УДК 517.925

ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА P-ТИПА*

А.В. Чичурин

Белорус. ун-т,
Белоруссия, 220080, Минск, пр. Ф. Скорины, 4
e-mail: chichoorin@kiipm.belpak.brest.by

In this paper necessary conditions of belonging of equations

$$y^{(iv)} = P(y''', y'', y', y, x)$$

to P-type equations are found. P is polynom of y''', y'', y', y with analytic koefficients of x. P-type equations haven't solutions wiht moveable branch points. P-type equations$'$ kind is found.

Одержано необхідні умови належності рівняння вигляду

$$y^{(iv)} = P(y''', y'', y', y, x),$$

де P — поліном по y''', y'', y', y з аналітичними коефіцієнтами по x, до рівнянь P-типу (будь-який розв'язок таких рівнянь не має рухомих критичних особливих точок) та виділено клас рівнянь P-типу.

Для определения уравнений с неподвижными критическими точками вида

$$y^{(iv)} = P(y''', y'', y', y, x)$$

где P — полином по y''', y'', y', y с аналитическими коэффициентами по x, требуется определить упрощенное уравнение вида [1]

$$y^{(iv)} = ayy''' + by'y'' + cy^2y'' + dyy'^2 + py^3y' + fy^5 \tag{1}$$

(a, b, c, d, p, f — постоянные), общее решение которого однозначно.

Задача настоящей статьи состоит в отыскании необходимых условий принадлежности уравнения (1) к уравнениям P-типа (любое решение таких уравнений не имеет подвижных критических особых точек) и определении класса уравнений (1) P-типа. В [1] показано, что задача отыскания необходимых условий принадлежности уравнения (1) к уравнениям P-типа сводится к отысканию всех возможных решений диофантова уравнения вида

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} + \frac{1}{N_4} = \frac{1}{4!}, \tag{2}$$

где $N_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3, 4$, исследование которого трудоемко.

* Поддержана Фондом фундаментальных исследований Белоруссии.

Чтобы избавиться от проверки условия (2) при решении поставленной задачи, можно воспользоваться другим способом [2]. Но прежде заметим, что вид дифференциального уравнения (1) определяется в соответствии со следующей теоремой Шази (для $n = 4$) [3] (гл. IX, § 2): „если $P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, ..., y', y, x)$ есть полином по отношению к n переменным $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, ..., y', y$ с аналитическими коэффициентами по x и если решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, ..., y', y, x)$ однозначно, то степень полинома P по отношению к каждой из n переменных ограничена. Если рассматривать каждую производную $y^{(i)}$ как величину веса, равного индексу дифференцирования, увеличенному на единицу, и функцию y как величину веса 1, то вес любого члена полинома P не может превышать веса $y^{(n)}$, т. е. $n + 1$".

Для упрощения дальнейших вычислений в (1) положим $yz = 1$. Относительно неизвестной функции z уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} z^3 z^{(iv)} = 8z^2 z' z''' + az^2 z''' + 6z^2 z''^2 - 36zz'^2 z'' - \\ -(6a+b)zz'z'' + czz'' + 24z'^4 + 2(3a+b)z'^3 - (2c+d)z'^2 + pz' - f. \end{aligned} \tag{3}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда

$$z(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j. \tag{4}$$

Общее решение уравнения (3) должно содержать четыре независимые произвольные постоянные, одна из которых есть x_0. Роль трех других из них будут играть некоторые из коэффициентов разложения (4). Найдем общий вид коэффициента Q_n как функции параметров a, b, c, d, p, f, стоящей перед коэффициентом при x^n ряда (4). Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} Q_n = (n+1)([-n^3 + 11n^2 - 46n + 96]a_1^3 + \\ +([n^2 - 7n + 18]a + (6-n)b)a_1^2 + [(n-4)c - 2d]a_1 + p), \quad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{5}$$

