УДК 517.9

ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

А.М. Самойленко, А.Г. Пелюх

Ін-т математики НАН України,
Україна, 252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: imath2@mail.kar.net;
pel@imath.kiev.ua

For a nonlinear differential-functional equation we establish the conditions of existence and uniqueness of an analytical solution.

Одержано умови існування і єдиності аналітичного розв'язку одного нелінійного диференціально-функціонального рівняння.

Вивченню питань існування аналітичних розв'язків диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$x'(t) = F(t, x(t), x(\varphi(t)), x'(f(t))), \tag{1}$$

де $F(t,x,y,z) : R \times R^3 \to R,\ \varphi(t) : R \to R, f(t) : R \to R$, присвячено велику кількість робіт. Зокрема, в [1 – 5] одержано умови існування і єдиності аналітичних розв'язків окремих класів лінійних і нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду (1) з лінійним відхиленням аргументу ($\varphi(t) = \lambda t,\ f(t) = \lambda t,\ \lambda = \text{const}$). Метою даної роботи є встановлення достатніх умов існування і єдиності аналітичного розв'язку рівняння (1), що задовольняє початкові умови

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \tag{2}$$

Для простоти далі будемо розглядати рівняння вигляду

$$x'(t) = F(t, x(t), x(\varphi(t)), x'(f_1 t)), \tag{3}$$

де $F(t,x,y,z) : R \times R^3 \to R, \varphi(t) : R \to R, f_1 = \text{const}$. Як буде показано пізніше, дослідження рівняння (1) зводиться до дослідження рівняння (3).

Справедлива така теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) функції $\varphi(t), F(t,x,y,z)$ розкладаються в ряди

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i t^i, \\ F(t,x,y,z) &= \sum_{i_1+\cdots+i_4=1}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} t^{i_1} x^{i_2} y^{i_3} z^{i_4}, \end{aligned} \tag{4}$$

які збігаються при $|t| < a,\ |x| < b,\ |y| < b,\ |z| < b$, де a, b — деякі додатні сталі;

2) $0 < \varphi_1 < 1, \quad 0 < f_1 \leq 1;$

3) $1 - F_{0001} f_1^i \neq 0, \quad i = 0, 1, \ldots .$

Тоді існує розв'язок задачі (3), (2) у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=2}^{\infty} x_i t^i, \tag{5}$$

який збігається при $|t| \leq \rho$, де ρ — деяка додатна стала ($\rho < a$).

Доведення. Спочатку покажемо, що при виконанні умов 1 – 3 задача (3), (2) має формальний розв'язок у вигляді ряду (5). Для цього підставимо (4), (5) у рівняння (3). В результаті одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} i x_i t^{i-1} &= \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=1}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} t^{i_1} \left(\sum_{i=2}^{\infty} x_i t^i \right)^{i_2} \left(\sum_{i=2}^{\infty} x_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j t^j \right)^i \right)^{i_3} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{i=2}^{\infty} i x_i \left(f_1 t \right)^{i-1} \right)^{i_4} . \end{aligned}$$

Виконавши в останньому співвідношенні звичайні формальні перетворення і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях t^i, отримаємо рекурентну систему рівнянь відносно x_i, $i = 2, 3, \ldots$, вигляду

$$\begin{aligned} &2x_2 = F_{0001} 2x_2 f_1 + F_{1000}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &i x_i = F_{0001} i x_i f_1^{i-1} + P_i(x_2, \ldots, x_{i-1}),\ i \geq 3, \end{aligned} \tag{6}$$

де $P_i(x_2, \ldots, x_{i-1}),\ i \geq 3,$ — деякі многочлени відносно своїх аргументів з коефіцієнтами, що виражаються через $F_{i_1 i_2 i_3 i_4},\ i_1 + i_2 + i_3 + {} + i_4 \geq 1,\ f_1,\ \varphi_j,\ j \geq 1$, за допомогою лише операцій множення і додавання. На підставі умови 3 із (6) однозначно знаходимо

$$\begin{aligned} &x_2 = \frac{1}{2(1 - F_{0001} f_1)} F_{1000}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_i = \frac{1}{i(1 - F_{0001} f_1^{i-1})} P_i(x_2, \ldots, x_{i-1}),\ i \geq 3. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким чином, ряд (5), коефіцієнти якого визначаються співвідношеннями (7), формально задовольняє рівняння (3). Для завершення доведення теореми достатньо показати, що в деякому околі точки $t = 0$ цей ряд збігається.

