т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.919

ПРО ГЛАДКІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНИХ КВАЗІПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛАГРАНЖЕВИХ СИСТЕМ НА РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ НЕДОДАТНОЇ КРИВИНИ

С.Ф. Захарін, І.О. Парасюк

Нац. ун-т ім. Т. Шевченка,
Україна, 252033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail : yurol@carrier.kiev.ua;
pio@mechmat.univ.kiev.ua

Under assumption that, Lagrangian system with quasiperiodic force function, on Riemannian manifold, has generalized Besicowitch quasiperiodic solution the differential properties of corresponding function on a torus are studied. We establish conditions under which the variational method allows to find classical quasiperiodic solutions to the Lagrangian systems.

У припущенні, що лагранжева система з квазіперіодичною за часом силовою функцією, яка розглядається на рімановому многовиді, має узагальнений квазіперіодичний за Безіковичем розв'язок, вивчено диференціальні властивості функції на торі, яка йому відповідає. Встановлено умови, при виконанні яких варіаційний метод дозволяє знаходити класичні квазіперіодичні розв'язки лагранжевих систем зазначеного типу.

1. Вступ. Нехай $i : M \to E^n$ — гладке ізометричне вкладення k-вимірного повного зв'язного ріманова многовиду M у евклідів простір $(E^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Домовимося ототожнювати, використовуючи при цьому однакові позначення, M та $i(M)$, а також вектори $\xi \in TM$ та $i_*\xi \in E^n$.

Розглянемо на M натуральну лагранжеву систему з кінетичною енергією $T = \|\dot{x}\|^2/2$ та квазіперіодичною силовою функцією $W(\omega t, x)$, де $W : T^m \times E^n \to \mathbf{R}$ — гладке відображення, T^m — m-вимірний тор з кутовими координатами $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)| \bmod 2\pi$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ — вектор з раціонально незалежними компонентами.

Застосування варіаційного методу до задачі про квазіперіодичні розв'язки лагранжевої системи $(M; T + W)$ [1 – 9] полягає у відшуканні функції $x = u(\omega t)$ такої, що $u(\varphi)$ реалізує (локальний) мінімум функціонала

$$J(u) = \int\limits_{T^m} \frac{1}{2} \|D_\omega u(\varphi)\|^2 + W(\varphi, u(\varphi)) d\varphi \tag{1}$$

у класі двічі неперервно диференційовних функцій $u(\cdot) : T^m \to M$. (Тут $D_\omega u$ — похідна за напрямком ω.) В роботі [9] встановлено умови існування функції $u^*(\varphi)$, яка реалізує мінімум функціонала $J(u)$ в класі функцій, що набувають значень у деякій обмеженій області $Q \subset M$ і належать простору $H^1_\omega(T^m; E^n)$. Останній утворюють інтегровні з квадратом норми функції $u(\varphi)$, які мають узагальнені в сенсі Соболєва похідні $D_\omega u(\varphi)$ за напрямком ω. Функція $u^*(\varphi)$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{T^m} \langle D_\omega u(\varphi), D_\omega h(\varphi)\rangle + \langle W'(\varphi, u(\varphi)), h(\varphi)\rangle d\varphi = 0, \tag{2}$$

де $W'(\varphi, x)$ позначає градієнт функції $W(\varphi, \cdot) : M \to \mathbf{R}$, $h(\varphi)$ — довільна істотно обмежена функція з $H^1_\omega(T^m; E^n)$ з властивістю $h(\varphi) \in T_{u(\varphi)}M$. У цій ситуації природно називати квазіперіодичну функцію Безіковича $u^*(\varphi)$ узагальненим розв'язком лагранжевої системи $(M; T + W)$ [10, 11].

У даній роботі знайдено умови, при виконанні яких $u^*(\varphi)$ є гладкою функцією, а отже, $u^*(\omega t)$ є класичним розв'язком. Техніка дослідження спирається на запропонований у п. 2 апарат узагальненого коваріантного диференціювання вздовж вимірних відображень з тора T^m у многовид M. У п. 3 наведено основний результат про гладкість функції, що задовольняє рівність (2). Він базується на твердженнях п. 4, які стосуються істотної обмеженості та збіжності послідовності векторних полів вздовж $u^*(\varphi)$, що задовольняють певні варіаційні рівності.

2. Елементи узагальненого коваріантного диференціювання. Нехай $H(T^m; E^n)$ — простір інтегровних з квадратом евклідової норми відображень $u(\cdot) : T^m \to E^n$, $\|\cdot\|_0$ — напівнорма, породжена у ньому скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_0 = (2\pi)^{-m} \int\limits_{T^m} \langle\cdot,\cdot\rangle d\varphi$, $\hat{H}(T^m; E^n)$ — підмножина істотно обмежених елементів у $H(T^m; E^n)$. Простір $H^1_\omega(T^m; E^n)$ охарактеризований у вступі.

