НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.91

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.М. Самойленко

Ин-т математики НАН Украины,
Украина, 252601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: sam@imath.kiev.ua

В.Е. Слюсарчук

Ривнэн. техн. ун-т,
Украина, 266000, Ривнэ, ул. Соборная, 11
e-mail: admi@usawm.rovno.ua

В.В. Слюсарчук

Ин-т математики НАН Украины,
Украина, 252601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We investigate operator equation of the theory of discrete dynamic systems.

Досліджується операторне рівняння теорії дискретних динамічних систем.

Пусть E — бесконечномерное банахово пространство и $\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор.

Рассмотрим динамическую систему, заданную разностным уравнением

$$x(n+1) = X(x(n)), \quad n \geq 0, \tag{1}$$

где $X: X \to X$ — C^r-отображение, $r \geq 2$. Предположим, что эта система имеет инвариантное многообразие $M = \{x \in E: x = f(\varphi), \varphi \in \mathcal{T}_m\}$ класса C^r, которое заполнено квазипериодическими траекториями

$$x(n, f(\varphi)) = f(n\omega + \varphi), \quad n \geq 0, \ \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

($\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ — частотный базис квазипериодической функции $f(t\omega)$). Потребуем, чтобы многообразие M было диффеоморфным тору $\mathcal{T}_m$.

Пусть df_φ — производная отображения $f: \mathcal{T}_m \to E$ в точке φ, а $T(\mathcal{T}_m)_\varphi$ и $TM_{f(\varphi)}$ — касательные пространства к многообразиям $\mathcal{T}_m$ и M соответственно в точках φ и $f(\varphi)$. Представим банахово пространство E для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$ в виде прямой суммы $TM_{f(\varphi)}$ и некоторого подпространства E_φ:

$$E = TM_{f(\varphi)} + E_\varphi.$$

Такое представление возможно в силу конечномерности пространства $TM_{f(\varphi)}$. Выбор пространства E_φ осуществим таким образом, чтобы проектор $P(\varphi)$ на E_φ параллельно

$TM_{f(\varphi)}$ [1] был C^r-отображением (это возможно на основании конечномерности, компактности и принадлежности классу C^r многообразия M). Соответствующие расщепления пространства E на подпространства $TM_{f(\varphi)}$ и E_φ ($\varphi \in \mathcal{T}_m$) порождают C^{r-1}-отображение F, которое каждой паре (φ, h) элементов $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и $h \in E_\varphi$ ставит в соответствие вектор $x \in E$:

$$x = f(\varphi) + P(\varphi)h.$$

Это отображение имеет обратное отображение, а именно: если $G_\delta = \{(\varphi, h) \colon \varphi \in \mathcal{T}_m, h \in E_\varphi, ||h|| < \delta\}$ и $U_\delta = \{x \in E \colon \inf_{y \in M} ||x - y|| < \delta\}$, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $FG_\varepsilon \supset U_\mu$ для некоторого числа $\mu > 0$ и отображения $F \colon G_\varepsilon \to FG_\varepsilon$ является C^{r-1}-диффеоморфизмом [2].

Следовательно, можно ввести вблизи многообразия M систему координат относительно переменных (φ, h) (см. также [3, с. 324 – 333]), представить систему (1) относительно этих новых переменных (система примет более удобный для исследования вид) и провести соответствующие исследования.

В статье [4] показано, что при естественных ограничениях в достаточно малой окрестности многообразия M система (1) относительно переменных $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\varphi(n+1) = \varphi(n) + \omega, \\ &h(n+1) = C(\varphi(n), h(n))h(n), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $C(\varphi, h)$ — линейное для каждых $(\varphi, h) \in G_\delta$ (δ — достаточно малое число) непрерывное отображение, действующее из E_φ в $E_{\varphi+\omega}$, являющееся C^{r-1}-отображением и удовлетворяющее соотношению

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} ||C(\varphi, h) - P(\varphi + \omega)(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi)|| = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

При переходе от системы (1) к системе (2) важную роль играет операторное уравнение

$$Y(\varphi, h) = A(\varphi, h) + Y(\varphi + \omega + A(\varphi, h)h, B(\varphi, h))B(\varphi, h), \tag{3}$$

