НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.9

# ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

**С.А. Кривошея**

*Нац. ун-т ім. Т. Шевченка,*
*Україна, 252033, Київ, вул. Володимирська, 64*
*e-mail: ksa@hpserv.rpd.univ.kiev.ua*

*By virtue of the theory of generalized inverse operators technique we establish the existance theorems (the necessary and the sufficient conditions) for periodic solutions of matrix differential equation $\dot{Z} = AZ + ZB + \Phi(t) + \varepsilon f(t, Z)$. These conditions are formulated in terms of the Jordan's structure of matrices $A$ and $B$.*

*З допомогою апарату теорії узагальнено-обернених операторів отримано теореми існування (необхідну та достатню умови) періодичних розв'язків матричного диференціального рівняння $\dot{Z} = AZ + ZB + \Phi(t) + \varepsilon f(t, Z)$. Вказані умови сформульовані в термінах жорданової структури матриць $A$ і $B$.*

Розглянемо задачу знаходження $\omega$-періодичних розв'язків матричного диференціального рівняння

$$\dot{Z} = AZ + ZB + \Phi(t) + \varepsilon f(t, Z), \tag{1}$$

де $Z = Z(t)$ — невідома $(m \times n)$-вимірна матриця; $A$, $B$ — сталі $(m \times m)$- та $(n \times n)$-вимірні матриці відповідно; $\Phi(t)$ — $\omega$-періодична, неперервна на $[0, \omega]$ $(m \times n)$-вимірна матриця; $f(t, Z)$ — $(m \times n)$-вимірна матрична функція вигляду

$$f(t, Z) = \sum_{k=1}^{p} \Psi_{0k}(t) Z \Psi_{1k}(t) Z \ldots \Psi_{k-1k}(t) Z \Psi_{kk}(t)$$

з $\omega$-періодичними, неперервними на $[0, \omega]$ матричними коефіцієнтами $\Psi_{ik}$, $i = 0, 1, \ldots, k$; $k = 1, \ldots, p$, $\omega = \text{const} > 0$; $\varepsilon \geq 0$ — малий параметр. Важливим частинним випадком рівняння (1) $(m = n, \ \ p = 2)$ є матричне диференціальне рівняння Ріккаті, яке широко використовується в багатьох задачах теорії оптимального керування [1, 2].

Разом з рівнянням (1) розглянемо періодичну крайову умову

$$Z(0) = Z(\omega). \tag{2}$$

**1. Критерій існування періодичних розв'язків породжуючого рівняння (1) ($\varepsilon = 0$).** Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, дія якого на $(m \times n)$-вимірну матрицю $\Phi(t)$ з $C_{[0,\omega]}$ визначена формулою

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] \stackrel{\text{def}}{=} e^{A(t-\tau)} \Phi(\tau) e^{B(t-\tau)}, \qquad \tau, t \in [0, \omega]. \tag{3}$$

З допомогою оператора $\mathbf{K}_\tau^t$ загальний розв'язок породжуючого рівняння можна записати у вигляді

$$Z = \mathbf{K}_\tau^t[M] + \widetilde{Z} \qquad \left(\widetilde{Z} = \int_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi]\,d\tau\right), \tag{4}$$

де $M$ — довільна стала $(m \times n)$-вимірна матриця.

Врахувавши крайові умови (2), для матриці $M$ одержимо рівняння типу Ляпунова

$$\widetilde{A}M - M\widetilde{B} = D \qquad \left(\widetilde{A} = e^{A\omega}, \quad \widetilde{B} = e^{-B\omega}, \quad D = -\widetilde{A}\int_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0[\Phi]\,d\tau\right). \tag{5}$$

Отже, породжуюче рівняння (1) $(\varepsilon = 0)$ має $\omega$-періодичний розв'язок тоді і тільки тоді, коли матричне рівняння (5) розв'язне.

Відомо [3, с.199], що у випадку, коли матриці $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ не мають спільних власних чисел (некритичний випадок), матричне рівняння (5) має єдиний розв'язок для довільної матриці $D$ і, отже, породжуюче рівняння має єдиний $\omega$-періодичний розв'язок для довільної матриці $\Phi(t)$. Критичний випадок (матриці $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ мають спільні власні числа) досліджено в [4].