Подставим ряд (4) в уравнение (3) и приравняем коэффициенты при нулевой степени переменной x:

$$Q_0 \equiv 24a_1^4 + 2(3a+b)a_1^3 - (2c+d)a_1^2 + pa_1 - f = 0. \tag{6}$$

Затем, подставляя ряд (4) в уравнение (3) и приравнивая коэффициенты при степенях $n = \overline{1, 8}$ соответственно, получаем

$$Q_1 \equiv 2(60a_1^3 + (12a+5b)a_1^2 - (3c+2d)a_1 + p)a_2 = 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} Q_2 \equiv 3(40a_1^3 + 4(2a+b)a_1^2 - 2(c+d)a_1 + p)a_3 = \\ = (-2)(120a_1^2 + 9(2a+b)a_1 - 3c - 2d)a_2^2, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Q_3 \equiv 4(30a_1^3 + 3(2a+b)a_1^2 - (c+2d)a_1 + p)a_4 = \\ = (-2)(6[20a_1 + 2a + b]a_2^3 + [240a_1^2 + (36a+23b)a_1 - 8c - 6d]a_2 a_3), \end{aligned} \tag{9}$$

$$Q_4 \equiv 5(24a_1^3 + 2(3a+b)a_1^2 - 2da_1 + p)a_5 =$$
$$= (-1)(120a_2^4 + 10[72a_1 + 9a + 5b]a_2^2a_3 + 3[80a_1^2 + 10(a+b)a_1 - 4c - 3d]a_3^2 +$$
$$+2[240a_1^2 + 5(6a+5b)a_1 - 9c - 8d]a_2a_4), \tag{10}$$

$$Q_5 \equiv 6(16a_1^3 + (8a+b)a_1^2 + (c-2d)a_1 + p)a_6 =$$
$$= (-2)(288a_2^3a_3 + 12[27a_1 + 5a + 3b]a_2a_3^2 + 6[54a_1 + 8a + 5b]a_2^2a_4 +$$
$$+3[88a_1^2 + (4a+11b)a_1 - 5c - 4d]a_3a_4 + [264a_1^2 +$$
$$+24(a+b)a_1 - 9c - 10d]a_2a_5), \tag{11}$$

$$Q_6 \equiv 7(12aa_1^2 + 2(c-d)a_1 + p)a_7 =$$
$$= (-1)(1080a_2^2a_3^2 + 6[10(a+2a_1) + 6b]a_3^3 + +600a_2^3a_4 + 2[132a + 480a_1 +$$
$$+89b]a_2a_3a_4 + 4[90a_1^2 + 3(2a+3b)a_1 - 5c - 4d]a_4^2 + 2[300a_1 +$$
$$+48a + 33b]a_2^2a_5 + 2[360a_1^2 + 4(8b-3a)a_1 - 17c - 15d]a_3a_5 +$$
$$+4[150a_1^2 + 2(6a+5b)a_1 - 4c - 6d]a_2a_6), \tag{12}$$

$$Q_7 \equiv 8(-30a_1^3 + (18a-b)a_1^2 + (3c-2d)a_1 + p)a_8 =$$
$$= (-1)(960a_2a_3^3 + 2280a_2^2a_3a_4 + 2(108a - 60a_1 + 69b)a_3^2a_4 +$$
$$+16(15a_1 + 8a + 7b)a_2a_4^2 + 600a_2^3a_5 + 2(360a_1 + 132a + 101b)a_2a_3a_5 +$$
$$+4[300a_1^2 - (36a-17b)a_1 - 12c - 10d]a_4a_5 + 4(150a_1 + 24a + 17b)a_2^2a_6 +$$
$$+18[60a_1^2 - (4a-3b)a_1 - 2c - 2d]a_3a_6 + 2[300a_1^2 + (36a+13b)a_1 - 6c - 14d]a_2a_7), \tag{13}$$

$$Q_8 \equiv 9(-80a_1^3 + 2(13a-b)a_1^2 + 2(2c-d)a_1 + p)a_9 =$$
$$= (-1)(360a_3^4 + 3120a_2a_3^2a_4 + 1200a_2^2a_4^2 + 10(27a - 96a_1)a_3a_4^2 + 2280a_2^2a_3a_5 +$$
$$+2(120a_1 + 129b)a_2a_4a_5 + 600a_2^3a_6 + 5(216a_1^2 - 6(50a-b)a_1 - 6c - 5d)a_5^2 +$$
$$+4(180a_1 + 63a + 54b)a_2a_3a_6 + 2[1020a_1^2 - 126aa_1 - 27a_1b - 27c - 24d]a_4a_6 +$$
$$+2(300a_1 + 51a + 33b)a_2^2a_7 + 2[780a_1^2 - 18(3a-b)a_1 - 18c - 21d]a_3a_7 +$$
$$+2[180a_1^2 + 3(22a+b)a_1 - 3c - 16d]a_2a_8 + 180ba_3a_4 + 162ba_3^2a_5). \tag{14}$$

Предположим, что уравнение (3) имеет только простые полюсы. Очевидно, что вычеты этих полюсов определяются корнями уравнения (6).

