $H \to H_c$ критическая скорость стремится к нулю. Решение (68) имеет смысл при $|v| \le v_c$, так что v_c играет роль предельной скорости для xy-кинков. Уравнение (68) при фиксированной скорости $-v_c < v < v_c$ имеет два решения $\varphi_0 = \varphi_{1,2}(v)$. При стремлении v к $\pm v_c$ оба эти корня стремятся одновременно к 0 или π, т.е. кинк xy-типа непрерывно переходит в кинк zy-типа (см. рис. 2).

Устойчивость полученных решений может быть исследована в линейном приближении [58] с использованием тех же приближений, что и в разд. 5, и анзаца (35). Получается следующая задача на собственные значения:

$$\left\{\hat{L}_0 - \Omega^2 - \rho\cos 2\varphi_0\right\}\mu = \rho\cos\theta_0\sin 2\varphi_0\vartheta + \frac{2\gamma H\Delta_0(\varphi_0)}{c(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\sin\theta_0\sin\varphi_0 \times$$
$$\times\left\{i\Omega\vartheta - \frac{v}{c}\Delta_0(\varphi_0)\vartheta' - \frac{v}{c}\,\mathrm{sgn}\,(\theta')\left[\mu\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0 + 2\vartheta\cos\theta_0\right]\right\},$$
$$\left\{\hat{L}_0 - \Omega^2\right\}\vartheta = \rho\cos\theta_0\sin 2\varphi_0\mu - \frac{2\gamma H\Delta_0(\varphi_0)}{c(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\sin\theta_0\sin\varphi_0 \times \qquad (70)$$
$$\times\left\{i\Omega\mu - \frac{v}{c}\Delta_0(\varphi_0)\left[\mu' - \mu\theta_0'\,\mathrm{ctg}\,\theta_0\right]\right\},$$

где $\hat{L}_0$ — оператор вида (36) с $\Delta_0 \to \Delta_0(\varphi_0)$; безразмерная частота $\Omega = \omega\Delta_0(\varphi_0)/c$, а величина $\rho = (\beta_1 - \bar{\beta}_2)/\beta(\varphi_0)$ является аналогом параметра ромбичности, при $H \to H_c$ значение $\rho \to 0$. Устойчивость солитона определяется нижайшим собственным значением Ω_0^2, отвечающим локализованной на кинке моде. Подчеркнем, что уравнения (70) для ϑ, μ при немалом поле принципиально сложнее уравнений простейшей модели двухосного АФМ прежде всего из-за того, что при $H \neq 0$ колебания ϑ и μ могут оказаться связанными уже в линейном приближении. Однако при $H \simeq H_c$, когда $\rho \ll 1$ и $v_c \ll c$, задача может быть решена по теории возмущений.

Начнем со случая *zy*-кинка. Этот случай более простой, т.к. при $\varphi = 0, \pi$ уравнения для ϑ и μ не связаны. Уравнение для ϑ такое же, как при $H = 0$; оно описывает нулевую моду и магноны непрерывного спектра. Колебания же переменной μ в *zy*-кинке характеризуются интересной особенностью: их частота содержит слагаемые, линейные по v и меняющие знак при $v \to -v$. Частота этой моды в первом порядке теории возмущений по v/c и ρ определяется выражением

$$\omega_{l,zy}^2 = \omega_0^2 \left[|\rho| (v/v_c) \operatorname{sgn} \left(H\theta' \cos\varphi_0 \right) - \rho \right]. \tag{71}$$

Таким образом, устойчивость *zy*-кинка зависит от знака v, т.е. направления его движения, и от знака величины $\sigma_0 = \operatorname{sgn}(\theta' \cos\varphi_0)$. Так, при $H > H_c$ *zy*-кинки выгодны энергетически, кинки с $\sigma_0 > 0$ ($\sigma_0 < 0$) устойчивы в интервалах скоростей $-v_c < v < c$ и $-c < v < v_c$ соответственно (для определенности мы положили $H > 0$). Если же $H < H_c$, то эти кинки энергетически невыгодны и нестабильны при $v = 0$. Однако при $v \neq 0$ появляются области их устойчивости: $v_c < v < c$ для $\sigma_0 > 0$ и $-c < v < -v_c$ для $\sigma_0 < 0$ (см. рис. 3). Этот парадоксальный, на первый взгляд, эффект (зависимость частоты локальной моды от направления движения кинка) возникает и для многих кинков в АФМ с взаимодействием Дзялошинского [35,78]. Его можно легко объяснить [35,58], заметив, что в *zy*-кинке присутствуют два вклада в намагниченность: статический, пропорциональный H, и динамический, пропорциональный $[\mathbf{l}, \partial\mathbf{l}/\partial t] \propto v\theta_0'$. С ростом модуля скорости стабилизируется тот кинк, для которого эти вклады параллельны, и дестабилизируется (уменьшается Ω_0^2) тот, для которого они антипараллельны.

Расчет для *xy*-кинка более сложный, так как должен проводиться на основе полной системы двух связанных уравнений (70) с учетом слагае-

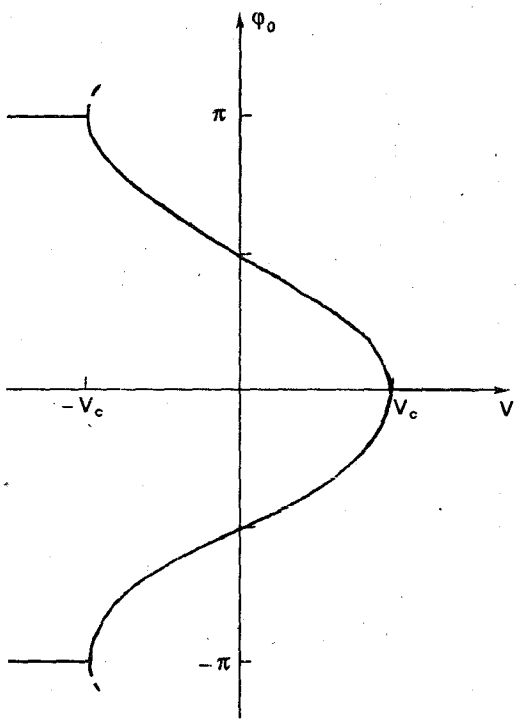

Рис. 2. Зависимость угла φ_0, описывающего кинковое решение (68), от скорости кинка v. В силу периодичности по φ изображена лишь часть кривой $-\pi \le \varphi_0 \le \pi$, области $\varphi_0 > \pi$ и $\varphi_0 < -\pi$ показаны штриховой линией. При $|v| > v_c$ существуют только решения $\varphi_0 = 0, \pm\pi, \ldots$, которые описывают более симметричные *zy*-кинки. При уменьшении $|v|$ до значения v_c происходит спонтанное нарушение симметрии, и внутри интервала $-v_c < v < v_c$ существуют два типа решений $\varphi_0 = \varphi_1(v)$ и $\varphi_0 = \varphi_2(v)$, определяемые уравнением (68).

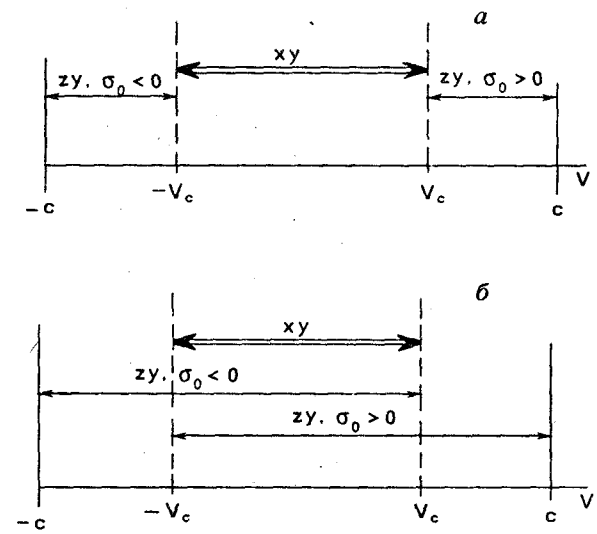

Рис. 3. Области устойчивости солитонных решений различного типа: $H < H_c$ (*а*), $H > H_c$ (*б*). Величина $\sigma_0 = \operatorname{sgn}(\theta' \cos\varphi_0)$ играет роль топологического заряда для *zy*-кинков. Сдвоенная линия обозначает наличие двух типов *xy*-кинков.

мых, линейных по v и Ω, во втором порядке теории возмущений [35,58]. Этот расчет дает

$$\omega_{l,xy}^2 = \left(\omega_0^2 \pi^2/4\right)\left(1 - v^2/v_c^2\right), \qquad (72)$$

т.е. значение частоты моды, локализованной на xy-кинке, не зависит от знака v и стремится к нулю при $v \to v_c$. Этот кинк устойчив во всей области своего существования $-v_c \le v \le v_c$ как при $H < H_c$, когда он выгоден энергетически, так и при $H > H_c$, когда более выгодным является альтернативный zy-кинк [57]. Эти аналитические результаты в точности согласуются с данными численного моделирования работы [79].

Анализ системы (70) позволяет выявить еще одну интересную особенность: для xy-кинка локализованная мода существует не всегда, а отщепляется от дна непрерывного спектра при превышении некоторой критической скорости v_L:

$$v_L = v_c\left(1 - 4/\pi^2\right)^{1/2},$$

при этом вблизи v_L частота

$$\Omega_{xy} \simeq 1 - \left[\pi^2(\pi^2-4)/8v_c^2\right](v-v_L)^2 .$$

Поучительно проанализировать закон дисперсии солитонных возбуждений в модели без лоренц-инвариантности. Зависимость энергии от скорости может быть записана в виде

$$E_s(v) = \frac{2\alpha M_0^2 A_0}{\Delta_0(\varphi_0(v))\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}, \qquad (73)$$

пригодном как для xy-, так и для zy-кинков; для zy-кинков $\varphi_0 = 0, \pi$, а для zy-кинков $\varphi_0(v)$ определяется уравнением (68). Как следует из (73), при $H > H_c$ энергия xy-кинка убывает с увеличением скорости (рис. 4). Это привело авторов работы [77] к ошибочному выводу о неустойчивости xy-кинка при $H > H_c$. Численное моделирование подтверждает как результаты об устойчивости, так и вид зависимости $E_s(v)$ [79].

Импульс P может быть легко вычислен и дается выражениями

$$P_{zy}(v) = vE_s(v)/c^2 + \sigma_0 P_0 ,$$
$$P_{xy}(v) = vE_s(v)/c^2 + \operatorname{sgn}(H - H_c)P_0\tilde{v}/\tilde{v}_c . \qquad (74)$$

Здесь $P_0 = (\pi E_0/2c)(\gamma H/\omega_0)$, где $E_0 = 2M_0^2\sqrt{\alpha\beta_1}\,A_0$ — энергия покоя zy-кинка. Таким образом, импульс статического zy-кинка отличен от нуля и равен $\sigma_0 P_0$, что является довольно обычным явлением для солитонов и магнетиках [1]. Результирующая зависимость $E_s(P)$ показана на рис. 5. Легко показать, что dE_s/dP непрерывна в точках $P = \pm P_c = P(\pm v_c)$ (в отличие от dE_s/dv при $v = \pm v_c$), в то время как d^2E_s/dP^2 терпит в этих точках разрыв. В этом смысле переход от zy- к xy-кинку при уменьшении импульса может рассматриваться как «фазовый переход» второго рода, при котором симметрия zy-кинка спонтанно нарушается. Одному zy-кинку отвечает два возможных «дочерних» кинка xy-типа, согласно двум корням $\varphi_{1,2}$ уравнения (68) (см. рис. 2).

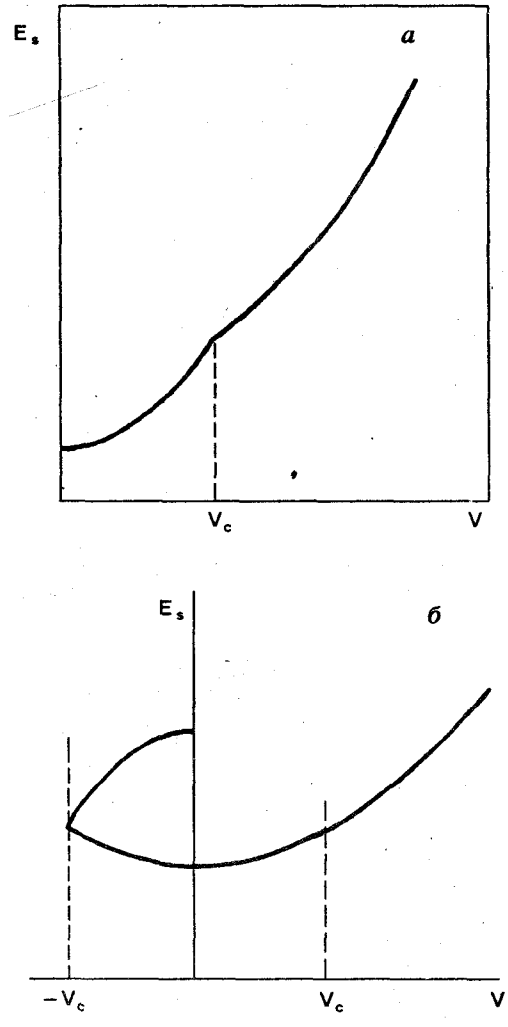

Рис. 4. Зависимость энергии кинка E_s от его скорости v: $H < H_c$ (*а*), $H > H_c$ (*б*). Показана только та часть кривой, которая отвечает положительному значению импульса кинка P (см. рис. 5).