Нехай $\widetilde{A}_0 = \operatorname{diag}\{I_{p_1}(\widetilde{\lambda}_1), \dots, I_{p_u}(\widetilde{\lambda}_u)\}$, $\widetilde{B}_0 = \operatorname{diag}\{I_{q_1}(\widetilde{\mu}_1), \dots, I_{q_v}(\widetilde{\mu}_v)\}$ — жорданові нормальні форми матриць $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$: $\widetilde{A} = UA_0U^{-1}$, $\widetilde{B} = V\widetilde{B}_0V^{-1}$; $I_{p_i}(\widetilde{\lambda}_i) = \widetilde{\lambda}_i E_{p_i} + H_{p_i}$, $I_{q_j}(\widetilde{\mu}_j) = \widetilde{\mu}_j E_{q_j} + H_{q_j}$ — жорданові блоки; $\sum\limits_{i=1}^{u} p_i = m$, $\sum\limits_{j=1}^{v} q_j = n$, $\widetilde{\lambda}_i = e^{\lambda_i\omega}$, $\mu_j = e^{-\mu_j\omega}$; $\lambda_i$ і $\mu_j$ — власні числа матриць $A$ і $B$ відповідно. Як відомо [3, с.159], кількість і вимірність жорданових блоків у матриць $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ такі ж, як і у матриць $A$ і $B$ відповідно.

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що матричне рівняння (5) має вигляд

$$\mathbf{L}X \overset{\text{def}}{=} \widetilde{A}_0X - X\widetilde{B}_0 = F, \tag{6}$$

де $\mathbf{L}$ — лінійний оператор; $C_{m\times n} \to C_{m\times n}$, $X = U^{-1}MV$, $F = U^{-1}DV$.

**Теорема 1** [4]. *Матричне рівняння (6) розв'язне тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\mathbf{R}[F] = 0, \tag{7}$$

*де блочний оператор* $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{ij}) : C_{m\times n} \to \operatorname{Ker}\mathbf{L}^*$ *визначений рівностями:*

$$\mathbf{R}[F] = (\mathbf{R}_{ij}[F_{ij}]),$$

$$\mathbf{R}_{ij}[F_{ij}] \overset{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{ll} 0, & \widetilde{\lambda}_i \neq \widetilde{\mu}_j; \\ \sum\limits_{l=0}^{r_{ij}-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{r_{ij}-l} f_{k+lk}\right)\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(l+1)}, & p_i \le q_j, \quad \widetilde{\lambda}_i = \widetilde{\mu}_j; \\ \sum\limits_{l=0}^{r_{ij}-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{r_{ij}-l} f_{k_{ij}+lk}\right)\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(l+1)}, & q_j < p_i, \quad k_{ij} = k + p_i - q_j, \quad \widetilde{\lambda}_i = \widetilde{\mu}_j, \end{array}\right.$$

$F = (F_{ij})$ — *блочна матриця,* $F_{ij}$ — $(p_i \times q_j)$*-вимірна матриця-блок* $(i = 1, \ldots, u;\ j = 1, \ldots, v)$, $f_{k+lk}$, $f_{k_{ij}+lk}$ — *елементи матриці* $F_{ij}$.

*При виконанні умови (7) матричне рівняння (6) має* $n_0$*-параметричну сім'ю розв'язків вигляду*

$$X = \sum_{k=1}^{n_0} c_k X_k + \mathbf{L}^+ F = X_0 C_0 + \mathbf{L}^+ F\,, \tag{8}$$

*де* $X_1, \ldots, X_{n_0}$ — *базис* $\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}$, $c_1, \ldots, c_{n_0}$ — *довільні скалярні параметри,*

$$X_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} (X_1, \ldots, X_{n_0}), \quad C_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} c \otimes E_n, \quad c = \mathrm{col}\,(c_1, \ldots, c_{n_0}), \tag{9}$$

$\mathbf{L}^+$ — *псевдообернений оператор [5],* $\mathbf{L}^*$ — *спряжений оператор,* $\otimes$ — *символ кронекерівського добутку,* $n_0 = \dim \mathrm{Ker}\,\mathbf{L} = \dim \mathrm{Ker}\,\mathbf{L}^* = \sum\limits_{i=1}^{u} \sum\limits_{j=1}^{v} r_{ij}$ $(r_{ij} = \min(p_i, q_j)$ $(\widetilde{\lambda}_i = \widetilde{\mu}_j)$; $r_{ij} = 0$ $(\widetilde{\lambda}_i \neq \widetilde{\mu}_j))$.