Нехай $a_1 < a,\ b_1 < b$. Тоді існують такі додатні сталі L, M, що функції

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t,x,y,z) &= \frac{L}{\left(1-\dfrac{t}{a_1}\right)\left(1-\dfrac{x}{b_1}\right)\left(1-\dfrac{y}{b_1}\right)\left(1-\dfrac{z}{b_1}\right)} - L,\\ \tilde{\varphi}(t) &= \varphi_1 t + \frac{M}{1-\dfrac{t}{a_1}} - M - \frac{M}{a_1}t,\end{aligned}$$

розкладаються в ряди

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t,x,y,z) &= \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=1}^{\infty} \tilde{F}_{i_1i_2i_3i_4} t^{i_1}x^{i_2}y^{i_3}z^{i_4},\\ \tilde{\varphi}(t) &= \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_i t^i,\end{aligned} \tag{8}$$

де $\tilde{F}_{i_1i_2i_3i_4} = \dfrac{L}{a_1^{i_1}b_1^{i_2+i_3+i_4}},\ i_1+i_2+i_3+i_4 \geq 1,\ \varphi_i = \dfrac{M}{a_1^i},\ i \geq 2,\ \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1$, які збігаються при $|t| < a_1,\ |x| < b_1,\ |y| < b_1,\ |z| < b_1$ і є мажорантами для функцій $F(t,x,y,z),\ \varphi(t)$, тобто

$$|F_{i_1i_2i_3i_4}| \leq \tilde{F}_{i_1i_2i_3i_4},\ i_1+i_2+i_3+i_4 \geq 1,\ |\varphi_i| \leq \tilde{\varphi}_i,\ i \geq 1.$$

Позначимо через β таке додатне число, для якого при всіх $i \geq 0$ виконуються співвідношення $\beta \leq |1 - F_{0001}f_1^i|$ (в силу умов 2, 3 таке число завжди існує).

Розглянемо рівняння

$$\beta\tilde{x}'(t) = \tilde{F}(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}(\tilde{\varphi}(t)),\tilde{x}'(f_1t)) - \tilde{F}_{0001}\tilde{x}'(f_1t) \tag{9}$$

і покажемо, що воно має єдиний формальний розв'язок у вигляді ряду

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=2}^{\infty}\tilde{x}_i t^i. \tag{10}$$

Дійсно, підставивши (8), (10) у рівняння (9), одержимо

$$\begin{aligned}\beta\sum_{i=2}^{\infty} i\tilde{x}_i t^{i-1} &= \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=1}^{\infty}\tilde{F}_{i_1i_2i_3i_4}t^{i_1}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\tilde{x}_it^i\right)^{i_2}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\tilde{x}_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_jt^j\right)^i\right)^{i_3}\times\\ &\times\left(\sum_{i=2}^{\infty}i\tilde{x}_if_1^{i-1}t^{i-1}\right)^{i_4} - \tilde{F}_{0001}\sum_{i=2}^{\infty}i\tilde{x}_if_1^{i-1}t^{i-1}.\end{aligned}$$

Якщо тепер в останньому співвідношенні виконати звичайні формальні перетворення і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях t^i, то аналогічно (7) однозначно отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= \frac{1}{2\beta}\tilde{F}_{1000}, \\ \tilde{x}_i &= \frac{1}{i\beta}\tilde{P}_i(\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{i-1}),\ i \geq 3, \end{aligned} \tag{11}$$

де $\tilde{P}_i(\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{i-1}),\ i \geq 3$, є многочленами P_i, в яких $x_2, \ldots, x_{i-1}$ замінено на $\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{i-1}$, а коефіцієнти $F_{i_1 i_2 i_3 i_4},\ i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \geq 1,\ \varphi_i,\ i \geq 1,\ f_1$, — на коефіцієнти $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4},\ i_1 + +i_2 + i_3 + i_4 \geq 1,\ \tilde{\varphi}_i,\ i \geq 1,\ f_1$. Враховуючи (7), (11), неважко послідовно показати, що при всіх $i \geq 2$ виконуються співвідношення

$$\tilde{x}_i > 0, \quad |x_i| \leq \tilde{x}_i, \quad i \geq 2, \tag{12}$$

і, отже, для доведення теореми достатньо довести збіжність ряду (10) з коефіцієнтами (11).