В непосредственной близости к точкам перехода $v = \pm v_c$, как видно из (71), (72), частота локализованной моды в линейном приближении стремится к нулю. Следовательно, растет амплитуда квантовых нулевых колебаний, и линейное приближение теряет смысл подобно тому, как это было в рассмотренной выше простой модели ромбического

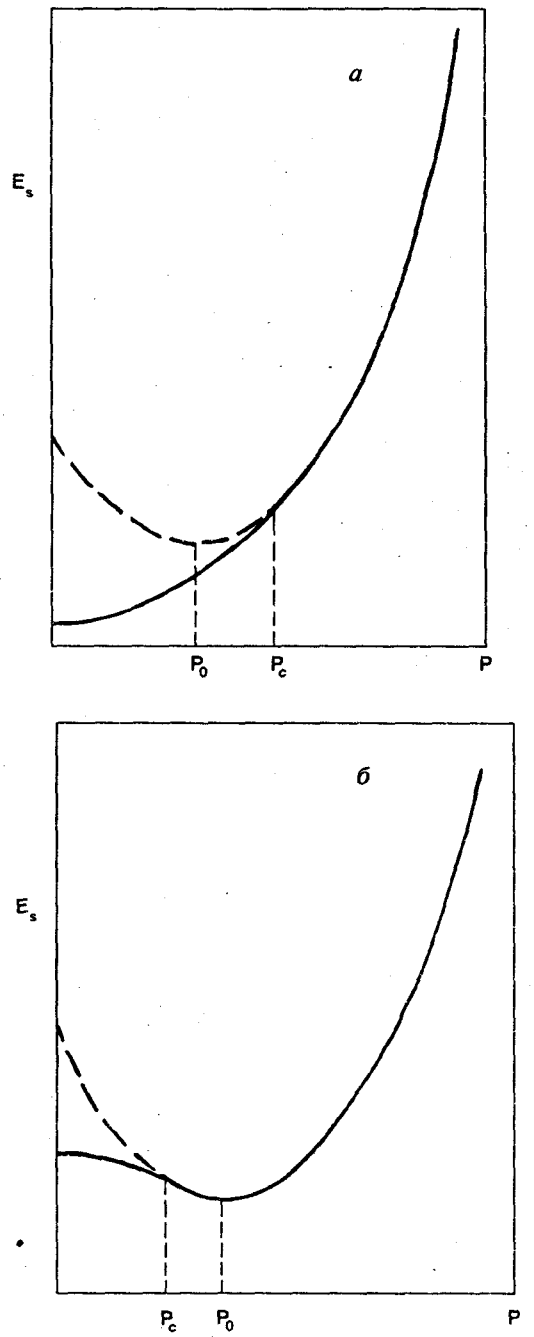

Рис. 5. Закон дисперсии кинковых возбуждений (зависимости $E_s(P)$): $H < H_c$ (*а*), $H > H_c$ (*б*). Ввиду того что $E_s(P) = E_s(-P)$, изображены только части кривых, для которых $P > 0$. Сопоставление различных участков зависимостей $E_s(P)$ и $E_s(v)$ может быть проведено с помощью соотношения $dE_s(P)/dP = v$. Штриховой линией обозначен закон дисперсии *zy*-кинков в области их нестабильности.

АФМ. Для анализа этих эффектов, воспользовавшись анзацем (42) с $\overline{\Delta}_0 = \Delta_0(\varphi_s) = [\alpha/\beta(\varphi_s)]^{1/2}$, можно снова получить уравнение Шредингера вида (44) для зависящей от φ_s волновой функции с нелинейным потенциалом

$$U(\varphi_s) = \frac{c^2}{2E_0}\left\{P - P_0 \cos\varphi_s \operatorname{sgn}(H\theta_0')\right\}^2 - \frac{1}{2}\rho E_0 \sin^2\varphi_s , \qquad (75)$$

который зависит от импульса кинка. Импульс P, являющийся интегралом движения, связан со скоростью кинка $\dot{x}_s$ и углом φ_s соотношением, сходным с (74):

$$P = \dot{x}_s E_s(\dot{x}_s)/c^2 + P_0 \operatorname{sgn}\theta' \cos\varphi_s . \qquad (76)$$

Поскольку φ_s сильно флуктуирует в нелинейном потенциале (75), а P остается постоянным, мы приходим к выводу, что благодаря квантовым эффектам скорость и координата кинков (как *xy*, так и *zy*) также не являются хорошо определенными величинами из-за сильной связи колебательной и трансляционной мод. Все следствия этого интересного эффекта пока не исследованы.

8. Классификация неодномерных солитонов

В предыдущих разделах обсуждался вклад солитонов типа кинков в термодинамические свойства квазиодномерных АФМ. Для квазидвумерных (2*D*) магнетиков вклады солитонов в термодинамику и функции отклика также достаточно хорошо известны. Достаточно сослаться на существование перехода Березинского—Костерлица—Таулеса (БКТ) [85,86], который прямо обусловлен особыми солитонами (вихрями) в системах с непрерывным вырождением основного состояния. Однако солитонная термодинамика подобных систем изучалась прежде всего для тонких пленок сверхтекучего ^{4}He [87] и 2*D* легкоплоскостных ФМ [88]. Теоретическое исследование солитонной термодинамики в 2*D* АФМ только начинается. Обзор свойств 2*D* солитонов в АФМ в настоящее время не может быть столь же полным, как для 1*D* солитонов — кинков в этих магнетиках. Особенно это относится к солитонам в легкоосных или ромбических АФМ. Однако нам представляется полезным дать краткий обзор фактов, надежно установленных на настоящий момент.

Состояние двухподрешеточных АФМ, как и ферромагнетиков, описывается единичным вектором $\mathbf{l}^2 = 1$. В силу этого классификация солитонов в этих магнетиках проводится таким же образом, как и ферромагнетиков. Прежде всего отметим, что в магнетиках с любым типом магнитной анизотропии могут существовать топологические 2*D* локализованные солитоны с конечной энергией. Они характеризуются однородным значением намагниченности вдали от солитона ($\mathbf{l} \to \mathbf{l}_0$ при $x, y \to \infty$, постоянный вектор $\mathbf{l}_0$ совпадает с одной

из легких осей). Топологические свойства этих солитонов определяются нетривиальностью гомотопической группы $\pi_2(S_2) = Z$ [11–13], и описываются инвариантом (индексом Понтрягина) Q:

$$Q = \frac{1}{8\pi}\int\int dxdy\,\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\mathbf{l}\left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_\alpha},\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_\beta}\right]\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4\pi}\int\int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,, \qquad (77)$$

который в случае локализованных солитонов принимает целочисленные значения $Q = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Здесь интегрирование производится по плоскости магнетика (x, y); θ, φ — введенные выше (см. (14)) угловые переменные для вектора $\mathbf{l}$. Основная проблема при анализе локализованных солитонов, их нестабильность относительно коллапса, будет рассмотрена в следующем разделе.

В легкоплоскостных магнетиках имеет место вырождение основного состояния по направлениям $\mathbf{l}$ в легкой плоскости. В этом случае могут возникать нелокализованные солитоны — магнитные вихри, для которых даже вдали от кора вихря распределение вектора $\mathbf{l}$ неоднородно, но $\mathbf{l}$ лежит в легкой плоскости. Топологические свойства нелокализованных $2D$ солитонов описываются фундаментальной гомотопической группой $\pi_1(R)$, где R — пространство вырождения системы. В случае двухподрешеточных АФМ или ферромагнетиков R совпадает с окружностью S^1 в пространстве $\mathbf{l}$, $l_z = 0$, $l_x^2 + l_y^2 = 1$, ось z — трудная ось и $\pi_1(S^1) = Z$ [11–13]. Поэтому вихри характеризуются целочисленным топологическим зарядом

$$q = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \nabla\left[\operatorname{arctg}\left(l_y/l_x\right)\right] ds = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma d\varphi\,, \qquad (78)$$

где интегрирование производится по элементу длины ds бесконечно удаленного простого контура γ на плоскости магнетика, охватывающего точку, в которой находится центр вихря.

Можно показать, что в магнетике с чисто одноосной анизотропией, $w_a = w_a(\theta)$, для обоих типов солитонов (локализованных солитонов и вихрей) решение можно искать в виде (см. [1,2]).

$$\theta = \theta(r), \quad \varphi = \nu\chi + \varphi_0\,, \qquad (79)$$

где r, χ — полярные координаты в плоскости магнетика; ν — целое число*. Функция $\theta(r)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением [1,2]

$$\alpha\left(\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right) = \frac{\partial w_a}{\partial\theta}\,, \qquad (80)$$

граничные условия однозначно определяются физическими соображениями.

Требование непрерывности поля намагниченности в центре солитона приводит к условию

$$\theta = \pi m, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \text{ при } r \to 0\,.$$

На больших расстояниях от центра солитона граничное условие сводится к естественному требованию $(d\theta/dr) \to 0$ со значением $\theta(\infty)$, определяющимся типом магнетика. Для легкоплоскостных магнетиков следует выбрать $\theta(\infty) = \pi/2$, для легкоосных выберем $\theta(\infty) = 0$, т.е. $\mathbf{l}(\infty) = \mathbf{e}_z$. Легко показать, что с учетом этих условий топологический заряд локализованного солитона $Q = 1/2\nu\,[(-1)^m - 1]$ отличен от нуля только для $m = 2k + 1$. (Обычно выбирают $m = 1$, т.е. $\theta(0) = \pi$ и $\mathbf{l}(0) = -\mathbf{e}_z$.) Для вихрей в легкоплоскостных АФМ топологический заряд (78) не зависит от m, $q = \nu$. При любом значении $q \neq 0$ возможны два типа вихрей, которым отвечают значения $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ в центре вихря. Величина $p = (-1)^m$, $p = \pm1$, называется поляризацией вихря и играет роль второго топологического заряда, характеризующего данный вихрь (наличие двух топологических зарядов q и p характерно только для вихрей в магнетиках). Для нелокализованного солитона (вихря) величина инварианта Q, вычисленная по формуле (79), конечна и имеет полуцелое значение

$$Q = -\frac{1}{2}pq\,. \qquad (81)$$

При объединении двух вихрей в вихревую пару, которая при $q_1 = -q_2 = q$ является локализованным возбуждением, топологический заряд Q принимает только целые значения q или 0.

Вопрос о существовании решения уравнения (80) с заданными граничными условиями легко может быть проанализирован качественно с использованием метода фазовой плоскости, а конкретное решение может быть построено с помощью численного интегрирования (80) методом «стрельбы» [1,2].

Энергия вихря (как и других нелокализованных солитонов такого типа, например, дислокаций, дисклинаций в жидких кристаллах и т.д.) зависит от

* Дзялошинский [90], Ковалев и Косевич [91] показали, что топологическая неоднородность вектора $\mathbf{l}$ с полуцелым значением ν возникает в классическом АФМ вблизи краевой дислокации. Распределение $\mathbf{l}$ в ней характеризуется сингулярным поведением в точке дислокации и похоже на распределение вектора-директора вокруг дисклинации в жидком кристалле. При наличии анизотропии эта точка является точкой окончания 180-градусной доменной стенки или системы доменных стенок [1].

размера системы L и логарифмически расходится при $L \to \infty$. Такая расходимость возникает за счет слагаемого типа $(\alpha/2)\sin^2\theta(\nabla\varphi)^2$ в плотности энергии магнетика, которое с учетом условий $\theta \to \pi/2$, $\nabla\varphi \to e_\chi/r$, $r \to \infty$ дает логарифмически расходящийся вклад. Для энергии вихря получается

$$E = a\alpha\pi M_0^2 q^2 \ln\left(AL/r_0\right), \quad r_0 = (\alpha/\beta)^{1/2}, \quad (82)$$

где величина r_0 определяет радиус кора вихря (r_0 имеет тот же порядок величины, что и толщина кинка), константа $A \simeq 4{,}2$ может быть определена после численного решения уравнения для $\theta(r)$ ([89], см. также [1,2]).