Базиси $\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}$ і $\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}^*$ утворюють системи блочних матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \varepsilon_{ij}^{(k)} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

відповідно, де

$$\begin{gathered} \varepsilon_{ij}^{(k)} = \begin{cases} H_{p_i}^{k-1}, & k = 1, \ldots, p_i; \quad p_i = q_j; \\ (0, H_{p_i}^{k-1}), & k = 1, \ldots, p_i; \quad p_i < q_j; \\ \mathrm{col}\,(H_{q_j}^{k-1}, 0), & k = 1, \ldots, q_j; \quad q_j < p_i, \end{cases} \\ \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = \begin{cases} H_{p_i}^{*^{k-1}}, & k = 1, \ldots, p_i; \quad p_i = q_j; \\ (H_{p_i}^{*^{k-1}}, 0), & k = 1, \ldots, p_i; \quad p_i < q_j; \\ \mathrm{col}\,(0, H_{q_j}^{*^{k-1}}), & k = 1, \ldots, q_j; \quad q_j < p_i, \end{cases} \end{gathered} \tag{11}$$

— $(p_i \times q_j)$-вимірні матриці-блоки, $\widetilde{\lambda}_i = \widetilde{\mu}_j$.

***Зауваження 1.*** Побудувавши матрицю $R$ оператора $\mathbf{R}$ в канонічному базисі $E_{11}$, $E_{21} \ldots, E_{m1}, E_{12} \ldots, E_{mn}$ простору $C_{m \times n}$, критерій розв'язності матричного рівняння (6) можна записати в еквівалентній векторно-матричній формі

$$R\,\mathbf{T}\,[F] = 0\,, \tag{12}$$

де $\mathbf{T} : C_{m \times n} \to C^{mn}$ — лінійний оператор, дія якого на матрицю $F \in C_{m \times n}$ визначена формулою $\mathbf{T}\,[F] \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ $(F_1, \ldots, F_n$ — стовпці матриці $F$, $\oplus$ — символ прямої суми).

З теореми 1 випливає необхідні і достатня умова існування $\omega$-періодичного розв'язку породжуючого рівняння як у некритичному, так і у критичному випадках.

**Теорема 2.** *Породжуюче рівняння (1)* $(\varepsilon = 0)$ *має* $\omega$*-періодичний розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\widetilde{\mathbf{R}} \left[ \widetilde{A} \int\limits_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0[\Phi]\, d\tau \right] = 0\,, \tag{13}$$

*або (у векторно-матричній формі)*

$$\widetilde{R}\,\mathbf{T} \left[ \widetilde{A} \int\limits_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0[\Phi]\, d\tau \right] = 0\,, \tag{14}$$

*де* $\widetilde{\mathbf{R}}[\,\cdot\,] \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R}\,\left[U^{-1}\cdot V\right]$, *а* $\widetilde{R}$ *— матриця оператора* $\widetilde{\mathbf{R}}$ *в базисі* $E_{11}, \ldots, E_{mn}$. *При виконанні умови (13) (або (14)) породжуюче рівняння має* $n_0$*-параметричну сім'ю* $\omega$*-періодичних розв'язків вигляду*

$$Z_0(t, C_0) = \widetilde{\mathbf{R}}_0^t[X_0 C_0] + \mathbf{G}\,[\Phi], \quad t \in [0, \omega]\,, \tag{15}$$

*де* $\mathbf{G}$ *— узагальнений оператор Гріна, дія якого на матрицю* $\Phi \in C_{[0,\omega]}$ *визначена формулою*

$$\begin{gathered} \mathbf{G}[\Phi] \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi] d\tau + \widetilde{\mathbf{K}}_0^t \left[ \mathbf{L}^+ \left( U^{-1} \widetilde{A} \int\limits_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0[\Phi] d\tau V \right) \right], \\ \widetilde{\mathbf{K}}_\tau^t[\,\cdot\,] \overset{\text{def}}{=} \mathbf{K}_\tau^t[U \cdot V^{-1}], \end{gathered} \tag{16}$$