Пусть в разложении (4) этого решения коэффициент a_2 будет второй, а a_3 — третьей произвольной постоянной. Последнее влечет равенства

$$p = -60a_1^3 - (12a+5b)a_1^2 + (3c+2d)a_1, \tag{15}$$

$$p = -40a_1^3 - 4(2a+b)a_1^2 + 2(c+d)a_1, \tag{16}$$

при выполнении которых Q_n из (5) примет вид

$$Q_n = (n+1)(n-1)(n-2)[(8-n)a_1 + a]a_1^2. \tag{17}$$

Приравнивая Q_n нулю, получаем, что x_0, a_2, a_3 — произвольные постоянные ($n = -1, n = 1, n = 2$), и при этом a_9 будет произвольной постоянной, если $n = 8$ и $a = 0$.

1. Пусть a_4 — четвертая произвольная постоянная. Тогда справедливы уравнения (15), (16),

$$f = 24a_1^4 + 2(3a + b)a_1^3 - (2c + d)a_1^2 + pa_1, \tag{18}$$

и

$$3c + 2d = 120a_1^2 + 9(2a + b)a_1, \tag{19}$$

$$30a_1^3 + 3(2a + b)a_1^2 - (c + 2d)a_1 + p = 0, \tag{20}$$

$$20a_1 + 2a = -b, \tag{21}$$

$$240a_1^2 + (36a + 23b)a_1 - 8c - 6d = 0. \tag{22}$$

Решая систему уравнений (15), (16), (18) – (22) находим

$$a = -5a_1, \quad b = -10a_1, \quad c = -10a_1^2, \quad d = -15a_1^2, \quad p = -10a_1^3, \quad f = -a_1^4. \tag{23}$$

2. Рассмотрим случай, когда a_5 — четвертая произвольная постоянная. Тогда справедливы уравнения (15), (16), (18), (19) и

$$24a_1^3 + 2(3a + b)a_1^2 - 2da_1 + p = 0. \tag{24}$$

С учетом (15) из (24) найдем c, из (19) — d, из (20) — a и, подставив их в (9), получим a_4:

$$a_4 = \frac{a_2(7a_1a_3 - 6a_2^2)}{2a_1^2}. \tag{25}$$

Подставим a_4 из (25) в правую часть (10), которая примет вид

$$4\left(6\frac{b^2}{a_1^2} + 117\frac{b}{a_1} + 556\right)a_2^4 - 12\left(\frac{b^2}{a_1} + 18b + 80a_1\right)a_2^2a_3 - 9(10a_1 + b)a_1a_3^2. \tag{26}$$

Приравняв коэффициент при a_3^2 нулю, получим $b = -10a_1$, которое подставим в уравнения (15), (16), (18), (19), (24) и найдем

$$a = -4a_1,\ b = -10a_1,\ c = -6a_1^2,\ d = -12a_1^2,\ p = -4a_1^3, f = 0. \tag{27}$$

Замечание 1. При подстановке $b = -10a_1$ в (26) коэффициенты при a_2^4 и $a_2^2a_3$ обращаются в нуль.

3. Рассмотрим случай, когда a_6 — четвертая произвольная постоянная. Тогда справедливы уравнения (15), (16), (18), (19) и

$$16a_1^3 + (8a + b)a_1^2 + (c - 2d)a_1 + p = 0. \tag{28}$$

С учетом (15), из (16) найдем c, из (28) — a, из (19) — d и, подставив их в (9) и (10), соответственно получим a_4:

$$a_4 = (-1)\frac{a_2}{8a_1^3}(84a_1a_2^2 - 58a_1^2a_3 + 6ba_2^2 - 3ba_1a_3) \tag{29}$$

и a_5 :

$$a_5 = (-1340a_1^2a_2^4 + 570a_1^3a_2^2a_3 + 90a_1^4a_3^2 - 202ba_1a_2^4 + \\ + 89ba_1^2a_2^2a_3 + 6ba_1^3a_3^2 - 8b^2a_2^4 + 4b^2a_1a_2^2a_3)/(20a_1^5). \tag{30}$$