Предположение о чисто одноосной симметрии магнетика, т.е. условие $\partial w_a/\partial\varphi = 0$, является идеализацией. В любом реальном легкоплоскостном магнетике обязательно присутствует анизотропия в базисной плоскости. Даже если константа этой анизотропии β' мала по сравнению с одноосной, $\beta' \ll \beta$, ее учет важен, так как он снимает бесконечное вырождение основного состояния системы. К такому же эффекту приводит и включение внешнего магнитного поля в плоскости магнетика, что производилось, например, в экспериментах [88,92]. В этом случае простое решение типа $\theta = \theta(r)$, $\varphi = \nu\chi + \varphi_0$ адекватно только на расстояниях $r \ll r_0' = (\alpha/\beta')^{1/2}$. На больших расстояниях изолированный вихрь производит доменную стенку (или систему доменных стенок). Пары вихрь—антивихрь достаточно большого размера $L \gg r_0'$ оказываются связанными «струнами» — доменными стенками. Энергия такой пары пропорциональна L, т.е. реализуется ситуация конфайнмента.

9. Локализованные 2*D* солитоны, их структура и устойчивость

Представление о структуре 2*D* локализованных солитонов малого радиуса $R \ll r_0$ дает точное решение Белавина—Полякова [91], полученное для изотропного магнетика:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \left(R/r\right)^{|\nu|}, \quad \varphi = \nu\chi + \varphi_0, \quad (83)$$

см. подробнее обзоры [1,2,12]. Топологический заряд Q солитона (83) равен ν. Энергия этого солитона не зависит от произвольного параметра R, определяющего радиус солитона, и описывается формулой

$$E = |Q|E_0 = 4\pi a a M_0^2|Q|. \quad (84)$$

При учете энергии анизотропии степенное убывание угла θ сменяется экспоненциальным, а в энергии солитона возникают слагаемые, пропорциональные R^2: $E = |\nu|E_0 + C_\nu\beta R^2$, где C_ν = const при $|\nu| > 1$ и $C_\nu \propto \ln(r_0/R)$ при $|\nu| = 1$ [94,95]. Из этого выражения видно, что энергия солитона как функция R не имеет минимума при любом конечном значении R. Этот вывод показывает, что функционал энергии магнетика в простейшей модели, включающий только члены с $(\nabla\mathbf{l})^2$ и энергию анизотропии, не имеет экстремали, описывающей солитонное решение с конечным радиусом R. Следовательно, статические 2*D* солитонные решения, определяющие минимум энергии магнетика на классе функций с данным топологическим зарядом Q, в такой модели магнетика не существуют. Этот результат может быть получен и путем качественного анализа уравнения для $\theta(r)$ [1,2]. Фактически он является частным случаем хорошо известной теоремы Хобарта—Деррика [96] об отсутствии неодномерных статических солитонов с конечной энергией. (Заметим, что эта теорема не применима к магнитным вихрям, энергия которых логарифмически зависит от размера системы.)

Отсутствие точных статических 2*D* солитонных решений проявляется в том, что любое начальное локализованное распределение намагниченности при учете диссипации коллапсирует (его радиус стремится к нулю) за конечное время. Поэтому иногда говорят, что 2*D* и 3*D* солитоны нестабильны относительно коллапса.

Обсудим стабилизацию статических 2*D* солитонов, которая может реализоваться при учете дополнительных слагаемых в энергии АФМ (18). (Другую возможность, так называемую динамическую стабилизацию, мы обсудим ниже.) В работах Скирма [97], Энза [98] показано, что учет в энергии слагаемых, содержащих градиент в четвертой степени, может приводить к стабилизации трехмерных солитонов относительно коллапса. В физике магнетизма эти слагаемые естественным образом возникают при переходе от дискретной модели к континуальному описанию. Их можно представить в виде

$$\frac{1}{4}\alpha_1 a^2\left(\nabla^2\mathbf{l}\right)^2, \quad \frac{1}{4}\alpha_2 a^2\left[(\nabla\mathbf{l})^2\right]^2, \quad (85)$$

α_2 определяется биквадратичным обменом, a — постоянная решетки. В этом случае энергию трехмерного солитона радиусом R можно оценить по формуле

$$E_{3D} = C_1\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\frac{a^2}{R} + C_2\alpha R + C_3\beta R^3,$$

$$C_1, C_2, C_3 = \text{const}.$$

При $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ энергия имеет минимум при $R = R_0 \neq 0$, т.е. существует стабильное солитонное решение. Однако для 3*D* магнитных солитонов

$R_0^{(3D)} \sim a[(\alpha_1+\alpha_2)/\alpha]^{1/2} \sim a$, т.е. радиус солитона сравним с постоянной решетки. Ясно, что в этом случае макроскопическое описание и, что особенно важно, выводы о топологической стабильности теряют смысл.

Для $2D$ магнетиков ситуация более благоприятна [95,46]. В наиболее интересном случае малых радиусов солитона для расчета его энергии можно выбрать в качестве пробной функции решение Белавина—Полякова [93], считая R вариационным параметром. Тогда легко получить, что энергия $2D$ солитона имеет вид

$$E_0|Q| + C_v\beta R^2 + C'\left(\alpha_1+\alpha_2\right)a^2/R^2,$$

т.е. ее минимум соответствует радиусу $R_0 >> a$, $R_0^2 \simeq a[(\alpha_1+\alpha_2)/\beta]^{1/2} \sim ar_0$, и макроскопическое приближение адекватно. В этом случае значение R_0 определяется конкуренцией энергии анизотропии и дополнительных членов типа (85), но главный вклад в энергию по-прежнему дает слагаемое $(\alpha/2)(\nabla\mathbf{l})^2$ и $E \simeq |Q|E_0$ (84). Единственное ограничение этого механизма стабилизация состоит в том, что для реализации необходимо выполнение условия $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$. Для квадратной решетки в приближении ближайших соседей реализуется как раз обратный знак этого параметра, однако условие $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ может быть выполнено для некоторых дискретных моделей магнетиков [99].

Второй вариант статической стабилизации возможен при учете в энергии АФМ слагаемого, линейного по градиентам $\mathbf{l}$:

$$\Delta w_l = \gamma_{i,jk}\, l_i \left(\partial l_j/\partial x_k\right). \qquad (86)$$

Такие члены возможны в магнетиках без центра инверсии [23]; они могут приводить к термодинамической выгодности неоднородных состояний магнетиков*. В этом случае энергию можно оценить по формуле $E = |Q|E_0 + C_v\beta R^2 + C'\gamma QR$, и стабилизация возможна при любом знаке γ, однако при данном $\operatorname{sgn}\gamma$ стабилизируется солитон только с одним знаком топологического заряда. Барьяхтар и Иванов [101], в частности, указали на возможность такой статической стабилизации $2D$ солитонов в купратной плоскости YBaCuO в антиферромагнитной фазе за счет того, что в энергии этого $2D$ АФМ содержится член типа (86).

Стабильные локализованные солитоны могут существовать и в простой модели магнетика типа (18), если пренебречь диссипацией и учесть наличие еще одного, кроме энергии, интеграла движения $I\{\mathbf{l}\}$ (так называемая динамическая стабилизация). В качестве этого интеграла движения могут быть выбраны z-проекции полного спина S_z [1,2] или орбитального момента поля вектора $\mathbf{l}$ [105] (см. разд. 3), а в некоторых случаях — импульс $\mathbf{P}$, см. [106,109,110]. В этом случае структура солитона определяется минимумом энергии $W\{\mathbf{l}\}$ при заданном значении $I\{\mathbf{l}\}$, т.е. экстремалью вспомогательного функционала $W\{\mathbf{l}\} - \lambda I\{\mathbf{l}\}$. Множитель Лагранжа λ обычно имеет простой физический смысл. Например, учет сохранения S_z приводит к прецессионным солитонам (см. разд. 5), при этом $\lambda = \hbar\omega$. При учете сохранения проекции импульса P_i величина $\lambda_i = v_i$. Во всех случаях функционал $\lambda I\{\mathbf{l}\} - W\{\mathbf{l}\}$ совпадает с лагранжианом магнетика $L\{\mathbf{l}\}$.

Если функционал энергии $W\{\mathbf{l}\}$ не имеет минимума, отвечающего солитону, функционал $L\{\mathbf{l}\}$ в принципе может иметь экстремаль, описывающую стабильный динамический солитон**. Конкретный анализ солитонного решения может быть проведен или непосредственным интегрированием уравнений, например, уравнения для $\theta(r)$ в случае прецессионного солитона [1,2], или прямым анализом экстремумов на основе некоторых пробных функций.

Обсудим конкретные примеры динамических солитонов. Прецессионные неодномерные солитоны, существующие за счет сохранения S_z, в АФМ могут существовать только при учете анизотропии

* Существование термодинамически выгодных неоднородных (спиральных) состояний магнетиков, как и существование таких инвариантов, было впервые предсказано Дзялошинским [102]. В работах [103] утверждалось, что при достаточно большом значении γ энергия магнитного вихря E отрицательна, что приводит к термодинамической выгодности рождения вихрей, однако устойчивость вихря с $E < 0$ не была исследована. Теория термодинамически выгодных вихревых решеток в магнетиках с инвариантами типа (86) была построена Богдановым и Хубертом [104]. Мы будем обсуждать только случай достаточно малых γ, когда основное состояние магнетика является однородным, а энергия вихрей положительна. Такие вихри были предсказаны в работах [101], позже они исследовались в [104].

** Необходимо отметить, что если вопрос о стабильности статических солитонов решается просто (стабильному солитону отвечает минимум энергии), то для динамического солитона ситуация более сложная. Условие минимума энергии при данном значении интеграла движения (например, S_z или импульса $\mathbf{P}$) означает, что энергия имеет минимум по отношению к таким вариациям поля $\mathbf{l}$, которые оставляют S_z или $\mathbf{P}$ постоянным. Такой подход развивался, например, в обзоре Маханькова [107]. Это не означает, что стабильному солитону отвечает минимум вспомогательного функционала $W - \hbar\omega S_z$ или $W - \mathbf{Pv}$, более того, солитону, как правило, отвечает седловая точка этого функционала. Устойчивость прецессионных солитонов в АФМ на основе прямого метода Ляпунова была исследована в [45].

высшего порядка (например, при выборе w_a в виде (27)) и только при определенном знаке константы b, а именно, при $b > 0$ [45,46,108]. При этом частота прецессии ω находится в интервале (достаточно узком при $b \ll \beta$)

$$\frac{1}{4}\gamma^2 M_0^2 \delta \left(\beta - b/2\right) = \omega_t^2 < \omega^2 < \omega_0^2 = \frac{1}{4}\gamma^2 M_0^2 \delta\beta ,$$

в котором, как отмечалось в разд. 5, в 1D случае существуют не решения типа прецессионных кинков, а 1D локализованные солитоны. Условие существования ротационных солитонов в АФМ, которые стабилизируются за счет сохранения L_z (z-проекции орбитального момента поля вектора l), имеют тот же вид [105]. Энергия солитонов $E(S_z)$ (или $E(L_z/\hbar)$) растет с ростом S_z (или $L_z/\hbar$). Ее минимальное значение $E \simeq E_0|Q|$ достигается при S_z или $L_z/\hbar$ порядка нескольких единиц. Ясно, что вклад в термодинамику при низких температурах $T \ll E_0 \sim J$ могут давать солитоны с $Q = \pm 1$ и не очень больших значениях S_z (или $L_z/\hbar$).

Мы рассмотрели стабильность неподвижных солитонов с учетом интеграла движения S_z. В лоренц-инвариантных моделях условия стабильности движущихся и неподвижных солитонов совпадают, и наличие еще одного интеграла движения (импульса) не проявляется. Однако для моделей, не обладающих лоренц-инвариантностью, сохранение импульса также может привести к стабилизации солитона.

Подобная возможность обсуждалась для 3D солитонов в B-фазе сверхтекучего ^{3}He (Воловик и Минеев [109]) и ФМ (Папаниколау [110]), а также для 2D солитонов в АФМ во внешнем магнитном поле, перпендикулярном легкой оси (Иванов [106]).