где $A(\varphi, h)$ и (φ, h) — линейные при фиксированных $(\varphi, h) \in G_\varepsilon$ (ε — достаточно малое число) ограниченные отображения, действующие из E_φ соответственно в $\mathbb{R}^m$ и E, являющиеся C^{r-1}-отображениями и удовлетворяющие условиям

$$(\varphi + \omega + A(\varphi, h)h, B(\varphi, h)h) \in \mathcal{T}_m \times E_{\varphi + \omega + A(\varphi, h)h},$$

$$\left\| A(\varphi, h) - (df)^{-1}_{\varphi+\omega}(I - P(\varphi + \omega))(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi) \right\| = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{4}$$

$$\left\| B(\varphi, h) - P(\varphi + \omega)(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi) \right\| = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{5}$$

для всех $(\varphi, h) \in G_\varepsilon$, а $Y(\varphi, h)$ — искомое решение, также представляющее собой для каждых фиксированных $(\varphi, h) \in G_\varepsilon$ линейное отображение, действующее из E_φ в $\mathbb{R}^m$ (см. [4]).

Заметим, что решение $Y(\varphi, h)$ уравнения (3) определяет отображение, осуществляющее переход от системы (1) к системе (3) (см. п. 5 работы [4]). Существование решений этого уравнения установлено в [4] в случае выполнения соотношения

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|B(\varphi, 0)\| < 1$$

(случай $\dim E < \infty$ рассмотрен в [5]). Принадлежность этого решения классу C^{r-1} обеспечивается выполнением требования достаточной малости величины

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \sum_{k=1}^{r-1} ||(d^k B)_{(\varphi,0)}||. \tag{6}$$

В данной статье мы приведем более общие достаточные условия существования решений уравнения (3). Сначала приведем ряд вспомогательных утверждений. Пусть

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = \varphi, \\ &h_0 = h, \\ &\varphi_n = \varphi_{n-1} + \omega + A(\varphi_{n-1}, h_{n-1}) h_{n-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$h_n = B(\varphi_{n-1}, h_{n-1}) h_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{8}$$

и

$$B_n(\varphi, h) = B(\varphi_{n-1}, h_{n-1}) B(\varphi_{n-2}, h_{n-2}) \dots B(\varphi_0, h_0), \quad n \geq 1.$$

Лемма 1. *Если*

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|B_p(\varphi, 0)\| < 1 \tag{9}$$

для некоторого $p \in \mathbb{N}$, *то найдутся числа* $\gamma > 0$, $M \geq 1$ *и* $q \in (0, 1)$ *такие, что для последовательности* $\{(\varphi_n, h_n)\}_{n \geq 0}$, *определенной равенствами (7) и (8), где* $(\varphi_0, h_0) \in G_\gamma$, *выполняется соотношение*

$$||h_n|| \leq M q^n ||h_0||, \quad n \geq 1. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть выполняется соотношение (9). Согласно соотношениям (4) и (5), а также компактности множеств

$$\{A(\varphi, 0) \colon \varphi \in \mathcal{T}_m\},$$

$$\{B(\varphi, 0) \colon \varphi \in \mathcal{T}_m\}$$

найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\sup_{(\varphi, h) \in G_\delta} (||A(\varphi, h)|| + ||B(\varphi, h)||) < \infty.$$

Поэтому на основании (4), (5) и (9)

$$\sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} ||B_p(\varphi,h)|| < \mu < 1 \tag{11}$$

для некоторых чисел $\gamma \in (0,\delta)$ и μ. Тогда $||h_p|| < \mu\gamma < \gamma$ и, следовательно,

$$(\varphi_p, h_p) \in G_\gamma. \tag{12}$$

Поэтому согласно соотношению (8) и определению $B_n(\varphi,h)$ выполняется равенство

$$B_{2p}(\varphi,h) = B_p(\varphi_p, h_p).$$

Аналогично

$$B_{kp}(\varphi,h) = B_p(\varphi_{(k-1)p}, h_{(k-1)p})$$

и

$$(\varphi_{(k-1)p}, h_{(k-1)p}) \in G_\gamma \tag{13}$$

для каждого $k \geq 3$.