Подставим a_4 из (29) и a_5 из (30) в правую часть (11), которая примет вид

$$\left(45\frac{b^2}{2a_1} + 486b + 2610a_1\right)a_2a_3^2 - \left(12\frac{b^3}{a_1^4} + 330\frac{b^2}{a_1^3} + 2928\frac{b}{a_1^2} + 8280\frac{1}{a_1}\right)a_2^5 + \\ + \left(6\frac{b^3}{a_1^3} + 120\frac{b^2}{a_1^2} + 492\frac{b}{a_1} - 1080\right)a_2^3a_3. \tag{31}$$

Приравнивая коэффициент при $a_2a_3^2$ нулю, получаем $b = -10a_1$, или $b = -11,6a_1$. Подставляя $b = -10a_1$ в уравнения (15), (16), (18), (19), (28), находим

$$a = -3a_1, \quad b = -10a_1, \quad c = -2a_1^2, \quad d = -9a_1^2, \quad p = 2a_1^3, \quad f = a_1^4. \tag{32}$$

Замечание 2. При подстановке $b = -10a_1$ в (31) коэффициенты при a_2^5 и $a_2^3a_3$ обращаются в нуль, а при подстановке $b = -11,6a_1$ (посторонний корень) эти коэффициенты в нуль не обращаются.

4. Рассмотрим случай, когда a_7 — четвертая произвольная постоянная. Тогда справедливы уравнения (15), (16), (18), (19) и

$$12aa_1^2 + 2(c-d)a_1 + p = 0. \tag{33}$$

С учетом (15) и (18), из (16) найдем c, из (33) — a, из (19) — d и, подставив их в (9),(10) и (11), соответственно получим a_4:

$$a_4 = -\frac{a_2}{8a_1^3}(84a_1a_2^2 - 58a_1^2a_3 + 6ba_2^2 - 3ba_1a_3), \tag{34}$$

a_5:

$$a_5 = (-1340a_1^2a_2^4 + 570a_1^3a_2^2a_3 + 90a_1^4a_3^2 - 202ba_1a_2^4 + 89ba_1^2a_2^2a_3 + \\ + 6ba_1^3a_3^2 - 8b^2a_2^4 + 4b^2a_1a_2^2a_3)/(20a_1^5) \tag{35}$$

и a_6:

$$a_6 = (-1)a_2(43000a_1^3a_2^4 + 3820a_1^4a_2^2a_3 - 13620a_1^5a_3^2 + 12348ba_1^2a_2^4 - \\ - 2346ba_1^3a_2^2a_3 - 1914ba_1^4a_3^2 + 1212b^2a_1a_2^4 - 456b^2a_1^2a_2^2a_3 - \\ - 75b^2a_1^3a_3^2 + 40b^3a_2^4 - 20b^3a_1a_2^2a_3)/(240a_1^7). \tag{36}$$

Подставим a_4 из (34), a_5 из (35) и a_6 из (36) в правую часть (12), которая примет вид

$$18(-90a_1 - 19b - b^2/a_1)a_3^3 - (61095/2 + 9126b/a_1 + 7377b^2/(8a_1^2)+$$
$$+63b^3/(2a_1^3))a_2^2a_3^2 + (-10150/a_1^2 + 6260b/a_1^3 + 4695b^2/(2a_1^4) + 242b^3/a_1^5+$$
$$+8b^4/a_1^6)a_2^6 + (72650a^3/a_1 + 16490b/a_1^2 + 1485b^2/(2a_1^3) - 58b^3/a_1^4 - 4b^4/a_1^5)a_2^4. \quad (37)$$

Приравнивая коэффициент при a_3^3 нулю, получаем $b = -10a_1$, или $b = -9a_1$. Подставив $b = -10a_1$ в уравнения (15), (16), (18), (19), (33), найдем

$$a = -2a_1, \quad b = -10a_1, \quad c = 2a_1^2, \quad d = -6a_1^2, \quad p = 8a_1^3, \quad f = 2a_1^4. \quad (38)$$

Замечание 3. При подстановке $b = -10a_1$ в (39) коэффициенты при $a_2^2a_3^2$, a_2^6 и $a_2^4a_3$ обращаются в нуль, а корень $b = -9a_1$ — посторонний.