Рівняння

$$\beta\bar{x}'(t) = \tilde{F}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(\tilde{\varphi}(t)), \bar{x}'(t)) - \tilde{F}_{0001}\bar{x}'(t), \tag{13}$$

яке одержується із (9) при $f_1 = 1$, також має єдиний формальний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=2}^{\infty} \bar{x}_i t^i. \tag{14}$$

При цьому коефіцієнти $\bar{x}_i,\ i \geq 2$, однозначно визначаються за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \frac{1}{2\beta}\tilde{F}_{1000}, \\ \bar{x}_i &= \frac{1}{i\beta}\bar{P}_i(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{i-1}),\ i \geq 3, \end{aligned} \tag{15}$$

де $\bar{P}_i(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{i-1}),\ i \geq 3$, є многочленами $\tilde{P}_i(\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{i-1})$, в яких $\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{i-1}$ замінено на $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{i-1}$, а коефіцієнти $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4},\ i_1 + +i_2 + i_3 + i_4 \geq 1,\ \tilde{\varphi}_i,\ i \geq 1,\ f_1$, — на коефіцієнти $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4},\ i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \geq 1,\ \tilde{\varphi}_i,\ i \geq 1,\ 1$. Отже, при всіх $i \geq 2$ виконуються співвідношення

$$\bar{x}_i > 0, \quad \tilde{x}_i \leq \bar{x}_i. \tag{16}$$

Звідси безпосередньо випливає, що для доведення збіжності ряду (10) достатньо показати, що ряд (14) з коефіцієнтами (15) збігається у деякому околі точки $t = 0$.

Згідно з [6], існує єдиний розв'язок $\tilde{\gamma}(t)$ рівняння

$$\tilde{\gamma}(\tilde{\varphi}(t)) = \varphi_1 \tilde{\gamma}(t)$$

у вигляді ряду

$$\tilde{\gamma}(t) = t + \sum_{j=2}^{\infty} \tilde{\gamma}_j t_j,$$

де $\tilde{\gamma}_j > 0,\ j \geq 2$, який збігається при $|t| < a_2 < a_1$ (a_2 — деяке додатне число). Виконаємо в (13) заміну змінних

$$\bar{x}(t) = y(\tilde{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}(t) = \tau, \quad t = \tilde{\gamma}^{-1}(\tau). \tag{17}$$

В результаті одержимо рівняння

$$\beta y'(\tau) = \Phi(\tau, y(\tau), y(\varphi_1 \tau), y'(\tau)), \tag{18}$$

де

$$\Phi(\tau, y(\tau), y(\varphi_1\tau), y'(\tau)) = \beta(1 - \tilde{\gamma}'(\tilde{\gamma}^{-1}(\tau)))y'(\tau) + \\ + \tilde{F}(\tilde{\gamma}^{-1}(\tau), y(\tau), y(\varphi_1\tau), \tilde{\gamma}'(\tilde{\gamma}^{-1}(\tau))y'(\tau)) - \tilde{F}_{0001}\tilde{\gamma}'(\tilde{\gamma}^{-1}(\tau))y'(\tau).$$

Враховуючи властивості функцій $\tilde{F}(\tau, x, y, z),\ \tilde{\gamma}^{-1}(\tau),\ \tilde{\gamma}'(\tau)$, неважко показати, що функція $\Phi(\tau, x, y, z)$ розкладається в ряд

$$\Phi(\tau, x, y, z) = \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=1}^{\infty} \Phi_{i_1 i_2 i_3 i_4} \tau^{i_1} x^{i_2} y^{i_3} z^{i_4} - \Phi_{0001} z,$$

який збігається при $|\tau| < a_3 < a_2,\ |x| < b_2 < b_1,\ |y| < b_2,\ |z| < b_2$. На підставі результатів, одержаних у роботі [5], рівняння (18) має єдиний розв'язок $y(\tau)$ у вигляді ряду

$$y(\tau) = \sum_{i=2}^{\infty} y_i \tau^i,$$

який збігається при $|\tau| < a_4 < a_3$ (a_4 — деяке додатне число). Звідси і з (17) випливає, що рівняння (13) має розв'язок $\bar{x}(t) = y(\tilde{\gamma}(t))$ у вигляді ряду