Очевидно, что

$$B_{kp}(\varphi,h) = B_p(\varphi_{(k-1)p}, h_{(k-1)p}) B_p(\varphi_{(k-2)p}, h_{(k-2)p}) \dots B_p(\varphi_0, h_0).$$

Отсюда с учетом (12) и (13) получаем

$$||h_{kp}|| \leq \mu^k ||h_0||, \quad k \geq 1. \tag{14}$$

Пусть

$$q = \mu^{\frac{1}{p}} \tag{15}$$

и

$$M = \max\left\{ \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma, k=\overline{1,p-1}} q^{-k} ||B_k(\varphi,h)||, 1 \right\}. \tag{16}$$

Поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$h_n = B_s(\varphi_r, h_r) h_r,$$

где $r = p\left[\dfrac{n}{p}\right]$ ($[x]$ — целая часть числа x), $s = n - r$ и $B_s(\varphi_r, h_r)$ — единичный оператор, если $s = 0$, то согласно (14), (15) и (16) выполняется соотношение (10).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если отображение $B(\varphi,0)\colon E_\varphi \to E_{\varphi+\omega}$ для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$ имеет ограниченное обратное, то в достаточно малой окрестности множества $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ отображение*

$$P(\varphi,h) = (\varphi + \omega + A(\varphi,h)h, B(\varphi,h)h) \tag{17}$$

имеет обратное C^{r-1}-отображение.

Доказательство. Заметим, что отображение P является C^{r-1}-отображением, поскольку аналогичное свойство имеют отображения A и B, а производная Фреше отображения P в точках множества $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ имеет вид

$$(dP)_{(\varphi,0)}(\psi, h) = (\psi + A(\varphi, 0)h, B(\varphi, 0)h). \tag{18}$$

Из условий леммы и равенства (18) следует, что линейное отображение $(dP)_{(\varphi,0)}$ имеет непрерывное обратное $((dP)_{(\varphi,0)})^{-1}$ для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Это отображение представляется равенством

$$((dP)_{(\varphi,0)})^{-1}(\psi, h) = (\psi - A(\varphi, 0)B^{-1}(\varphi, 0)h, B^{-1}(\varphi, 0)h).$$

Поэтому отображение P локально обратимо в каждой точке $(\varphi, 0)$ множества $\mathcal{T}_m \times \{0\}$. В силу этого свойства и компактности множества $\mathcal{T}_m$ можно найти такое достаточно малое число $\delta > 0$, чтобы $P(\varphi_1, h_1) \neq P(\varphi_2, h_2)$, если только $0 < ||\varphi_1 - \varphi_2|| - ||h_1 - h_2|| < \delta$. Покажем далее, что различные точки (φ_1', h_1'), (φ_2', h_2') достаточно малой окрестности множества $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ отображением P не могут отображаться в одну и ту же точку. Отсюда будет вытекать глобальная обратимость отображения P в достаточно малой окрестности множества $\mathcal{T}_m \times \{0\}$.

Пусть ε — такое положительное число, что

$$\sup_{(\varphi,h)\in G_\varepsilon} (||A(\varphi, h)|| + ||B(\varphi, h)||) < \infty.$$

Это соотношение выполняется при достаточно малом ε в силу (4), (5) и компактности множества $\mathcal{T}_m$. Возьмем такое число $\gamma \in (0, \varepsilon)$, чтобы

$$(a + b + 2)\gamma < \delta, \tag{19}$$

где

$$a = \sup_{(\varphi,h)\in G_\varepsilon} ||A(\varphi, h)||,$$
$$b = \sup_{(\varphi,h)\in G_\varepsilon} ||B(\varphi, h)||.$$

Пусть $(\varphi_1', h_1'), (\varphi_2', h_2') \in G_\gamma$, $(\varphi_1', h_1') \neq (\varphi_2', h_2')$ и $P(\varphi_1', h_1') = P(\varphi_2', h_2')$. Тогда

$$\varphi_1' - \varphi_2' = A(\varphi_2', h_2')h_2' - A(\varphi_1', h_1')h_1'.$$

Поэтому

$$0 \le ||\varphi_1' - \varphi_2'|| + ||h_1' + h_2'|| \le ||A(\varphi_2', h_2')h_2'|| + ||A(\varphi_1', h_1')h_1'|| +$$

$$+||h_1'|| + ||h_2'|| \le a\gamma + b\gamma + \gamma + \gamma < \delta$$

(здесь учтено соотношение (19)), что противоречит локальной обратимости отображения P в точке $(\varphi_1', 0)$.