*а матриці* $X_0$, $C_0 = c \otimes E_n$ *визначені згідно з (9) – (11).*

***Зауваження. 2.*** З теореми 2 випливає, що у некритичному випадку ($\widetilde{\lambda}_i \neq \widetilde{\mu}_j \ \forall\ i = 1, \ldots, u;\ \forall\ j = 1, \ldots, v;\ n_0 = 0,\ \widetilde{\mathbf{R}} = 0$) породжуюче рівняння (1) $(\varepsilon = 0)$ для довільної матриці $\Phi(t)$ має єдиний $\omega$-періодичний розв'язок

$$Z_0(t) = \mathbf{G}\,[\Phi]\,, \quad t \in [0, \omega], \ \ \mathbf{L}^+ = \mathbf{L}^{-1}\,. \tag{17}$$

***3.*** Критичний випадок характеризується умовою

$$(\lambda_i + \mu_j)\omega \equiv 0 \,(\operatorname{mod} 2\pi\nu), \quad \nu^2 = -1; \quad i = 1, \ldots, u; \quad j = 1, \ldots, v.$$

**2. Умови існування періодичних розв'язків рівняння (1) ($\varepsilon > 0$).** Розглянемо спочатку задачу про існування $\omega$-періодичного розв'язку рівняння (1) $Z = Z(t, \varepsilon)$ такого, що $Z(\cdot, \varepsilon) \in C^1_{[0,\omega]}$, $Z(t, \cdot) \in C_{[0,\varepsilon_0]}$, $Z(t, 0) = Z_0(t)$ у некритичному випадку.

У рівнянні (1) виконаємо заміну $Z(t, \varepsilon) = Z_0(t) + Y(t, \varepsilon)$ $(Y(t, 0) = 0)$. Відносно $Y = Y(t, \varepsilon)$ дістанемо задачу

$$\dot{Y} = AY + YB + \varepsilon f(t, Z_0 + Y), \qquad Y(0, \varepsilon) = Y(\omega, \varepsilon). \tag{18}$$

Застосовуючи до (18) теорему 2, у відповідності з (17) одержуємо, що задача (18) еквівалентна операторному рівнянню

$$Y = \varepsilon\, \mathbf{G}\,[f\,(t,\, Z_0 + Y)]\,. \tag{19}$$

Рівняння (19) є рівнянням нерухомої точки оператора $\mathbf{S}[Y] \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon\mathbf{G}[f(t, Z_0 + Y)]$, визначеного на замкненій множині

$$\Theta_0 = \Big\{ Y = Y(t,\varepsilon) \,|\, Y(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{[0,\omega]},\ Y(t,\cdot) \in C_{[0,\varepsilon_0]},\ Y(t,0) = 0, \\ \|Y(t,\varepsilon)\| \le N_0 = \text{const} \}$$

повного простору $(m \times n)$-вимірних матриць $Y(t,\varepsilon)$ з $C^1_{[0,\omega]}$. Неважко переконатися, що, згідно з теоремою Банаха, операторне рівняння (19) має єдиний розв'язок при всіх $\varepsilon \le \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_*]$ ітераційного процесу

$$Y(t,\varepsilon) = \lim_{k\to+\infty} Y_k, \qquad Y_{k+1} = \varepsilon\mathbf{G}[f(t, Z_0 + Y_k)], \\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_*]; \quad k = 0,1,\ldots; \quad Y_0 = 0\,. \tag{20}$$

Отже, справедлива така теорема.

**Теорема 3.** *Матричне диференціальне рівняння (1)* $(\varepsilon > 0)$ *у некритичному випадку має єдиний $\omega$-періодичний розв'язок $Z(t,\varepsilon)$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційної формули*

$$Z(t,\varepsilon) = \lim_{k\to+\infty} Z_k, \quad Z_k = Z_0(t) + Y_k, \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_*], \tag{21}$$

*де $Y_k$ визначені формулою (20).*

Розглянемо тепер питання про існування $\omega$-періодичних розв'язків $Z(t,\varepsilon)$ рівняння (1), які при $\varepsilon = 0$ перетворюються в один із розв'язків $Z_0(t,\widehat{C}_0)$ породжуючого рівняння у критичному випадку.