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=2}^{\infty} \hat{x}_i t^i, \tag{19}$$

який збігається при $|t| \leq \rho$, де ρ — деяке додатне число ($\rho < a_4$). Оскільки ми показали, що рівняння (13) може мати не більше одного розв'язку у вигляді ряду (19), то цей ряд співпадає із рядом (14), тобто $\bar{x}_i = \hat{x}_i,\ i \geq 2$. Цим самим доведено збіжність ряду (14). Тоді на підставі (16), (12) одержуємо, що ряд (5), коефіцієнти якого визначаються співвідношеннями (7), збігається при $|t| \leq \rho$. Теорему доведено.

Розглянемо тепер рівняння (1). Припустимо, що функція $f(t)$ розкладається в ряд

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^i,$$

який збігається при $|t| < a$, і виконуються умови теореми.

Згідно з [6], існує єдиний розв'язок $\gamma(t)$ рівняння

$$\gamma(f(t)) = f_1 \gamma(t)$$

у вигляді ряду $\gamma(t) = t + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \gamma_i t^i$, який збігається при $|t| \le a_1 < a$. Тоді, виконавши в (1) заміну змінних

$$x(t) = y(\gamma(t)),\ \gamma(t) = \tau,\ t = \gamma^{-1}(\tau), \tag{20}$$

одержимо рівняння

$$y'(\tau) = F_1(\tau, y(\tau), y(\varphi_1(\tau)), y'(f_1\tau)), \tag{21}$$

де

$$F_1(\tau, y(\tau), y(\varphi_1(\tau)), y'(f_1\tau)) = \left[1 - \gamma'(\gamma^{-1}(\tau))\right] y'(\tau) +$$
$$+F\left[\gamma^{-1}(\tau), y(\tau), y(\varphi_1(\tau)), \gamma'(f(\gamma^{-1}(\tau)))y'(f_1\tau)\right],\ \varphi_1(\tau) = \gamma(\varphi(\gamma^{-1}(\tau))).$$

Беручи до уваги властивості функцій $F(t, x, y, z),\ \varphi(t)$ і $\gamma(t)$, можна показати, що функції $F_1(\tau, x, y, z),\ \varphi_1(\tau)$ розкладаються в ряди

$$F_1(\tau, x, y, z) = \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=1}^{\infty} F^1_{i_1 i_2 i_3 i_4} \tau^{i_1} x^{i_2} y^{i_3} z^{i_4},$$
$$\varphi_1(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^1_i \tau^i,\ \varphi^1_1 = \varphi_1,$$

які збігаються при $|\tau| < a_* < a,\ |x| < b_* < b,\ |y| < b_*,\ |z| < b_*$, де a_*, b_* — деякі додатні числа.

Таким чином, за допомогою взаємно однозначної заміни змінних (20) дослідження питання існування і єдиності аналітичного розв'язку рівняння (1), що задовольняє умови (2), зводиться до дослідження аналогічного питання для рівняння (21), яке має вигляд (3) і для якого виконуються всі умови теореми.

1. *Kato T., McLeod J.B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(x) + by(\lambda x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971.— **77.** — P. 891 – 937.
2. *Frederickson P.O.* Dirichlet series solutions for certain functional differential equations // Lect. Notes Math. — 1971. — **243.** — P. 249 – 254.
3. *Пелюх Г.П.* О голоморфных решениях нелинейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференциально-разностные уравнения. — Киев: Ин-т математики АН Украины, — 1971. — С. 121 – 124.
4. *Grimm L.J., Hall L.M.* Holomorphic solutions of functional differential systems near singular points // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — **42**, № 1. — P. 167 – 170.
5. *Самойленко А.М., Пелюх А.Г.* Про аналітичні розв'язки нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з нелінійними відхиленнями аргументів // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 2. — С. 234 – 240.
6. *Szekeres G.* Regular iteration of real and complex functions // Acta math. — 1958. — **100**. — P. 203 – 258.

Одержано 09.01.99