Итак, отображение P в достаточно малой окрестности имеет обратное отображение P^{-1}, которое, как и отображение P, является C^{r-1}-отображением.

Лемма 2 доказана.

Замечание 1. Утверждение леммы 2 означает, что отображение $X\colon E \to E$, порождающее дискретную динамическую систему (1), обратимо в достаточно малой окрестности многообразия M. Рассмотрим еще одно вспомогательное утверждение, аналогичное лемме 1.

Лемма 3. *Пусть отображение $B(\varphi, 0)\colon E_\varphi \to E_{\varphi+\omega}$ имеет ограниченное обратное отображение для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и выполняется соотношение*

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{T}_m} ||B_p^{-1}(\varphi, 0)|| < 1. \tag{20}$$

Тогда найдутся числа $\gamma > 0$, $M \geq 1$ и $q \in (0,1)$ такие, что для последовательности $\{(\varphi_{-n}, h_{-n})\}_{n\geq 1}$, определенной равенствами

$$(\varphi_{-n}, h_{-n}) = P^{-1}(\varphi_{-n+1}, h_{-n+1}), \quad n \geq 1, \tag{21}$$

где $(\varphi_0, h_0) \in G_\gamma$, выполняется соотношение

$$||h_{-n}|| \leq Mq^n ||h_0||, \quad n \geq 1. \tag{22}$$

Доказательство. С помощью равенства (17) убеждаемся в том, что соотношение (21) равносильно следующей системе соотношений:

$$\varphi_{-n} = \varphi_{-n+1} - \omega - \widetilde{A}(\varphi_{-n+1}, h_{-n+1})h_{-n+1}, \tag{23}$$

$$h_{-n} = \widetilde{B}(\varphi_{-n+1}, h_{-n+1})h_{-n+1}, \quad n \geq 1, \tag{24}$$

где

$$\widetilde{A}(\varphi, h) = A(P^{-1}(\varphi, h))B^{-1}(P^{-1}(\varphi, h)), \tag{25}$$

$$\widetilde{B}(\varphi, h) = B^{-1}(P^{-1}(\varphi, h)), \tag{26}$$

причем

$$\widetilde{A}(\varphi, 0) = A(\varphi - \omega, 0)B^{-1}(\varphi - \omega, 0),$$

$$\widetilde{B}(\varphi, 0) = B^{-1}(\varphi - \omega, 0).$$

Поскольку отображения $\widetilde{A}(\varphi, h)$ и $\widetilde{B}(\varphi, h)$ в достаточно малой окрестности множества $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ являются C^{r-1}-отображениями, что следует из соотношений (25), (26) и принадлежности отображений $A(\varphi, h)$, $B^{-1}(\varphi, h)$ и P_1 классу C^{r-1}, то в силу компактности тора $\mathcal{T}_m$ справедливы соотношения

$$\sup_{(\varphi,h)\in G_\varepsilon} ||\widetilde{A}(\varphi, h) - A(\varphi - \omega, 0)B^{-1}(\varphi - \omega, 0)|| = o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\sup_{(\varphi,h)\in G_\varepsilon} ||\widetilde{B}(\varphi, h) - B^{-1}(\varphi - \omega, 0)|| = o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

аналогичные соотношениям (4) и (5). Поэтому на основании (20), (23) и (24) для

$$\widetilde{B}_p(\varphi, h) = \widetilde{B}(P^{-p+1}(\varphi, h))\widetilde{B}(P^{-p+2}(\varphi, h)) \ldots \widetilde{B}(P^{-1}(\varphi, h))\widetilde{B}(\varphi, h)$$

выполняется соотношение

$$\sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} ||\widetilde{B}(\varphi, h)|| < \mu < 1$$

с некоторыми положительными числами γ и μ.