**Теорема 4 (*необхідна умова*)**. *Нехай для матриці $\Phi(t)$ виконується умова (13), а рівняння (1) має $\omega$-періодичний розв'язок $Z = Z(t,\varepsilon)$: $Z(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{[0,\omega]}$, $Z(t,\cdot) \in C_{[0,\varepsilon_0]}$, $Z(t,0) = Z_0(t,\widehat{C}_0)$. Тоді матриця $\widehat{C}_0$ задовольняє рівняння*

$$\widetilde{\mathbf{R}}\left[ [\widetilde{A}] \int_0^\omega \mathbf{K}^0_\tau \left[ f(\tau, Z_0(\tau,\widehat{C}_0)) \right] d\tau \right] = 0\,. \tag{22}$$

***Доведення.*** При всіх $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $t \in R$ маємо

$$\dot{Z} = AZ + ZB + \Phi(t) + \varepsilon f(t,Z), \qquad Z(t,\varepsilon) = Z(t+\omega,\varepsilon)\,. \tag{23}$$

Застосувавши до функції $\Phi(t) + \varepsilon f(t,Z)$ в (23) критерій розв'язності (13), дістанемо

$$\widetilde{\mathbf{R}}\left[ \widetilde{A} \int_0^\omega \mathbf{K}^0_\tau \left[\Phi(\tau) + \varepsilon f(\tau,Z)\right] d\tau \right] = 0\,. \tag{24}$$

Внаслідок лінійності оператора $\widetilde{\mathbf{R}}$ і того, що матриця $\Phi(t)$ задовольняє умову (13), з (24) маємо

$$\widetilde{\mathbf{R}}\left[ \widetilde{A} \int_0^\omega \mathbf{K}^0_\tau [f(\tau,Z)]\, d\tau \right] = 0\,. \tag{25}$$

Поклавши в (25) $\varepsilon = 0$, дістанемо (22). (У відповідності з [5 – 7] рівняння (22) називатимемо рівнянням для породжуючих амплітуд.)

У рівнянні (1) виконаємо заміну

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\widehat{C}_0) + Y(t,\varepsilon), \qquad Y(t,0) = 0, \tag{26}$$

в якій матриця $\widehat{C}_0 = \widehat{c} \otimes E_n$ задовольняє необхідну умову (22). Відносно функції $Y = Y(t,\varepsilon)$ дістанемо рівняння

$$\dot{Y} = AY + YB + \varepsilon f\left(t, Z_0(t,\widehat{C}_0) + Y(t,\varepsilon)\right) . \tag{27}$$

Виділивши у матричної функції $f$ лінійну частину відносно $Y$ і члени нульового степеня відносно $\varepsilon$, одержимо

$$f\left(t, Z_0(t,\widehat{C}_0) + Y(t,\varepsilon)\right) = f(t,Z_0) + \mathbf{L}_0[Y] + f_1(t,Y), \tag{28}$$

де $\mathbf{L}_0[Y]$ — лінійна частина, $f_1(t,Y)$ — нелінійна частина функції $f$, причому $f_1(t,0) = 0$.

Складемо операторну систему, еквівалентну рівнянню (27) на множині матричних функцій

$$Y = Y(t,\varepsilon):\ Y(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{[0,\omega]},\ Y(t,\cdot) \in C_{[0,\varepsilon_0]},\ Y(t,0) = 0,\ Y(0,\varepsilon) = Y(\omega,\varepsilon)\,.$$

Застосовуючи до рівняння (27), в якому функція $\varepsilon f(t, Z_0 + Y)$ формально розглядається як неоднорідність, теорему 2, у відповідності з (14), (15) дістанемо

$$Y = \widetilde{\mathbf{K}}_0^t[X_0 C_0] + Y^{(1)}(t,\varepsilon)\,, \tag{29}$$

$$\widetilde{R}\mathbf{T}\left[\widetilde{A}\int\limits_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0\left[\mathbf{L}_0\left[\widetilde{\mathbf{K}}_0^\tau[X_0 C_0] + Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)\right] + f_1(\tau,Y)\right]\,d\tau\right] = 0\,, \tag{30}$$

$$Y^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\mathbf{G}\ \left[f(\tau,Z_0) + \mathbf{L}_0[Y] + f_1(\tau,Y)\right]\ . \tag{31}$$