Возможность динамической стабилизации этого типа связана с тем, что импульс неподвижного солитона не равен нулю. (Мы уже сталкивались с такой возможностью при обсуждении zy-кинков в АФМ при $H \neq 0$.) Для 2D АФМ эта ситуация реализуется при $Q = \pm 1$ и наличии внешнего поля, перпендикулярного оси анизотропии. Вычисляя импульс 2D солитона вида (79), легко получить, что при $v = 0$

$$\mathbf{P} = P_0 \mathbf{n} , \quad P_0 = \frac{\gamma H E_0}{c^2} \int_0^\infty dr \left[r \frac{d\theta}{dr} + \sin\theta \cos\theta \right] , \tag{87}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \sin\Psi + \nu \mathbf{e}_y \cos\Psi$, $\Psi = \varphi_0 - \Phi$, $H_x = H\cos\Phi$, $H_y = H\sin\Phi$. Простой расчет с использованием решения (83) дает

$$P_0 = \left(E_0/2c^2\right) \gamma H R . \tag{88}$$

Солитону отвечает минимум энергии при заданном значении импульса, т.е. экстремум вспомогательного функционала (функции Лагранжа) $L = \mathbf{Pv} - W$. С учетом (87) и (88) получаем, что

$$L = L\left(\mathbf{v}, R, \varphi_0\right) = E_0 \frac{v^2}{2c^2} + \gamma H R \frac{E_0}{4c^2} (\mathrm{nv}) -$$

$$- E_0 \left[1 + C_\nu \left(R/r_0\right)^2 \right] ,$$

экстремум достигается при таких значениях v и φ_0, при которых n параллельно v. Из условия $\partial L/\partial R = 0$ следует, что равновесное значение радиуса солитона пропорционально его скорости

$$R_0 = \left(r_0^2 \gamma H v/c^2\right) \ln\left(c^2/r_0 \gamma H v\right) \tag{89}$$

(см. подробнее в [106]). При разумных предположениях о значениях v и H радиус солитона оказывается малым, но макроскопическим, $a \ll R \ll r_0$.

Таким образом, для 2D магнетиков можно указать ряд моделей, в которых 2D локализованные солитоны стабильны относительно коллапса. Поскольку их энергия конечна, $E = |Q| E_0$, при любой конечной температуре в магнетике должен существовать газ таких солитонов с конечной плотностью. При $T \ll E_0 \sim J$ присутствуют практически только солитоны с $Q = \pm 1$, их плотность n_s экспоненциально мала, $n_s \propto \exp(-E_0/T)$. Иванов и Колежук [100] показали, что газ таких солитонов приводит к появлению центрального пика в динамическом структурном факторе 2D магнетиков. Для АФМ в модели свободного движения солитонов этот пик имеет Гауссову форму

$$S^{zz} \propto \exp\left(-m_* \omega^2/2q^2 T\right),$$

m_* — масса солитона. Форма пика изменяется на Лоренцеву

$$S^{zz} \propto Dq^2/\left[\omega^2 + (Dq^2)^2\right]$$

при учете вязкого трения и диффузии при движении солитона, D — коэффициент диффузии. Для ФМ вид солитонного вклада в динамический структурный фактор может быть более сложным из-за гироскопического характера движения солитонов [100] и из-за существования прецессии в солитоне [150].

В ряде слоистых АФМ в области температур $T_N < T < (1{,}2-1{,}3)T_N$ наблюдался экспоненциальный вклад типа $\exp(-E'/T)$ в ширину линии электронного спинового резонанса (см. ссылки в [111]). Валднер интерпретировал эти результаты как вклад 2D локализованных солитонов [111]. Значение E' хорошо согласуется с формулой Бела-

вина—Полякова для энергии $2D$ солитона $E_0 = 4\pi Js^2$, для ряда соединений экспериментальное значение $E'/Js^2 = 12{,}7 \pm 1{,}2$ [111].

Вопрос о том, какой конкретный механизм приводит к стабилизации локализованных солитонов в данных материалах, остается открытым. В них, по-видимому, отсутствуют члены, линейные по градиентам l, а взаимодействие спинов в плоскости является ферромагнитным, так что с точки зрения $2D$ свойств эти материалы являются ФМ, а не АФМ, и стабилизация за счет сохранения импульса невозможна. Однако такое хорошее совпадение величины E' с ожидаемым значением E_0, на наш взгляд, не может быть случайным, и можно надеяться, что в этих работах действительно наблюдались $2D$ солитоны.

10. Солитоны и фазовый переход в двумерных легкоплоскостных магнетиках

Основная проблема низкоразмерного магнетизма связана с вопросом о наличии или отсутствии магнитного фазового перехода и существовании магнитного дальнего порядка. Как хорошо известно, для $1D$ магнетиков дальний порядок невозможен, его разрушение может быть объяснено наличием газа кинков (см. разд. 6).

Для $2D$ магнетиков ответ на вопрос о фазовом переходе и дальнем порядке не столь однозначный и простой. Для магнетиков с дискретным вырождением, например, легкоосных АФМ, возможен фазовый переход такого типа, как в $2D$ модели Изинга, с существованием дальнего порядка ниже точки перехода. Для изотропных или легкоплоскостных магнетиков при любой конечной температуре существование дальнего порядка невозможно. Этот факт был строго установлен в классических работах Мермина и Вагнера [112], Хоэнберга [113] на основе неравенства Боголюбова (теорема о $1/q^2$ [114]). Однако затем было установлено [85,86], что в $2D$ легкоплоскостных магнетиках все же существует своеобразный фазовый переход, получивший название перехода Березинского—Костерлица—Таулеса (БКТ-переход). В точке БКТ-перехода при $T \to T_c + 0$, как и для обычного фазового перехода в $3D$ магнетиках, восприимчивость магнетика и корреляционный радиус расходятся, однако характер расходимости иной. В частности, при $T \to T_c + 0$ расходимость корреляционного радиуса ξ не степенная, как для $3D$ магнетиков ($\xi \propto \tau^{-a}$), а экспоненциальная:

$$\xi(T) = \xi_0 \exp\left(\frac{b}{\sqrt{\tau}}\right), \quad \tau = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad \xi_0 = \text{const}. \tag{90}$$

Согласно [115], величина $b = \pi/2$, расчеты по методу ренорм-группы [116], эксперимент и численное моделирование (см. ниже) дают меньшее значение b.

Основное отличие БКТ-перехода от стандартного связано со свойствами низкотемпературной фазы. В этой фазе (фазе Березинского) $2D$ магнетик не имеет дальнего порядка, однако убывание статических корреляторов параметра порядка имеет степенной характер, например $\langle \mathbf{l}(\mathbf{r}, 0)\, \mathbf{l}(0, 0)\rangle \propto r^{-\eta}$. Фаза Березинского обладает некоторыми свойствами, характерными для упорядоченных фаз, например конечной спиновой жесткостью (Покровский и Уймин [117], Нельсон и Костерлиц [118]). Поэтому в ней (как и в обычной $3D$ упорядоченной фазе при $T \to T_c - 0$) существуют хорошо определенные спиновые волны, которые отсутствуют при $T > T_c$ в обоих случаях.

БКТ-переход и некоторые свойства фаз, существующих выше и ниже T_c, могут быть описаны в рамках простой «солитонной» схемы, использующей представление о газе топологических $2D$ солитонов — магнитных вихрей.

Согласно [86], при $T > T_c$ в $2D$ магнетике существует газ свободных магнитных вихрей. Достаточно очевидно, что наличие газа несвязанных вихрей разрушает дальний порядок. Корреляционный радиус ξ может быть связан с плотностью вихревого газа $n_v \propto 1/\xi^2$. Точный расчет (см. ниже) дает

$$n_v = \left(\frac{1}{2\xi}\right)^2 = \left(\frac{1}{4\xi_0^2}\right) \exp\left(-\frac{2b}{\sqrt{\tau}}\right), \tag{91}$$

т.е. плотность свободных вихрей конечна при $T > T_c$ и обращается в ноль при $T \to T_c + 0$ по экспоненциальному закону.

Ниже точки БКТ-перехода вихри и антивихри связаны в вихревые пары. Такая пара является локализованным возмущением, в частности, угловая переменная φ стремится к постоянному значению φ_0 вдали от центра пары. Однако стремление φ к φ_0 происходит достаточно медленно (по $2D$ дипольному закону). Для пары вихрей, расположенных в точках $a/2$ и $-a/2$, при $|r| \gg |a|$ легко получить

$$\varphi = \frac{a_x y - a_y x}{x^2 + y^2} + \varphi_0 .$$

Для газа пар конечной плотности после усреднения по ориентации и размерам вихревых пар получается, что величина $\langle(\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(0))^2\rangle$ расходится логарифмически, а коррелятор вектора параметра порядка убывает по степенному закону [115]. Таким образом, свойства низкотемпературной фазы Березинского также могут быть описаны на основе вихревой феноменологии.

Температура БКТ-перехода также может быть легко получена на основе этой концепции [86]. Величину T_c естественно оценить как значение температуры, при которой изменение свободной энергии при рождении одного свободного вихря становится отрицательным, т.е. $\Delta F = E - T\Delta S < 0$ при $T > T_c$. Здесь E — энергия вихря, ΔS — изменение энтропии системы при рождении вихря.

Как отмечалось выше (см. (82)), в энергии вихря есть логарифмическое слагаемое $\pi a a M_0^2 \ln (L/r_0)$, которое играет главную роль для уединенного вихря (или газа вихрей малой плотности). Конфигурационная энтропия отдельного вихря $\Delta S = \ln W$, определяемая числом возможных значений координаты вихря $W \sim (L/r_0)^2$, также пропорциональна $\ln L$: $\Delta S = 2 \ln (L/r_0)$. Следовательно, ΔF становится отрицательной при $T > T_c$, где

$$T_c = \frac{\pi}{2} \alpha a M_0^2 = \frac{\pi}{2} J s^2 . \qquad (92)$$

Запись T_c через параметры дискретного спинового гамильтониана приведена в [93].

Таким образом, при описании статических свойств $2D$ легкоплоскостных ферромагнетиков и АФМ концепция газа вихрей и вихревых пар хорошо согласуется с анализом критических явлений точными методами теории фазовых переходов (методом ренормализационной группы, высокотемпературными разложениями и т.д.). Подчеркнем, что в этом случае можно не делать различий между ФМ и АФМ, так как статические свойства этих материалов одинаковы.

Обсудим экспериментальные данные для реальных магнитных систем, которые могут рассматриваться как $2D$ магнетики [119]. К ним прежде всего относятся слоистые кристаллы как с ферромагнитным (K_2CuF_4 [120], $(CH_3NH_3)_2CuCl_4$ [121], $(C_2H_5NH_3)_2CuCL_4$ [122]), так и с антиферромагнитным ($BaNi_2(PO_4)_2$, $BaCo_2(AsO_4)_2$ [123, 92]) взаимодействием внутри слоя*. $2D$ характер этих магнетиков обусловлен тем, что внутрислоевое взаимодействие в них значительно (в 10^2 раз и более) превышает межслоевое. К этим системам относятся также купратные плоскости кристаллов, являющихся высокотемпературными сверхпроводниками. Однако они обладают достаточно сильной анизотропией в базисной плоскости, и для них трудно ожидать появления БКТ-перехода. С другой стороны, в этих материалах может проявиться вклад локализованных солитонов, который должен приводить к экспоненциальным зависимостям типа $\exp(-E_0/T)$ (см. предыдущий раздел).

Обменное взаимодействие магнитных слоев может быть существенно уменьшено за счет интеркалирования. Отметим работу Вислера, Забеля и Шапиро [88], содержащую весьма детальную информацию о интеркалированном графитом $CoCl_2$, в котором слои магнитных атомов разделялись двумя плоскостями графита ($CoCl_2$–ИГП) и межслоевой обмен составлял менее 10^{-3} от внутрислоевого. Кроме квазидвумерных, исследовались и искусственно приготовленные истинно двумерные магнетики — липидные монослои (пленки Ленгмюра—Блодже) с магнитными атомами, например, стеарат марганца $MnSt_2$ (St означает одну формульную единицу $C_{18}H_{35}O_2$). Соединение $MnSt_2$ представляет собой АФМ с достаточно сильным взаимодействием Дзялошинского [124].

Последний класс материалов представляет огромный интерес для физики $2D$ магнетиков, так как только в них можно полностью избавиться от эффектов трехмерности. К сожалению, детальные исследования термодинамических свойств таких материалов, насколько нам известно, не проводились. (Анализ спиновых волн в $MnSt_2$ соответствует картине, характерной для БКТ-перехода [124]). Что касается слоистых магнетиков, то в настоящее время существует ряд работ, в которых наблюдалось хорошее согласие изменений квазистатических спиновых флуктуаций с предсказаниями БКТ-теории (динамические свойства магнетика вблизи БКТ-перехода обсуждаются в следующем разделе). Хорошее согласие с БКТ-теорией отмечалось в ранних работах, посвященных $2D$ магнетикам, например, в работах Эйна для $(CH_3NH_3)_2CuCl_4$ [121] и Рено и др. для $2D$ АФМ $BaNi_2(PO)_4)_2$ и $BaCo_2(AsO_4)_2$ [123,125].