5. Рассмотрим случай, когда a_8 — четвертая произвольная постоянная. Тогда справедливы уравнения (15), (16), (18), (19) и

$$-30a_1^3 + (18a - b)a_1^2 - 2da_1 + p = 0.$$

Выполнив те же преобразования, что и в случаях 1 – 4, получим

$$a = -a_1, \quad b = -10a_1, \quad c = 6a_1^2, \quad d = -3a_1^2, \quad p = 14a_1^3, \quad f = 3a_1^4. \quad (39)$$

6. Рассмотрим случай, когда a_9 — четвертая произвольная постоянная. Тогда справедливы уравнения (15), (16), (18), (19) и

$$-80a_1^3 + 2(13a - b)a_1^2 + 2(2c - d)a_1 + p = 0.$$

Выполнив те же преобразования, что и в случаях 1 – 4, получим

$$a = 0, \quad b = -10a_1, \quad c = 10a_1^2, \quad d = 0, \quad p = 20a_1^3, \quad f = 4a_1^4. \quad (40)$$

Очевидно, что в случае, когда произвольными постоянными являются $x_0, a_2, a_3, a_j,\ j = \overline{4,9}$, уравнение (1) (с учетом (23), (27), (32), (38) – (40)) примет вид

$$y^{(iv)} = (j-9)a_1yy''' - 10a_1y'y'' + 2(2j-13)a_1^2y^2y''+$$
$$+3(j-9)a_1^2yy'^2 + 2(3j-17)a_1^3y^3y' + (j-5)a_1^4y^5. \quad (41)$$

Уравнения (41) при $a_1 \neq 0$ подстановкой $y = -t'/(a_1t)$ приводится к уравнениям вида

$$tt^{(v)} + (j-4)t't^{(iv)} = 0, \quad j = \overline{4,9}. \quad (42)$$

Если $j = 4$, то (42) примет вид $tt^{(v)} = 0$. Отсюда

$$t = c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5,$$

где $c_i,\ i = \overline{1,5},$ — произвольные постоянные.

Следовательно,

$$y = -\frac{4c_1x^3 + 3c_2x^2 + 2c_3x + c_4}{a_1(c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5)}.$$

Отсюда заключаем, что уравнение

$$y^{(iv)} = -5a_1yy''' - 10a_1y'y'' - 10a_1^2y^2y'' - 15a_1^2yy'^2 - 10a_1^3y^3y' - a_1^4y^5, \tag{43}$$

где a_1 — произвольная постоянная, — уравнение P-типа. Из изложенного выше вытекает следующая теорема.

Теорема. *Уравнение вида (43) — уравнение P-типа.*

Если $j = 5$, то (42) примет вид $tt^{(v)} + t't^{(iv)} = 0$, откуда $tt^{(iv)} = C,\ \ C - \mathrm{const}$.

Замечание 4. В рассматриваемом случае, когда x_0, a_2, a_3 — произвольные постоянные, Q_n имеет вид (17); в случае, когда x_0, a_2, a_4 — произвольные постоянные, имеем

$$Q_n = (n+1)(n-1)(n-3)[(7-n)a_1 + a]a_1^2; \tag{44}$$

в случае, когда x_0, a_2, a_5 — произвольные постоянные,

$$Q_n = (n+1)(n-1)(n-4)[(6-n)a_1 + a]a_1^2; \tag{45}$$

в случае, когда x_0, a_3, a_4 — произвольные постоянные,

$$Q_n = (n+1)(n-2)(n-3)[(6-n)a_1 + a]a_1^2. \tag{46}$$

Вид коэффициентов Q_n из (44), (45) показывает, что в соответствующих случаях число возможных комбинаций коэффициентов $x_0, a_2, a_j, a_i\ \ j = 4, 5;\ i > j$, ограничено: для коэффициентов случая (44) — x_0, a_2, a_4, a_8; для коэффициентов случая (45) — x_0, a_2, a_5, a_7; для (46) последняя четверка коэффициентов — x_0, a_3, a_4, a_7. Возможен еще один набор коэффициентов x_0, a_3, a_5, a_6.

Исследуя указанные в последнем замечании случаи (всего их 16), будем получать уравнения, которые, возможно, будут принадлежать к уравнениям P-типа. В частности, в шести рассмотренных случаях, когда произвольными постоянными являются $x_0, a_2, a_3, a_j,\quad j = \overline{5,9}$, уравнения P-типа следует искать среди уравнений вида (41), $j = \overline{5,9}$.

1. *Chazy J.* Acta math. — 1911. — **34** — P. 317 – 385.
2. *Лукашевич Н.А.* Простейшие дифференциальные уравнения третьего порядка P-типа // Дифференц. уравнения. — 1995. — **31**, №6. — С. 955 – 961.
3. *Добровольский В.А.* Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. — Киев: Выща шк., 1974. — 455 с.

Получено 13.10.98