Враховуючи, що

$$X_0 C_0 = X_0\cdot(c\,\otimes\,E_n) = \sum_{k=1}^{n_0} c_k X_k, \quad c = \operatorname{col}\left(c_1(\varepsilon),\ldots,c_{n_0}(\varepsilon)\right)\,,$$

$c_k = c_k(\varepsilon)$ — скаляри, $c_k(0) = 0$, рівняння (30) запишемо у вигляді лінійної алгебраїчної системи відносно вектора $c$:

$$H_0\,c = q\,, \tag{32}$$

де $H_0 = (h_1,\ldots,h_{n_0})$ — $(mn\times n_0)$-вимірна матриця,

$$h_k = \widetilde{R}\mathbf{T}\left[\widetilde{A}\int\limits_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0\left[\mathbf{L}_0\left[\widetilde{\mathbf{K}}_0^\tau[X_k]\right]\right]\,d\tau\right] \in C^{mn}\,, \qquad k = 1,\ldots,n_0,$$

$$q = -\widetilde{R}\mathbf{T}\left[\widetilde{A}\int\limits_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0\left[\mathbf{L}_0[Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)] + f_1(\tau,Y)\right]\,d\tau\right] \in C^{mn}\,.$$

Рівняння (32) розв'язне тоді і тільки тоді, коли виконується умова $P_{H_0^*}q = 0$, де $P_{H_0^*}$ — матриця-ортопроектор: $C^{mn} \to N(H_0^*)$. Враховуючи структуру вектора $q$, можна зробити висновок про те, що у випадку $P_{H_0^*}\widetilde{R} = 0$ умова розв'язності рівняння (32) завжди виконується. Припустимо, що

$$P_{H_0^*}\widetilde{R} = 0, \qquad P_{H_0} = 0\ , \tag{33}$$

де $P_{H_0}$ — матриця-ортопроектор: $C^{mn} \to N(H_0)$. При виконанні умови (33) рівняння (32) однозначно розв'язне відносно $c$ [5] і операторна система (29) – (31) еквівалентна системі

$$Y = \widetilde{\mathbf{K}}_0^t[X_0 C_0] + Y^{(1)}(t,\varepsilon)\ , \tag{34}$$

$$C_0 = (H_0^+ q) \otimes E_n\ , \tag{35}$$

$$Y^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{G}\ [f(\tau, Z_0) + \mathbf{L}_0[Y] + f_1(\tau, Y)]\ , \tag{36}$$

де $H_0^+$ — $(n_0 \times mn)$-вимірна матриця, псевдообернена до $H_0$.

Нехай $C^{(1,0)}_{m\times n}(t,\varepsilon)$ — лінійний нормований простір неперервно диференційовних по $t$ на $[0,\omega]$ і неперервних по $\varepsilon$ на $[0,\varepsilon_0]$ $(m\times n)$-вимірних матриць $Y(t,\varepsilon)$ таких, що $Y(t,0) = 0$, $Y(0,\varepsilon) = Y(\omega,\varepsilon)$, $C_{n_0 n\times n}(\varepsilon)$ — лінійний нормований простір неперервних по $\varepsilon$ на $[0,\varepsilon_0]$ $(nn_0 \times n)$-вимірних матриць $C_0 = C_0(\varepsilon)$ таких, що $C_0(0) = 0$.

Увівши до розгляду $((nn_0 + 2m)\times n)$-вимірну матрицю

$$W = W(t,\varepsilon) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{col}\,\Big(Y(t,\varepsilon), C_0, Y^{(1)}(t,\varepsilon)\Big) \in \Lambda\ ,$$

де

$$\Lambda = C^{(1,0)}_{m\times n}(t,\varepsilon) \times C_{nn_0\times n}(\varepsilon) \times C^{(1,0)}_{m\times n}(t,\varepsilon)\ ,$$

операторну систему (34) – (36) запишемо у вигляді

$$W = \mathbf{L}^{(1)}[W] + \mathbf{L}^{(2)}\left[\widetilde{F}(W,t,\varepsilon)\right]\ . \tag{37}$$