Однако более подробный анализ, проведенный впоследствии, показал, что ситуация является более сложной. Одна из причин — взаимодействие между слоями, которое проявляется в свойствах системы даже при $J'/J < 10^{-3}$. В работе Вислера и др. [88] было получено, что статические свойства $CoCl_2$–ИГП хорошо описываются в рамках вихревой феноменологии только при достаточно высоких температурах ($T > 13$ К). В этой области квазиупругое рассеяние нейтронов определяется формулой $(q^2 + 1/\xi^2)^{-3/2}$, характерной для газа

* Уместно заметить, что межслоевое взаимодействие для магнетиков с ферромагнитным взаимодействием внутри слоя может быть антиферромагнитным, так что ниже точки трехмерного упорядочения эти материалы ведут себя как слоистые АФМ.

свободных вихрей (см. следующий раздел). Но при понижении температуры ниже 13 К не наблюдался простой переход к поведению, характерному для фазы Березинского со связанными вихревыми парами и отсутствием дальнего порядка. При понижении температуры от 13 до 9,7 К корреляционная длина продолжала расти, но оставалась конечной. Однако наблюдалось изменение показателя степени в законе, определяющем критическое рассеяние, от $(q^2 + 1/\xi^2)^{-3/2}$ к простой лоренцевской $(q^2 + 1/\xi^2)^{-1}$, более характерной для $3D$ флуктуаций.

При $T < T_u = 9{,}7$ К возникало ненулевое значение ферромагнитного дальнего порядка в слое, $M \propto (T_u - T)^{\beta}$, но при этом до $T = 8{,}8$ К не было никаких указаний на $3D$ упорядочением. При $T < T_l = 8{,}8$ К наблюдался $3D$ АФМ дальний порядок, связанный с АФМ взаимодействием слоев $CoCl_2$.

Таким образом, вместо БКТ-перехода авторы [88] наблюдали сложное поведение, отвечающее кроссоверу от $2D$ ближнего порядка к $3D$ АФМ дальнему порядку. Динамические свойства «неупорядоченной» $2D$ фазы при $T > 13$ К также не вполне хорошо описывались в рамках вихревой феноменологии (см. следующий раздел).

Указанные причины — межслоевое взаимодействие и влияние $3D$ корреляций — проявляются и для других $2D$ магнетиков. Например, Гаво и др. [92] отмечали, что проведенные ими исследования ЯМР в АФМ $BaNi_2(PO_4)_2$ при $T > 23$ К хорошо описываются в рамках вихревой феноменологии, если предположить, что $T_c = 22{,}4$ К. Однако они наблюдали трехмерное упорядочение при $T = T_{3D} = 23{,}6$ К. Таким образом, $T_c = 0{,}95 T_{3D} < T_{3D}$ и БКТ-переход имеет смысл «виртуального».

Указанные данные свидетельствуют о том, что даже слабое межслоевое взаимодействие может сильно исказить простую картину БКТ-перехода. Эксперименты на истинно $2D$ магнетиках типа $MnSt_2$ весьма сложны из-за малого объема магнитной среды (в этих материалах проводились лишь резонансные измерения). Поэтому особенно существенным является анализ с помощью численного моделирования методом Монте-Карло и молекулярной динамики, проводимое на больших (50×50 и 100×100) спиновых решетках (детали метода см. в работах Кавабаты и др. [126], Вайсина и Бишопа [127]). Кратко обсудим постановку задачи в работах, выполненных этим методом, который можно рассматривать как своеобразный численный эксперимент.

В большинстве работ, в которых проводилось численное моделирование $2D$ магнетиков, авторы исходили из дискретного спинового гамильтониана, определенного на квадратной решетке:

$$\hat{H} = J \sum_{m,n} \mathbf{S}_m \mathbf{S}_n + (\lambda - 1)\, S_m^z S_n^z \qquad (93)$$

с классическими спинами $\mathbf{S}_n$ и взаимодействием ближайших соседей. Обменный интеграл $J > 0$ для АФМ и $J < 0$ для ФМ. Магнитная анизотропия определяется параметром анизотропного обмена λ: $\lambda = 1$ отвечает изотропному пределу, $\lambda = 0$ — «чистой» xy-модели. Соотношение параметров гамильтониана (93) с используемыми нами феноменологическими параметрами определяется формулами

$$\alpha = \frac{Js^2}{2\mu_B M_0} a^2\,,\quad \beta = 2(1-\lambda)\frac{Js^2}{\mu_B M_0}\,,\quad \delta = \frac{4Js^2}{\mu_B M_0}\,, \qquad (94)$$

где $M_0 = 2\mu_B s/a^3$, a — постоянная решетки. Рассмотренному нами выше слабоанизотропному случаю $\beta << \delta$ отвечает неравенство $(1 - \lambda) << 1$. Однако моделирование при малых $(1 - \lambda)$ затруднительно (кор вихря расширяется как $(1 - \lambda)^{-1/2}$, и следует рассматривать большую решетку), поэтому моделирование проводилось обычно при $\lambda = 0$ [16,128–131] или $\lambda = 0{,}8$ [132,133].

Оказалось, что описанные выше вихри с выходом спинов из легкой плоскости реализуются только при достаточно слабой анизотропии, т.е. при λ, превышающем некоторое критическое значение λ_c. По последним данным Вайсина [134] $\lambda_c = 0{,}72$ для квадратной решетки, $\lambda_c = 0{,}86$ и $0{,}62$ для гексагональной и треугольной решеток соответственно. При меньших значениях λ реализуются так называемые внутриплоскостные (in–plane) вихри, в которых все спины лежат в легкой плоскости, а центр вихря формально находится вне узла решетки. В континуальной модели такие вихри определяются сингулярным решением $\theta = \pi/2$, $\varphi = \nu\chi + \varphi_0$.

Судя по формуле (92), значение T_c слабо зависит от анизотропии при умеренных ее значениях (хотя $T_c = 0$ в изотропном пределе $\lambda = 1$). Действительно, для различных значений λ при численном моделировании как для ФМ, так и для АФМ получались значения $T_c \sim 0{,}79$–$0{,}81$ (здесь и далее в единицах Js^2). В области значений $T_c < T < 1{,}2T_c$ определенная из данных моделирования корреляционная длина очень хорошо описывалась формулой (90), характерной для БКТ-перехода (см. рис. 6). Значение b в разных случаях оказывалось меньшим, чем $\pi/2$, $b = 0{,}51$–$0{,}28$. При более высоких температурах соответствие было не столь хорошим (наблюдался кроссовер к более изотропному поведению), что, по-видимому, объясняется повышением плотности вихрей. Авторы [132] оценивают верхнюю границу применимости вихревой

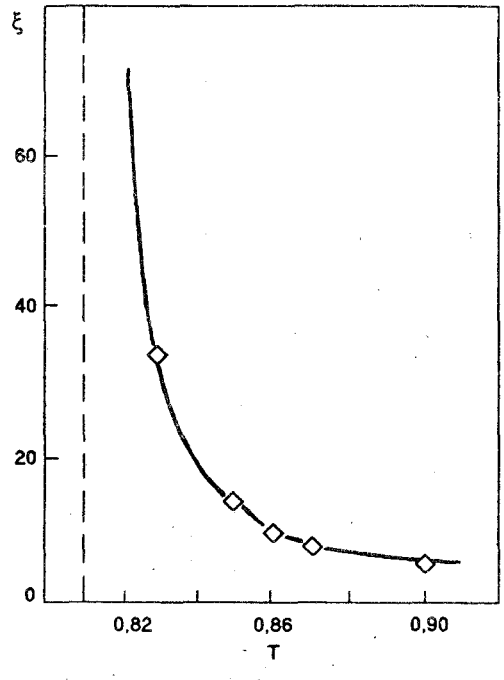

Рис. 6. Корреляционная длина ξ (в постоянных решетки) как функция температуры: данные компьютерного моделирования для модели АФМ с взаимодействием Дзялошинского (□); сплошная линия подгонка к формуле (90). Штриховая линия показывает критическую температуру $T_c = 0{,}81$ (по данным [133]).

феноменологии для слабоанизотропного магнетика как $T_c/(1-\lambda)^{1/2}$.

Таким образом, данные численного эксперимента лучше описываются в рамках вихревой феноменологии, чем данные эксперимента для реальных материалов. Это позволяет сделать вывод о справедливости концепции вихревой феноменологии для $2D$ магнетиков и объяснить несогласие эксперимента и теории использованием идеализированной чисто $2D$ модели, пренебрегающей межслоевым взаимодействием, а также неидеальностью образцов (существованием мозаичной структуры $CoCl_2$–ИГП [88], системы трещин в $(CH_3NH_3)_2CuCl_4$ [121] и т.д.).

11. Динамические свойства $2D$ магнетиков в рамках вихревой феноменологии

Вихревая феноменология не только дает возможность просто и наглядно объяснить БКТ-переход и свойства фаз при $T > T_c$ и $T < T_c$. Основная ее ценность состоит в возможности описания динамических свойств $2D$ магнетиков. Ситуация аналогична той, которая имеет место для $1D$ магнетиков (см. разд. 6, 7): динамические функции отклика магнетика могут быть описаны в терминах почти идеального газа элементарных возбуждений, но наряду с квазилинейными возбуждениями (магнонами) необходимо учитывать и существенно нелинейные — вихри.

Для магнетиков эту схему впервые развил Хубер [135], который вычислил среднеквадратичную скорость вихрей в вихревом газе $\bar{u}$ (ниже мы обсудим эти результаты подробнее). Покровский и Хвещенко [136] проанализировали отклик газа вихрей на внешнее переменное поле с учетом вязкого трения вихрей. В весьма важной работе Мертенса, Бишопа, Вайсина и Кавабаты [16] на основе вихревой феноменологии был впервые предсказан центральный пик в функциях отклика $2D$ ФМ. Дальнейшее развитие вихревой феноменологии для ФМ было проведено Гове и др. [128–130], Фолькелем и др. [132], для АФМ — Фолькелем и др. [131,133], Ивановым и Шекой [137]. Во всех работах предполагалось, что скорость вихря за характерное время наблюдения $1/\omega$ не меняется, а функция распределения вихрей по скоростям имеет Гауссов вид

$$F(v) = \left(2/\bar{u}^{\,2}\right) \exp\left(-v^2/\bar{u}^{\,2}\right). \qquad (95)$$

В этом случае результат вычисления качественно похож на результат, который получается в том же приближении для газа π-кинков в $1D$ АФМ. Центральный пик имеется как во внутриплоскостных ($S^{xx} = S^{yy} = S^{\parallel}(\mathbf{q}, \omega)$), так и во внеплоскостных ($S^{zz} = S^{\perp}(\mathbf{q}, \omega)$) корреляторах. Корреляции в легкой плоскости, определяющие $S^{\parallel}(\mathbf{q}, \omega)$, являются глобально-чувствительными к присутствию вихрей (так же, как корреляции вдоль легкой оси для $1D$ АФМ). Поэтому их интенсивность растет с уменьшением плотности вихрей, не содержит форм-фактора вихря (полная аналогия с кинками) и имеет алгебраическую асимптотику «лоренц в квадрате» [16]. Приведем вид $S^{\parallel}(\mathbf{q}, \omega)$ для ФМ, так как интересующие нас выражения для АФМ удобно записать через функцию $S^{(0)}_{\parallel}(q, \omega) = S^{\parallel}_{\mathrm{FM}}(\mathbf{q}, \omega)$:

$$S^{(0)}_{\parallel}(q, \omega) = \frac{s^2}{8\pi n_v} \frac{\gamma^3}{\left[\omega^2 + \gamma^2(1 + q^2/4n_v)\right]^2}, \qquad (96)$$

где $\gamma = \sqrt{\pi n_v}\,\bar{u}$. Функция $S^0_{\parallel}(q, \omega)$ зависит от q только через комбинацию $(q^2 + 4n_v)$, откуда следует выписанная выше (91) связь плотности вихрей и корреляционного радиуса ξ : $4n_v = 1/\xi^2$. Интегральная интенсивность центрального пика, определяющая статическую корреляционную функцию и квазиупругое рассеяние нейтронов, обратно пропорциональна плотности вихрей

$$I^{(0)}_{\parallel}(q) = \frac{s^2}{\pi n_v}\left[1 + (\xi q)^2\right]^{-3/2}. \qquad (97)$$

Зависимость (97) хорошо согласуется с экспериментом (см. предыдущий раздел).

Внеплоскостной коррелятор, как и для свободного движения π-кинков, пропорционален квадрату модуля формфактора вихря $f(q)$ и плотности вихрей. Он имеет Гауссову форму [16]

$$S_{\perp}^{(0)}(q,\omega) = \left|f(q)\right|^2 F_{\perp}(q,\omega)\,,$$
$$F_{\perp}(q,\omega) = \frac{n_v}{\sqrt{\pi}\,q\bar{u}}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/q^2\bar{u}^2}\,, \qquad (98)$$

что отражает предположение о свободном движении вихрей.