Рассуждая далее аналогичным образом, как и при доказательстве леммы 1, заменив $B_n(\varphi, h)$, φ_n и h_n соответственно на $\widetilde{B}(\varphi, h)$, φ_{-n} и h_{-n}, получим соотношение (22).

Замечание 2. Из утверждений лемм 1 и 3 вытекает, что в случае выполнения соотношения (9) многообразие M является аттрактором [6] системы (1), а в случае выполнения соотношения (20) — репеллером [6] этой же системы.

Рассмотрим теперь задачу существования решений уравнения (3).

Теорема 1. *Если для некоторого $p \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение (9), то найдется число $\gamma > 0$ такое, что уравнение (3) имеет единственное определенное на G_γ решение $V(\varphi, h)$ класса C^0. Это решение представляется в виде*

$$V(\varphi, h) = A(\varphi, h) + \sum_{n=1}^{\infty} A(\varphi_n, h_n)B(\varphi, h). \tag{27}$$

При достаточно малых γ и величине (6) решение $V(\varphi, h)$ является C^{r-1}-отображением.

Доказательство. Согласно (4) и утверждению леммы 1 найдутся числа $\gamma > 0$, $M \geq 1$, $q \in (0, 1)$, $p \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma,\ n\geq 1} ||A(\varphi_n, h_n)|| \leq a, \\ \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} ||B_n(\varphi, h)|| \leq Mq^n, \quad n \geq 1, \end{gathered} \tag{28}$$

и

$$Mq^p < 1. \tag{29}$$

Поэтому операторный ряд (27), где $(\varphi, h) \in G_\gamma$, мажорируется сходящимся рядом

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} aMq^n.$$

Следовательно, операторная функция $V(\varphi, h)$, определенная равенством (27), непрерывна по (φ, h) на G_γ. Подстановкой отображения $V(\varphi, h)$ в уравнение (3) убеждаемся в том, что это отображение является решением класса C^0 исследуемого уравнения.

Единственность решения $V(\varphi, h)$ уравнения (3) вытекает из того, что соответствующее линейное однородное уравнение

$$Y(\varphi, h) = Y(\varphi + \omega + A(\varphi, h)h, B(\varphi, h)h)B(\varphi, h) \tag{30}$$

имеет только нулевое решение. Действительно, каждое решение уравнения (30) является решением уравнения

$$Y(\varphi, h) = Y(\varphi_p, h_p)B_p(\varphi, h).$$

А согласно (28) и (29)

$$0 \le \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} ||Y(\varphi, h)|| = \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} ||Y(\varphi_p, h_p)B_p(\varphi, h)|| \le$$

$$\le \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} ||Y(\varphi_p, h_p)|| \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} ||B_p(\varphi, h)|| \le \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} ||Y(\varphi, h)|| M q^p.$$

Отсюда на основании (29) получаем

$$\sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} ||Y(\varphi, h)|| = 0.$$

Итак, первая часть утверждения теоремы 1 доказана.

Докажем вторую часть утверждения теоремы 1. Рассмотрим уравнение

$$Y(\varphi, h) = X(\varphi, h) + Y(\varphi_p, h_p)B_p(\varphi, h), \tag{31}$$

где

$$X(\varphi, h) = A(\varphi, h) + \sum_{n=1}^{p-1} A(\varphi_p, h_p)B_n(\varphi, h).$$

Очевидно, что $V(\varphi, h)$ — решение этого уравнения.