Тут $\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)}$ — лінійні обмежені блочно-матричні оператори:

$$\mathbf{L}^{(1)}[\,\cdot\,] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{K}}_0^t[X_0\cdot\,] & \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_1[\,\cdot\,] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\ , \tag{38}$$

$$\mathbf{L}^{(2)}[\,\cdot\,] = \mathrm{diag}\,(\mathbf{0}, \mathbf{L}_2[\,\cdot\,], \mathbf{G}[\,\cdot\,])\ , \tag{39}$$

$$\mathbf{L}_1[\,\cdot\,] = -\left(H_0^+\widetilde{R}\mathbf{T}\left[\widetilde{A}\int\limits_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0\,[\mathbf{L}_0[\,\cdot\,]]\ d\tau\right]\right) \otimes E_n\ , \tag{40}$$

$$\mathbf{L}_2[\,\cdot\,] = \Big(H_0^+\widetilde{R}\mathbf{T}\,[\,\cdot\,]\Big) \otimes E_n\ , \tag{41}$$

$$\widetilde{F}(W,t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(0, -\widetilde{A}\int\limits_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0[f_1(\tau,Y)]\,d\tau,\ \varepsilon\Big(f(t,Z_0)+\right.$$
$$\left. +\mathbf{L}[Y] + f_1(t,Y)\Big)\right).$$

Внаслідок верхньотрикутної форми (38) блочно-матричного оператора $\mathbf{L}^{(1)}$ існує [7] лінійний обмежений обернений оператор $(\mathbf{I}-\mathbf{L}^{(1)})^{-1}$, де $\mathbf{I}$ — тотожний оператор: $\Lambda \to \Lambda$. Тому систему (37) можна записати у вигляді

$$W = \widetilde{\widetilde{W}} + \widetilde{\mathbf{L}}\left[\widetilde{F}_1(W,t,\varepsilon)\right], \tag{42}$$

де

$$\widetilde{\widetilde{W}} = \widetilde{\mathbf{L}}\left[\operatorname{col}(0,0,\varepsilon f(t,Z_0))\right],$$

$$\widetilde{F}_1(W,t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(0, -\widetilde{A}\int\limits_0^\omega \mathbf{K}_\tau^0[f_1(\tau,Y)]\,d\tau, \varepsilon\Big(\mathbf{L}_0[Y] + f_1(t,Y)\Big)\right),$$

$\widetilde{\mathbf{L}} = (\mathbf{I}-\mathbf{L}^{(1)})^{-1}\mathbf{L}^{(2)}$ — лінійний обмежений оператор $\Lambda \to \Lambda$.

Для розв'язання операторної системи (42) можна застосувати метод простих ітерацій [5, с. 189]. Збіжність методу, а також необхідні оцінки похибок наближень можна встановити з допомогою мажорант Ляпунова [7, с. 228]. Отже, справедливе таке твердження.

**Теорема 5 (*достатня умова*).***Нехай виконується умова (13) і породжуюче рівняння (1)* $(\varepsilon = 0)$ *має* $n_0$*-параметричну сім'ю* $\omega$*-періодичних розв'язків (15). Тоді для кожного розв'язку* $\widehat{C}_0 = \widehat{c} \otimes E_n$ $(\widehat{c} \in C^{n_0})$ *рівняння для породжуючих амплітуд (22) при виконанні умови (33) матричне рівняння (1) має єдиний* $\omega$*-періодичний розв'язок* $Z(t,\varepsilon)$ *(26), який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в розв'язок* $Z_0(t,\widehat{C}_0)$ *породжуючого рівняння. Цей розв'язок можна знайти з допомогою ітераційного процесу*

$$W_{k+1} = \widetilde{\widetilde{W}} + \widetilde{\mathbf{L}}\left[\widetilde{F}_1(W_k,t,\varepsilon)\right], \qquad k = 0,1,\ldots; \quad W_0 = 0,$$

*збіжного при достатньо малих* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{**}]$.


1. *Reid W.T.* Riccati differential equations. — New York, 1972. — 124 p.
2. *Jodar L., Navarro E.* Analytic solution of Riccati equations occuring in open-loop Nash multiplayer differential games // Int. J. Math.@Math. Sci. — 1992. — **15**, № 2. — P. 359 – 366.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
4. *Бойчук О.А., Кривошея С.А.* Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 8. — С. 1022 – 1027.
5. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи // Пр. Ін-ту математики НАН України. — 1995. — Т. 13. — 320 с.
6. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
7. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.


*Одержано 20.01.99*