Формулы (96)–(98) относятся к ФМ. В случае АФМ вид центрального пика (как продольного, так и поперечного) более сложный, но также может быть выражен через функции $S_{\parallel}^{(0)}(q,\omega)$, $S_{\perp}^{(0)}(q,\omega)$. Чтобы это проделать, напомним, что вклад вектора l дает центральный пик вблизи магнитного брэгговского пика, т.е. при $\mathbf{q} \sim \mathbf{K}_0$, для квадратной решетки $\mathbf{K}_0 = (\pi/a)(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$. Вклад вектора m дает центральный пик около $q \simeq 0$. В том случае, когда отсутствуют и магнитное поле, и взаимодействие Дзялошинского, намагниченность в вихре мала в меру малости его скорости [128]. Тогда для АФМ основным является центральный пик при $\mathbf{q} \simeq \mathbf{K}_0$ и

$$S^{\parallel}(\mathbf{q},\omega) = S_{\parallel}^{(0)}\left(\left|\mathbf{q}-\mathbf{K}_0\right|,\omega\right)\,,$$
$$S^{\perp}(\mathbf{q},\omega) = S_{\perp}^{(0)}\left(\left|\mathbf{q}-\mathbf{K}_0\right|,\omega\right)\,.$$

Если же $\mathbf{H} \neq 0$ или присутствует взаимодействие Дзялошинского, то нужно учитывать вклад m. Считая, что H перпендикулярно легкой плоскости, а взаимодействие Дзялошинского имеет простейший вид $d[\mathbf{m},\mathbf{l}]_z$ (для других вариантов теряется чисто одноосная симметрия АФМ и не существуют чистые вихревые решения), легко получить (см. (9))

$$m_z = \left(\frac{2h}{\delta}\right)\left(1 - l_z^2\right),\ m_x + im_y = -i\left(\frac{d}{\delta}\right)\left(l_x + il_y\right).$$

Поэтому поле влияет только на внеплоскостную компоненту $S^{ij}(\mathbf{q},\omega)$ [137], а взаимодействие Дзялошинского — на внутриплоскостную [132]. В результате для АФМ получаются выражения

$$S^{\parallel}(\mathbf{q},\omega) = S_{\parallel}^{(0)}\left(\left|\mathbf{q}-\mathbf{K}_0\right|,\omega\right) + \left(\frac{d^2}{\delta^2}\right) S_{\parallel}^{(0)}(q,\omega),$$
$$S^{\perp}(\mathbf{q},\omega) = \left|f(q)\right|^2 F_{\perp}\left(\left|\mathbf{q}-\mathbf{K}_0\right|,\omega\right) + \qquad (99)$$
$$+ \left(4h^2/\delta^2\right)\left|\tilde{f}(q)\right|^2 F_{\perp}(q,\omega),$$

где $f(q)$, $\tilde{f}(q)$ — формфакторы, определяющие распределение l_z и m_z [132,137]. Зависимость $S^{\perp}$ от величины поля может быть хорошим экспериментальным тестом для проверки теории.

В вихревой феноменологии [16,128–132] вид динамического структурного фактора определяется двумя параметрами: плотностью вихрей n_v и среднеквадратичной скоростью $\bar{u}$. Значение n_v можно определить из статических расчетов (91). Значение $\bar{u}$ для вихрей в гейзенберговском легкоплоскостном ФМ было получено Хубером [130]:

$$\bar{u}_H = \frac{1}{2}\gamma\alpha M_0\left(\pi n_v \ln\Lambda\right)^{1/2} = \frac{Jsa^2}{\hbar}\left(\pi n_v \ln\Lambda\right)^{1/2}, \qquad (100)$$

о значении параметра Λ см. ниже. Формулы такого типа использовались при описании динамики ансамбля квантовых вихрей в теории $2D$ сверхтекучести [138], см. также обзор [87]. Обсудим происхождение таких выражений, которые сильно отличаются, например, от стандартной формулы $\bar{u} = (T/m_*)^{1/2}$ (m_* — эффективная масса) для среднеквадратичной скорости частиц в газе кинков в $1D$ магнетиках или локализованных солитонов.

Основным приближением при описании динамики вихрей в легкоплоскостных $2D$ магнетиках является пренебрежение инерционными эффектами*. Уравнения движения ансамбля вихрей в этом приближении можно легко получить, выбрав подстановку вида

$$\cos\theta = \sum_{\alpha=1}^{N}\cos\theta_0\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}_\alpha\right)\,,$$
$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \operatorname{arctg}\left(\frac{y-Y_\alpha}{x-X_\alpha}\right) \qquad (101)$$

(где θ_0 отвечает неподвижному вихревому решению, $\mathbf{R}_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$ — координата α-го вихря) и подставив ее в уравнения для переменных θ, φ (16), (17). Домножая (16) на $\nabla\theta_0(\mathbf{r}-\mathbf{R}_i)$, а (17) на $\nabla\varphi_0(\mathbf{r}-\mathbf{R}_i)$, и интегрируя сумму (16) и (17) по

* Эффективная масса $2D$ солитонов вычислялась Ивановым и Стефановичем [139], но прямое применение этого метода к вихрям приводит к расходящимся выражениям [137,140]. Физическая причина — «вмораживание» вихря в конденсат [141]; эффект такого типа имеет место и для вихрей в сверхтекучем гелии в модели слабонеидеального бозе-газа. Вопрос о роли инерционных слагаемых в динамике вихрей является, на наш взгляд, открытым.

всему пространству [136], можно записать уравнение для координаты i-го вихря в виде

$$G\left[\frac{d\mathbf{R}_i}{dt}, \mathbf{e}_z\right] - \eta \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_i} \sum_{i \neq j} U\left(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j\right) \equiv \mathbf{F}_i \tag{102}$$

(здесь, как и отмечалось, опущены инерционные слагаемые). Слагаемым в этом уравнении легко придать простой физический смысл сил различной природы, действующих на вихрь. $\mathbf{F}_i$ представляет собой потенциальную силу взаимодействия данного вихря с другими. Поскольку вихри взаимодействуют по $2D$ кулоновскому закону

$$U\left(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2\right) = -e_1 e_2 \ln\left|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\right|, \; e_i = q_i M_0 \sqrt{\pi a a}, \tag{103}$$

эта сила $\mathbf{F}$, действующая на данный вихрь со стороны остальных, может быть записана через эффективное электрическое поле $\mathbf{E}$: $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$. Слагаемое $-\eta\dot{\mathbf{R}}$ имеет смысл силы вязкого трения, η — коэффициент трения*. Гироскопическая сила $G[\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}_z]$ была впервые введена Слончевским [144] и Тилем [145] для динамики $2D$ солитонов (цилиндрических доменов и блоховских линий) в тонких ферромагнитных пленках [146]. Ее появление обусловлено гироскопическими слагаемыми

$$\Delta_1(\theta, \varphi) \frac{\partial \theta}{dt} + \Delta_2(\theta, \varphi) \frac{\partial \varphi}{dt}$$

в эффективном лагранжиане (15). Для произвольного магнетика, описываемого лагранжианом (15), константа гиросилы может быть записана в виде [139,143]

$$G = aM_0^2 \int D(\theta, \varphi) \left[\nabla\theta, \nabla\varphi\right]_z d^2x =$$

$$= aM_0^2 \int D(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi\,. \tag{104}$$

Для ФМ $G = (M_0/\gamma)\sin\theta$ (см. (16),(17)) и величина G пропорциональна топологическому заряду Q (77). Простое вычисление дает $G = -2\pi(aM_0/\gamma)qp$ для вихрей и $G = 4\pi Q a M_0/\gamma$ для локализованных солитонов.

Для внутриплоскостных вихрей, $\theta = \pi/2$, значение $G = 0$, что согласуется с численным моделированием динамики таких вихрей [147]. В случае АФМ ответ не такой универсальный. В лоренц-инвариантном случае константа G, естественно, равна нулю для всех солитонов. Учет различных типов взаимодействия Дзялошинского (см. таблицу в работе [35]) тоже всегда приводит к $G = 0$ как для вихрей, так и для локализованных солитонов и блоховских линий. Магнитное поле при любой его ориентации дает $G = 0$ для локализованных солитонов, однако поле, перпендикулярное легкой плоскости, приводит к отличному от нуля значению G для вихрей [137]:

$$G_{\mathrm{AFM}} = -2\pi q a a M_0^2 \gamma H / c^2\,. \tag{105}$$

Таким образом, для локализованных солитонов в АФМ значение $G = 0$ при учете как взаимодействия Дзялошинского, так и магнитного поля (это проявляется в отличии вклада локализованных солитонов в функции отклика, см. разд. 9). Вихрь в АФМ при наличии внешнего поля является единственным солитоном в АФМ, обладающим гироскопическими свойствами. Этот факт согласуется с точным решением для движущегося вихря в АФМ при $H \neq 0$, полученным Ивановым и Шекой [137].

Перейдем к вычислению $\bar{u}$. Используя (102), легко записать линейную связь между $\mathbf{v}$ и внешней силой $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$:

$$\left(\eta^2 + G^2\right)\mathbf{v} = e\left(-\eta\mathbf{E} + G[\mathbf{e}_z, \mathbf{E}]\right).$$

Тогда среднее значение квадрата скорости данного вихря выражается через корреляторы «электрического поля» $\mathbf{E}$. Эти корреляторы для самосогласованного движения двумерной плазмы в приближении ведущих центров были рассчитаны Тейлором и Макнамарой [148]. Их вид не зависит от констант G и η и определяется выражением

$$\langle E_\alpha E_\beta\rangle = \langle E^2\rangle \delta_{\alpha\beta}\,, \quad \langle E^2\rangle = \pi n_v e^2 \ln\Lambda\,,$$

где $\alpha, \beta = x, y$; $\Lambda = 4\pi T/n_v e^2 a^2$ для случая теплового равновесия. Используя связь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{E}$, легко найти значение среднеквадратичной скорости вихрей

$$\bar{u} = \frac{e\langle E^2\rangle^{1/2}}{(\eta^2 + G^2)^{1/2}}\,. \tag{106}$$

Если в этой формуле положить $\eta = 0$ и подставить значение G для вихря в ФМ, то придем к полученному Хубером значению $\bar{u}_H$ (100). В этом случае основная зависимость $\bar{u}$ от температуры связана с температурной зависимостью плотности вихрей,

$$\bar{u}_H \propto n_v^{1/2}\left[\ln n_v + \mathrm{const}\right],$$

и может быть напрямую определена из данных о корреляционной длине, т.е. статических экспериментов. Для вихрей в АФМ при $H = 0$ или внутри-

* Вычисление коэффициента трения вихря в рамках обычного слагаемого типа Ландау—Гильберта приводит к расходящемуся выражению [135]. Однако в развитой Барьяхтаром [142] последовательной феноменологической теории магнитной релаксации значение η конечно [143]. Такой же результат был получен и в работе Покровского и Хвещенко [136].

плоскостных вихрей в ФМ или АФМ значение $G = 0$, и величина $\bar{u}$ определяется константой вязкого трения: $\bar{u} = e\langle E^2\rangle^{1/2}/\eta$. Для слабоанизотропных АФМ при наличии внешнего магнитного поля в формуле (106) возможна конкуренция гироскопических и вязких эффектов. В этом случае [137]

$$\bar{u}_{\mathrm{AFM}} = \frac{c}{2}\left[\frac{\pi n_v H_0^2 r_0^2}{H^2 + H_r^2}\ln\Lambda\right]. \qquad (107)$$

Здесь введены характерные значения поля H_0 и H_r. Поле $H_0 = M_0\sqrt{\delta\beta}/2$ такого же порядка величины, что и поле спин-флоп перехода для легкоосного АФМ, т.е. $H_0 \ll H_e$. Вязкой константе η сопоставлено «релаксационное» поле $H_r = \eta\delta\gamma/8\pi a$. Согласно (107), $\bar{u}_{\mathrm{AFM}} \propto 1/H$ при $H \gg H_r$ и не зависит от поля, но обратно пропорционально константе релаксации при $H \ll H_r$. Оценки релаксационных констант с помощью формул [136] позволяют считать [137], что $H_r \ll H_0$. Таким образом, уже при достаточно слабых полях $H \sim H_r$ происходит существенное изменение величины $\bar{u}_{\mathrm{AFM}}$. Если $H \gg H_r$, то $\bar{u}_{\mathrm{AFM}} \simeq (H_e/4H)\bar{u}_H$, т.е. ее температурная зависимость такая же, как для внеплоскостных вихрей в слабоанизотропных ФМ, но абсолютное значение $\bar{u}$ в АФМ значительно больше, чем в ФМ. Зависимость от магнитного поля может быть использована для проверки теории. Если же поле $H < H_r$, то в этом случае (как и для внутриплоскостных вихрей в ФМ) должна возникать дополнительная зависимость $\bar{u}$ от температуры, связанная с множителем $1/\eta$. Для собственных процессов релаксации $\eta \propto T^n$, $n \geq 2$ [136,149], однако в реальном эксперименте могут быть существенны различные несобственные процессы типа вклада ионо-релаксаторов, примесей и т.д. с более сложной температурной зависимостью η.