Рассмотрим также банахово пространство L $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на G_{ε_0} (ε_0 — достаточно малое число из интервала $(0, \gamma)$) функций $Z(\varphi, h)$ со значениями в пространстве $L(E_\varphi, \mathbb{R}^m)$ линейных непрерывных операторов, действующих из E_φ в $\mathbb{R}$, с нормой

$$||Z||_L = \sup_{(\varphi,h)\in G_{\varepsilon_0}} (||Z(\varphi, h)||_{L_1} + ||(dZ)_{(\varphi,h)}||_{L_2} + \ldots + ||(d^{r-1}Z)_{(\varphi,h)}||_{L_r}),$$

где

$$L_1 = L(E_\varphi, \mathbb{R}^m), \quad L_2 = L(E_\varphi, L_1), \ldots, L_r(E_\varphi, L_{r-1}).$$

Равенством

$$(\mathcal{D}Z)(\varphi, h) = X(\varphi, h) + Z(\varphi_p, h_p)B_p(\varphi, h)$$

определим линейный непрерывный оператор $\mathcal{D}\colon L \to L$. Учитывая соотношения

$$(d^k(\mathcal{D}Z))_{(\varphi,h)} = (d^kX)_{(\varphi,h)} + \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(d^l Z(\varphi_p, h_p)\right)_{(\varphi,h)} \left(d^{k-1}B_p\right)_{(\varphi,h)}, \quad k = \overline{1, r-1},$$

где $Z \in L$, вытекающие из правил дифференцирования, и ограниченность величин

$$\alpha_l = \sup_{(\varphi,h)\in G_{\varepsilon_0}} (\|(d^lX)_{(\varphi,h)}\| + \|(d^l\varphi_p)_{(\varphi,h)}\| + \|(d^lh_p)_{(\varphi,h)}\|), \quad l = \overline{0, r-1},$$

что устанавливается аналогичным образом, как и ограниченность операторных функций $A(\varphi, h)$ и (φ, h) в достаточно малой окрестности множества $\mathcal{T}_m \times \{0\}$, приходим к выводу, что

$$\|\mathcal{D}Z_1 - \mathcal{D}Z_2\|_L \leq k\|Z_1 - Z_2\|_L \tag{32}$$

для всех $Z_i \in L$, $i = 1, 2$, где коэффициент k имеет вид

$$k = \sup_{(\varphi,h)\in G_{\varepsilon_0}} \|B_p(\varphi, h)\| + Q(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}) \sup_{(\varphi,h)\in G_{\varepsilon_0}} \sum_{n=1}^{r-1} \|(d^n B_p)_{(\varphi,h)}\|$$

(здесь $Q(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})$ — некоторая непрерывная неотрицательная на $\mathbb{R}^r$ функция).

В силу соотношения (9) в случае достаточно малой величины (6) (число ε_0 — также достаточно малое) коэффициент k будет меньше 1. Поэтому согласно (32) отображение $\mathcal{D}\colon L \to L$ является отображением сжатия. Единственная неподвижная точка этого отображения принадлежит L. Эта точка совпадает с решением $V(\varphi, h)$ уравнения (31).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть отображение $B(\varphi, 0)\colon E_\varphi \to E_{\varphi+\omega}$ имеет ограниченное обратное отображение для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и выполняется соотношение (20). Тогда найдется число $\gamma > 0$ такое, что уравнение (3) имеет единственное определенное на G_γ решение $V(\varphi, h)$ класса C^0. Это решение представляется в виде*

$$V(\varphi, h) = -\sum_{k=1}^{\infty} A(P^{-k}(\varphi, h))B^{-1}(P^{-k}(\varphi, h))B^{-1}(P^{-k}(\varphi, h)) \cdots B^{-1}(P^{-k}(\varphi, h)). \tag{33}$$

При достаточно малых γ и величине (6) решение $V(\varphi, h)$ является C^{r-1}-отображением.

Доказательство. Пусть γ — такое положительное число, что на множестве $G_{M\gamma}$, где M — число, фигурирующее в лемме 3, определены отображения P, P^{-1} и операторные функции $A(\varphi, h)$, $B(\varphi, h)$, $B^{-1}(\varphi, h)$. Пусть также выполняется соотношение (22) для всех $(\varphi_0, h_0) \in G_\gamma$. Тогда согласно лемме 3

$$P^{-k}(\varphi, h) \in G_{M\gamma} \quad \forall(\varphi, h) \in G_\gamma, \quad k \geq 1. \tag{34}$$

Поэтому каждый член операторного ряда правой части равенства (33) определен на G_γ и, очевидно, является операторной функцией класса C^{r-1}. Не ограничивая общности, можно считать, что число γ выбрано настолько малым, что для некоторого положительного числа a выполняется соотношение

$$\sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma,\ k\geq 1} ||A(P^{-k}\varphi, h)|| \leq a$$

(это соотношение возможно в силу соотношения (34), компактности множества $\mathcal{T}_m$ и принадлежности $A(\varphi, h)$ классу C^{r-1}).