Таким образом, вихревая феноменология предсказывает положение и форму центральных пиков, их ширину Γ_q, которая определяется скоростью $\bar{u}$. Из формы центрального пика можно выделить зависимость средней скорости газа вихрей $\bar{u}$ от температуры и параметров магнетика. Для $2D$ легкоплоскостных магнетиков имеется возможность сопоставить результаты вихревой феноменологии как с данными численного моделирования, так и с натурным экспериментом.

Согласие предсказаний вихревой феноменологии и результатов численного моделирования для положения пиков является очень хорошим. Например, в работе Фолькеля и др. [133] для АФМ с взаимодействием Дзялошинского численное моделирование показало наличие двух центральных пиков: при $\mathbf{q} \simeq \mathbf{K}_0$ и $\mathbf{q} \simeq 0$. Форма обоих пиков была похожа и очень хорошо описывалась формулой (99) при $h = 0$. Отношение амплитуд пиков в температурной области $0{,}83 < T < 0{,}95$ (в единицах Js^2) изменялось в пределах 0,017–0,024 с ожидаемым значением 0,03. (Нам кажется, что это неплохое согласие, учитывая тот факт, что амплитуда пика с $\mathbf{q} \simeq 0$ была достаточно мала.) Предсказанные пики, как правило, обнаруживались как в численных, так и натурных экспериментах. Как отмечалось в детальном исследовании Вислера и др. [88], ряд экспериментальных результатов по рассеянию нейтронов в $CoCl_2$–ИГП качественно описывается вихревой феноменологией.

При более детальном количественном сопоставлении возникают расхождения предсказаний вихревой феноменологии и натурного или численного эксперимента. Например, проведенный в [133] анализ ширины центрального пика с $\mathbf{q} = (\pi/a)\times$ $\times(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$ позволил определить значения ξ и $\bar{u}$. Корреляционный радиус ξ прекрасно соответствовал формулам БКТ-теории (90), (91) с $\xi_0 = 1$, $T_c = 0{,}81$, $b = 0{,}61$ при $T < 0{,}9 \simeq 1{,}1T_c$, но при $T > 0{,}9$ согласие было уже не столь хорошим. Значения ξ, полученные из амплитуды интегральной интенсивности $I(q)$, отличались от значений, найденных из ширины центрального пика, и не столь хорошо согласовались с БКТ-формулой. Авторы [133] объясняют это влиянием спин-волнового пика.

Ширина центрального пика в $S^{\parallel}(\mathbf{q}, \omega)$ в соответствии с (96) линейно зависит от q. Эксперимент на $CoCl_2$–ИГП дает скорее квадратичную зависимость, см. рис. 22 в работе [88]. Интересно, что и данные численного моделирования (во всяком случае «на глаз») также более похожи на квадратичные, чем на линейные, см. рис. 2 в [132]. С другой стороны, при рассмотрении диффузионного движения $2D$ локализованного солитона как броуновской частицы получается $\Gamma \propto q^2$, см. [100] и разд. 9 (для вихрей расчет не проводился). Диффузионный характер движения отмечался рядом авторов, см. [88,132]. Понятно, что необходимо развитие вихревой феноменологии на случай диффузионного движения вихрей. Однако такое обобщение требует серьезной модификации динамической теории вихрей, например, детального учета инерционных членов и случайных сил, моделирующих тепловое движение среды.

Данные о средней скорости вихревого газа $\bar{u}$ получались из анализа экспериментов по АФМ и из численного моделирования. Как и следовало ожидать, более или менее хорошее согласие $\bar{u}$ с значением $\bar{u}_H$ наблюдалось для внутриплоскостных вихрей в ФМ с $\lambda = 0{,}8$. Однако и в этом случае в непосредственной близости к точке БКТ-перехода ($T = \doteq 0{,}79$) величина $\bar{u}$ убывала (а не росла по закону $(n_v \ln n_v)^{1/2}$) с ростом T. Согласие было хо-

рошим только при $T \simeq 0{,}85$–$0{,}90$ [127,128]. Для внеплоскостных вихрей в ФМ или АФМ [131,132] и особенно для внеплоскостных вихрей в АФМ с взаимодействием Дзялошинского [133] наблюдалось сильное убывание $\bar{u}$ с ростом T. Для этих моделей, особенно для АФМ с взаимодействием Дзялошинского, значение $\bar{u}$ было существенно бо́льшим, чем следует из формулы (100). Этот факт может быть объяснен тем, что для этих моделей $G = 0$ и следует ожидать поведения типа $\bar{u} \propto \langle E^2 \rangle^{1/2}/\eta$. Возможно, на основе этой формулы, с учетом увеличения η с ростом температуры, можно объяснить температурную зависимость $\bar{u}$ и для моделей с $G = 0$.

С другой стороны, экспериментальные данные по влиянию вихрей на время спин-решеточной релаксации ЯМР в $BaNi_2(PO_4)_2$ [92] во всей области от $T = T_c \simeq 23{,}6$ K до $T \simeq 25{,}8$ K хорошо описываются формулой Хубера, если взять $b = 0{,}95$. Что касается других данных эксперимента, то как для ФМ $CoCl_2$–ИГП [88], так и для АФМ $BaNi_2(PO_4)_2$ [123] наблюдался еще один эффект, отсутствующий как в вихревой феноменологии, так и в численном моделировании.

Авторы [88,123] наблюдали присутствие двух различных временных масштабов в спиновой динамике. Кроме «быстрых» процессов, которые могут быть связаны с динамикой вихрей, присутствуют и «медленные» процессы с характерными частотами на порядок меньшими. Прежде всего, естественно приходит в голову, что медленные процессы связаны с межслоевым взаимодействием и $3D$ флуктуациями. Это объяснение использовали авторы [123], но исключали авторы [88], так что происхождение этих процессов в настоящее время не ясно.

Авторы хотели бы посвятить эту работу светлой памяти нашего друга и коллеги С. Н. Ляхимца.

Исследования, составившие основу этой статьи, были возможны благодаря финансовой поддержке Международного научного фонда (грант UB7000) и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий (грант 2.3/194). Исследования одного из авторов (Б. И.) были поддержаны Международной соросовской программой поддержки образования в области точных наук Международного фонда Возрождение, грант SPV042025.

1. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
2. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
3. V. G. Bar'yakhtar and B. A. Ivanov, *Sov. Sci. Rev. Sec.* **A16**, No. 4 (1993).
4. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, М. В. Четкин, *УФН* **146**, 417 (1985).
5. V. G. Bar'yakhtar, M. V. Chetkin, B. A. Ivanov, and S. N. Gadetskii, *Dynamics of Topological Magnetic Solitons. Experiment and Theory*, Springer Tracts in Modern Physics, Springer-Verlag (1994), v. 129.
6. H.-J. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **40**, 191 (1991).
7. Ю. А. Изюмов, *УФН* **155**, 553 (1988).
8. Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, *Статистическая механика магнитоупорядоченных систем*, Наука, Москва (1987).
9. *Solitons*, S. E. Trullinger, V. E. Zakharov, and V. L. Pokrovsky (eds.), Elsevier, Amsterdam (1986).
10. *Physics in One Dimension*, J. Bernasconi and T. Schneider (eds.), Springer, Berlin (1981).
11. N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979).
12. А. М. Переломов, *УФН* **134**, 577 (1981).
13. V. P. Mineev, *Sov. Sci. Review Sec. A. Physics*, I. M. Khalatnikov (ed.), 2, 173 (1981).
14. J. A. Krumhansl and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **B11**, 3535 (1975).
15. H.-J. Mikeska, *J. Phys.* **C11**, L29 (1978).
16. F. G. Mertens, A. R. Bishop, G. M. Wysin, and C. Kawabata, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 117 (1987).
17. L. Neel, *Ann. Phys.* **5**, 232 (1936).
18. L . D. Landau, *Phys. Zs. Sowjetunion* **4**, 675 (1933).
19. И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **32**, 1547 (1957).
20. T. Moriya, *Phys. Rev.* **120**, 91 (1960).
21. М. И. Каганов, В. М. Цукерник, *ЖЭТФ* **34**, 106 (1958).
22. Е. А. Туров, Ю. П. Ирхин, *Изв. АН СССР, Сер. физ.* **22**, 1168 (1958).
23. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
24. А. Г. Гуревич, *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках*, Наука, Москва (1972).
25. А. К. Звездин, *Письма в ЖЭТФ* **29**, 605 (1979); В. И. Еленский, Н. М. Кирова, Н. Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **79**, 321 (1980); **80**, 357 (1981).
26. И. В. Барьяхтар, Б. А. Иванов, *ФНТ* **5**, 759 (1979); *Solid State Commun.* **34**, 545 (1980).
27. А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, *УФН* **130**, 39 (1980).
28. H.-J. Mikeska, *J. Phys.* **C13**, 2913 (1980).
29. F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1153 (1983); *J. Appl. Phys.* **57**, 3359 (1985).
30. I. Affleck, *Nucl. Phys.* **B257**, 397 (1985).
31. P. B. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 821 (1988); E. Fradkin and M. Stone, *Phys. Rev.* **B38**, 7215 (1988).
32. M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A232**, 45 (1984); **414**, 31 (1987); F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1029 (1988); R. Balakrishnan, A. R. Bishop, and R. Dandoloff, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2107 (1990).
33. I. Affleck, *J. Phys. Condens. Matter.* **1**, 3047 (1989).
34. Е. А. Туров, *Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов*, Изд-во АН СССР, Москва (1963).
35. Е. В. Гомонай, Б. А. Иванов, В. А. Львов, Г. К. Оксюк, *ЖЭТФ* **97**, 307 (1990).
36. K. Pohlmeyer, *Commun. Math. Phys.* **46**, 207 (1976).
37. Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, Е. В. Тартаковская, *ФНТ* **13**, 982 (1987).
38. Б. А. Иванов, А. К. Колежук, *ФНТ* **19**, 341 (1993).
39. A. Parola, S. Sorella, and Q. F. Zhong, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4393 (1993); A. F. Barabanov, L. A. Maksimov, and O. A. Starykh, *Int. J. Mod. Phys.* **B4**, 2319 (1990).
40. Б. А. Иванов, А. М. Косевич, *Письма в ЖЭТФ* **24**, 495 (1976).

41. Б. А. Иванов, А. М. Косевич, *ЖЭТФ* **72**, 2000 (1977).
42. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Письма в ЖЭТФ* **25**, 516 (1977); *ФНТ* **3**, 906 (1977).
43. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Physica* **D1–2**, 363 (1981).
44. Б. А. Иванов, *ФНТ* **3**, 1036 (1977).
45. И. В. Барьяхтар, Б. А. Иванов, *ЖЭТФ* **85**, 328 (1983).
46. Б. А. Иванов, В. А. Стефанович, *ФНТ* **13**, 921 (1987).
47. L. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1048 (1986).
48. L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, *Phys. Lett.* **A85**, 375 (1981).
49. А. Г. Гуревич, Г. А. Мелков, *Магнитные колебания*, Наука, Москва (1994).
50. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 125 (1973).
51. S. Chakravarty, B. I. Halperin, and D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1057 (1988); M. Greven, R. J. Birgeneau, Y. Endoh, M. A. Kastner, B. Keimer, M. Matsuda, G. Shirane, and T. R. Thurston, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1096 (1994).
52. J. Rubinstein, *J. Math. Phys.* **11**, 258 (1970).
53. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Мир, Москва (1985).
54. Г. А. Крафтмахер, В. В. Мериакри, А. Я. Червоненкис, В. И. Щеглов, *ЖЭТФ* **63**, 1353 (1972).
55. I. Harada, K. Sasaki, and H. Shiba, *Solid State Commun.* **40**, 29 (1981).
56. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, *ЖЭТФ* **78**, 1509 (1980).
57. B. A. Ivanov, A. K. Kolezhuk, and G. K. Oksyuk, *Europhys. Lett.* **14**, 151 (1991).
58. Б. А. Иванов, А. К. Колежук, *ФНТ* **17**, 343 (1991).
59. *Справочник по специальным функциям*, М. А. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), Наука, Москва (1979).
60. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая механика*, Наука, Москва (1963).
61. J. K. Kjems and M. Steiner, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1137 (1978).
62. J. R. Currie, J. A. Krumhansl, A. R. Bishop, and S. E. Trullinger, *Phys. Rev.* **B22**, 477 (1980).
63. K. Sasaki, *Phys. Rev.* **B33**, 2214 (1986).
64. M. D. Johnson, N. Chen, and M. Fowler, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 904 (1986); *Phys. Rev.* **B34**, 7851 (1986).
65. J. Timonen, M. Stirland, D. J. Pilling, Yi Cheng, and R. K. Bullough, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2233 (1986); J. Timonen, R. K. Bullough, and D. J. Pilling, *Phys. Rev.* **B34**, 6525 (1986).
66. D. J. Scalapino, M. Sears, and R. A. Ferrell, *Phys. Rev.* **B6**, 3409 (1972).
67. T. Tsuzuki and K. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Osaka, Suppl.* **94**, 73 (1988).
68. H. Kobayashi, I. Tsujikawa, and S. A. Friedberg, *J. Low. Temp. Phys.* **10**, 621 (1973); T. Iwashita and N. Uryu, *J. Phys. Soc. Jpn.* **39**, 1226 (1975).
69. W. Depmeier and K. H. Klaska, *Acta Crystallogr. Sect.* **B36**, 1065 (1980); S. Simizu, J. Y. Chen, and S. A. Friedberg, *J. Appl. Phys.* **55**, 2398 (1984).
70. С. И. Абаржи, М. Е. Житомирский, О. А. Петренко, С. В. Петров, Л. А. Прозорова, *ЖЭТФ* **104**, 3232 (1993).
71. K. Nakamura and T. Sasada, *J. Phys.* **C11**, 331 (1978).
72. Ю. А. Изюмов, Н. А. Черноплеков, в кн.: *Нейтроны и твердое тело*, Энергоатомиздат, Москва (1983), т. 3.
73. K. Sasaki, *J. Phys. Jpn.* **53**, 2872 (1984).
74. K. Maki, *J. Low Temp. Phys.* **41**, 327 (1980).
75. J.-P. Boucher, L. P. Regnault, R. Pynn, J. Bouillot, and J. P. Renard, *Europhys. Lett.* **1**, 415 (1986).
76. J.-P. Boucher, G. Rius, and Y. Henry, *Europhys. Lett.* **4**, 1073 (1987).
77. N. Flüggen and H.-J. Mikeska, *Solid State Commun.* **48**, 293 (1983).
78. Б. И. Иванов, Г. К. Оксюк, *Нелинейная динамика антиферромагнетиков со слабым ферромагнетизмом*, Препринт ИТФ-84-84, Киев, Ин-т теор. физики (1984).
79. G. Wysin, A. R. Bishop, and J. Oitmaa, *J. Phys.* **C19**, 221 (1986).
80. J.-P. Boucher and J. P. Renard, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 486 (1980).
81. L. P. Regnault, J. P. Boucher, J. Rossat-Mignod, J. P. Renard, J. Bouillot, and W. G. Stirling, *J. Phys.* **C15**, 1261 (1982).
82. J. P. Boucher,L. P. Regnault, A. S. T. Pires, J. Rossat-Mignod, Y. Henry, J. Bouillot, W. G. Stirling, and J. P. Renard, in: *Magnetic Excitations and Fluctuations*, S. W. Lovesey, U. Bolucani, F. Borsa, and V. Tognetti (eds.), Springer, Berlin (1984), p. 6.
83. P. W. Anderson, *Mater. Res. Bull.* **8**, 153 (1973); *Science* **235**, 1196 (1987).
84. R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, *Phys. Rev.* **D11**, 3424 (1975).
85. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **61**, 1143 (1971).
86. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys.* **C6**, 1181 (1973).
87. R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II. Cambridge Studies in Low Temperature Physics* **3**, Cambridge University Press (1991).
88. D. G. Wiesler, H. Zabel, and S. M. Shapiro, *Z. Phys.* **B93**, 227 (1994).
89. А. М. Косевич, В. П. Воронов, И. В. Манжос, *ЖЭТФ* **84**, 148 (1983).
90. И. Е. Дзялошинский, *Письма в ЖЭТФ* **25**, 110 (1977).
91. А. С. Ковалев, А. М. Косевич, *ФНТ* **3**, 259 (1977).
92. P. Gaveau, J.-P. Boucher, L. P. Regnault, and Y. Henry, *J. Appl. Phys.* **64**, 6228 (1991).
93. А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 503 (1975).
94. В. П. Воронов, Б. А. Иванов, А. М. Косевич, *ЖЭТФ* **84**, 2235 (1983).
95. Б. А. Иванов, В. А. Стефанович, *ЖЭТФ* **91**, 638 (1986).
96. R. Hobart, *Proc. Phys. Soc.* **82**, 201 (1963); G. M. Derrick, *J. Math. Phys.* **5**, 1252 (1964).
97. T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.* **A260**, 127 (1961).
98. U. Enz, *J. Math. Phys.* **19**, 1304 (1978).
99. I. L. Bogolyubskii, *Phys. Lett.* **A126**, 511 (1988).
100. Б. А. Иванов, А. К. Колежук, *ФНТ* **16**, 335 (1990).
101. B. A. Ivanov, V. A. Stephanovich, and A. A. Zhmudskii, *JMMM* **88**, N3 (1994); В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **55**, 597 (1992).
102. И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **46**, 1420 (1964); **47**, 336 (1964).
103. А. Н. Богданов, Д. А. Яблонский, *ЖЭТФ* **95**, 178 (1989); **96**, 253 (1989); А. Н. Богданов, М. В. Кудинов, Д. А. Яблонский, *ФТТ* **31**, 99 (1989); A. N. Bogdanov and A. Hubert, *JMMM* **138**, N3 (1994).
104. A. N. Bogdanov and A. Hubert, *Phys. Status Solidi* **186**, N2 (1994).
105. Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **56**, 118 (1992).
106. Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **58**, 381 (1992).
107. V. G. Makhankov, *Phys. Rep.* **35**, 1 (1978).
108. В. П. Воронов, А. М. Косевич, *ЖЭТФ* **90**, 2145 (1986).
109. Г. Е. Волович, В. Н. Минеев, *ЖЭТФ* **73**, 767 (1977).
110. N. Papanicolaou, *Dynamics of Magnetic Vortex Rings, in: Singularities in Fluids, Plasmas and Optics, NATO ASI Series*, R. Caffisch (ed.), Springer (1992).
111. r. Waldner, *JMMM* **31–34**, 1203 (1983); **54–57**, 873 (1986).
112. N. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966).
113. P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158**, 383 (1967).
114. Н. Н. Боголюбов, *Квазисредние в задачах статистической механики*, в кн.: Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды*, Наукова думка, Киев (1971), т. 3.
115. J. M. Kosterlitz, *J. Phys.* **C7**, 1046 (1974).
116. S. W. Heinekamp and R. A. Pelcovitz, *Phys. Rev.* **B92**, 4528 (1985).
117. В. Л. Покровский, Г. В. Уймин, *ЖЭТФ* **65**, 1691 (1973).
118. D. R. Nelson, J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 120 (1977).

119. L. J. de Jongh, *Magnetic Properties of Layered Transition Metal Compounds*, Kluwer Academic Publishers (1990).
120. K. Hirakawa, H. Yoshizawa, and K. Ubikashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **51**, 2151 (1982).
121. M. Ain, *J. Phys.* **48**, 2103 (1987).
122. L. J. de Jongh, W. D. van Amstel, and A. R. Miedema, *Physica* **58**, 277 (1972).
123. L. P. Regnault, C. Lartigue, J. F. Legrand, B. Farago, J. Rossat-Mignod, and Y. Henry, *Physica* **B156–157**, 298 (1989).
124. M. Pomerantz, *Surf. Sci.* **142**, 556 (1984).
125. L. P. Regnault, J. Rossat-Mignod, and J. Y. Henry, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 1 (1983).
126. C. Kawabata, M. Takeuchi, and A. R. Bishop, *JMMM* **54–57**, 871 (1986); *J. Stat. Phys.* **43**, 869 (1986).
127. G. M. Wysin and A. R. Bishop, *Phys. Rev.* **B42**, 810 (1990).
128. M. E. Gouvea, G. M. Wysin, A. R. Bishop, and F. G. Mertens, *Phys. Rev.* **B29**, 11840 (1989).
129. M. E. Gouvea, G. M. Wysin, A. R. Bishop, and F. G. Mertens, *J. Phys. Condens. Matter.* **1**, 4387 (1989).
130. M. E. Gouvea, G. M. Wysin, A. R. Bishop, and F. G. Mertens, *J. Phys. Condens. Matter.* **2**, 1853 (1990).
131. A. R. Volkel, G. M. Wysin, A. R. Bishop, and F. G. Mertens, *Phys Rev.* **B44**, 10066 (1991).
132. A. R. Völkel, A. R. Bishop, F. G. Mertens, and G. M. Wysin, *J. Phys. Condens. Matter.* **4**, 9411 (1991).
133. A. R. Völkel, F. G. Mertens, A. R. Bishop, and G. M. Wysin, *Ann. Physik* **2**, 308 (1993).
134. G. M. Wysin, *Phys. Rev.* **B49**, 8780 (1994).
135. D. L. Huber, *Phys. Rev.* **B26**, 3758 (1982).
136. В. И. Покровский, Д. В. Хвещенко, *ФНТ* **14**, 385 (1988).
137. B. A. Ivanov and D. D. Sheka, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 404 (1994).
138. V. Ambegaokar, B. I. Halperin, D. R. Nelson, and E. D. Siggia, *Phys. Rev.* **B21**, 1806 (1980).
139. B. A. Ivanov and V. A. Stephanovich, *Phys. Lett.* **A141**, 89 (1989).
140. G. M. Wysin, F. G. Mertens, A. R. Völkel, and A. R. Bishop, in: *Nonlimear Coherent Structures in Physics and Biology*, K. H. Spatschek and F. G. Mertens (eds.), Plenum, New York (1993).
141. А. В. Никифоров, Э. Б. Сонин, *ЖЭТФ* **85**, 642 (1983).
142. В. Г. Барьяхтар, *ЖЭТФ* **87**, 1501 (1984); *ФНТ* **11**, 1189 (1985); *Physica* **B159**, 20 (1989).
143. B. A. Ivanov, A. K. Kolezhuk, and D. D. Sheka, *Two-dimensopnal Soliton Gas Dynamics and its Contribution to the Response Funcrions of Layered Magnets*, Preprint ITP-93-61E Inst. for Theor. Phys., Kiev (1993)).
144. K. Slonczewski, *J. Appl. Phys.* **45**, 375 (1974).
145. A. Thiele, *J. Appl. Phys.* **45**, 375 (1974).
146. A. P. Malozemoff and J. Slonczewski, *Magnetic Domain Walls in Bubble Materials*, Academic, New York (1979).
147. A. R. Völkel, F. G. Mertens, A. R. Bishop, and G. M. Wysin, *Phys. Rev.* **B43**, 5992 (1991).
148. J. B. Taylor and B. McNamara, *Phys. Fluids* **14**, 1492 (1971).
149. B. A. Ivanov and A. L. Sukstanskii, *JMMM* **117**, 102 (1992.)
150. А. К. Колежук, Д. В. Филин, *ФНТ* **20**, 1267 (1994).

Solitons on low-dimensional antiferromagnets

B. A. Ivanov and A. K. Kolezhuk

The structure, dynamics, and thermodynamics of magnetic solitons in low-dimensional antiferromagnets (AFM) are considered from the common viewpoint. The primary attention is given to the models for which experimental data are available. The analysis is based on simple phenomenological equations describing the dynamics of AFM in terms of the unit vector of antiferromagnetism, in the simplest case the equations reducing to the form of a Lorentz-invariant σ-model (the chosen velocity is the phase velocity of spin waves). Lowering the symmetry of AFM, e.g., in presence of an external magnetic field or when taking into account the Dzyaloshinskii interaction, violates the Lorentz-invariance. The finite-velocity transformation of the kink structure and its influence on the soliton thermodynamics of one-dimensional AFM are discussed. Semiclassical quantization of soliton solutions is carried out. It is demonstrated that the dynamics of internal kink degrees of freedom in a one-dimensional AFM is of a quantum nature, which is important when considering two-parametric solitons (bions) in almost easy-axis AFM. Two-dimensional topological solitons of the type of localized and non-localized magnetic vortices and their contribution to the thermodynamics of two-dimensional AFM are considered. The current state of the problem of experimental observation of magnetic solitons in quasi-two-dimensional AFM is reported; possible directions of future research are outlined.