Поскольку также

$$\|B^{-1}(P^{-k}(\varphi, h))B^{-1}(P^{-k+1}(\varphi, h)) \ldots B^{-1}(P^{-1}(\varphi, h))\| \leq Mq^k \tag{35}$$

для всех $(\varphi, h) \in G_\gamma$ и $k \geq 1$ (согласно лемме 3), где $M \geq 1$ и $q \in (0,1)$, то операторный ряд в правой части равенства (33) мажорируется на C_γ сходящимся числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} aMq^k.$$

Следовательно, рассматриваемый операторный ряд сходится на G_γ и его сумма $V(\varphi, h)$ является непрерывной по (φ, h) на G_γ.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $V(\varphi, h)$ является решением уравнения (3). Это решение единственное, поскольку линейное однородное уравнение

$$Y(\varphi, h) = Y(\varphi + \omega + A(\varphi, h)h, B(\varphi, h)h)B(\varphi, h) \tag{36}$$

имеет только нулевое решение на G_γ. Действительно, уравнение (36) равносильно уравнению

$$Y(\varphi, h) = Y(P^{-1}(\varphi, h))B^{-1}(P^{-1}(\varphi, h)),$$

где $(\varphi, h) \in P^{-1}G_\gamma$, а каждое ограниченное на G_γ решение этого уравнения является, очевидно, решением уравнения

$$Y(\varphi, h) = Y(P^{-1}(\varphi, h))B^{-1}(P^{-m}(\varphi, h))B^{-1}(P^{-m+1}(\varphi, h)) \ldots B^{-1}(P^{-1}(\varphi, h)), \tag{37}$$

где m — такое натуральное число, что согласно (35)

$$\sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} \|B^{-1}(P^{-m}(\varphi, h))B^{-1}(P^{-m+1}(\varphi, h)) \ldots B^{-1}(P^{-1}(\varphi, h))\| \leq \mu \tag{38}$$

для некоторого числа $\mu \in (0,1)$ и

$$P^{-m}(\varphi, h)G_\gamma \subset G_\gamma. \tag{39}$$

Согласно (37) на основании (38) и (39)

$$0 \leq \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} \|Y(\varphi, h)\| \leq \mu \sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} \|Y(\varphi, h)\|.$$

Поэтому

$$\sup_{(\varphi,h)\in G_\gamma} \|Y(\varphi, h)\| = 0.$$

Итак, первая часть утверждения теоремы 2 доказана.

Обоснование второй части утверждения теоремы 2 аналогично обоснованию соответствующей части утверждения теоремы 1. При этом учитывается то, что ограничения на величину (6) обеспечивают достаточную малость величины

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \sum_{k=1}^{r-1} \left\| (d^k B^{-1})_{(\varphi,0)} \right\|.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Теоремы 1 и 2 позволяют улучшить результаты статьи [4] об условиях, обеспечивающих сведение системы (1) к системе (2), и условиях асимптотической устойчивости траекторий системы (1).

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
2. *Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Шерман П.Б.* Топологические методы в теории нелинейных фредгольмовых операторов. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1978. — 79 с.
3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
4. *Самойленко А.М., Слюсарчук В.Е., Слюсарчук В.В.* Исследование нелинейного разностного уравнения в банаховом пространстве в окрестности квазипериодического решения // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 12. — С. 1661 – 1676.
5. *Самойленко А.М.* Исследование дискретной системы в окрестности квазипериодической траектории // Там же. — 1992. — **44**, № 12. — С. 1702 – 1711.
6. *Аносов Д.В., Арансон С., Арнольд В.И. и др.* Динамические системы-1 // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундамент. направления. — М.: ВИНИТИ, 1985. — Т.1. — 243 с.

Получено 22.01.99