Розглянемо деяку обмежену область $Q \subset M$ і для відображення $u(\cdot) : T^m \to Q$, $u(\varphi) \in \in H^1_\omega(T^m; E^n)$, введемо простори „векторних полів" вздовж u:

$$\begin{aligned}
TH[u] &= \{v \in H(T^m; E^n) : v(\varphi) \in T_{u(\varphi)}M \quad \forall\, \varphi \in T^m\}, \\
T\hat{H}[u] &= TH[u] \cap \hat{H}(T^m; E^n), \\
\mathcal{T}^1_\omega[u] &= T\hat{H}[u] \cap H^1_\omega(T^m; E^n), \quad \mathcal{T}^1[u] = \bigcup_{\omega \in \mathbf{R}^m} \mathcal{T}^1_\omega[u].
\end{aligned}$$

Для кожного $x \in M$ визначимо оператор ортогонального проектування $\pi_x : E^n \to T_xM$. Як відомо [12], для дотичного до M векторного поля X та дотичного вектора $\xi \in T_xM$ коваріантна похідна зв'язності Леві – Чівіта може бути зображена у вигляді $\nabla_\xi X = \pi_x(X_*\xi)$. Якщо $f : \mathbf{R}^m \to M$ — гладке відображення, $\omega \in \mathbf{R}^m$ — фіксований вектор, то за означенням $\nabla_\omega(X \circ f) := \pi_f(D_\omega(X \circ f)) = (\nabla_{f_*\omega}) \circ f$. Ця рівність дає підстави для такого означення.

Означення 1. *Узагальненою коваріантною похідною поля* $v(\varphi) \in TH[u] \cap H^1_\omega(T^m; E^n)$ *називається поле* $\nabla_\omega v(\varphi) = \pi_{u(\varphi)} D_\omega v(\varphi)$.

Як відомо, для $v(\varphi) \in H^1_\omega(T^m; E^n)$ виконується рівність $\lim\limits_{s\to 0} \|[v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s - -D_\omega v(\varphi)\|_0 = 0$. Тому природно дати такі означення.

Означення 2. *Якщо для поля* $v(\varphi) \in TH[u]$ *існує поле* $w(\varphi) \in TH[u]$ *таке, що*

$$\lim_{s\to 0} \|\pi_{u(\varphi)}[v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s - w(\varphi)\|_0 = 0,$$

то $w(\varphi)$ *називається сильною коваріантною похідною поля* $v(\varphi)$ *за напрямком* ω *і позначається* $\nabla_\omega v(\varphi)$.

Означення 3. *Якщо для $v(\varphi) \in TH[u]$ існує $w(\varphi) \in TH[u]$ таке, що $\langle v(\varphi), \nabla_\omega h(\varphi)\rangle_0 = -\langle w(\varphi), h(\varphi)\rangle_0$ при всіх $h \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$, то $w(\varphi)$ назвемо слабкою коваріантною похідною поля $v(\varphi)$ за напрямком ω і позначатимемо її через $\tilde{\nabla}_\omega v(\varphi)$.*

Простір $\mathcal{T}^1_\omega[u]$ природно вибирати в якості множини основних функцій з огляду на означення узагальненого розв'язку.

Оскільки $\langle v(\varphi), \nabla_\omega h(\varphi)\rangle_0 = \langle v(\varphi), D_\omega h(\varphi)\rangle_0 = -\langle D_\omega v(\varphi), h(\varphi)\rangle_0 = -\langle \nabla_\omega v(\varphi), h(\varphi)\rangle_0$ для $v, h \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$, то для полів класу $\mathcal{T}^1_\omega[u]$ означення 1 і 3 еквівалентні.

(Апріорі, однак, невідомо, чи виконується в загальному випадку рівність $\langle \tilde{\nabla}_\omega v, w\rangle_0 = -\langle v, \tilde{\nabla}_\omega w\rangle_0$ у просторі $T\tilde{H}^1_\omega[u]$, утвореному тими $v \in TH[u]$, що мають слабкі похідні $\tilde{\nabla}_\omega v$.)

Очевидно, що $\tilde{\nabla}_\omega v$ характеризується рівністю

$$\lim_{s\to 0}\langle [v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s, h(\varphi)\rangle_0 = \langle \tilde{\nabla}_\omega v, h\rangle_0 \quad \forall\, h \in \mathcal{T}^1_\omega[u]. \tag{3}$$

Твердження 1. *Простір $\mathcal{T}^1_\omega[u]$ складається з тих $v \in T\hat{H}[u]$, для яких*

$$\liminf_{s\to 0}\left\|\pi_{u(\varphi)}\left[\frac{v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)}{s}\right]\right\|_0 < \infty. \tag{4}$$

Доведення. Відомо, що $v(\varphi) \in H^1_\omega(T^m; E^n)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\liminf_{s\to 0}\|[v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s\|_0 < \infty$$

(див., наприклад, [9]). Тому для $v \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$ умова (4) виконується. Навпаки, нехай $\operatorname{essup}_{T^m}\|v(\varphi)\| \le K < \infty$ і виконується (4). Для області Q можна знайти сталу $K_1 > 0$ таку, що для довільного $\eta \in E^n$ справджується нерівність

$$\|(\pi_x - \pi_y)\eta\| \le K_1\|x - y\|\|\eta\|, \quad x, y \in Q. \tag{5}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\|[v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s\|_0 &= \left\|[\pi_{u(\varphi+s\omega)}v(\varphi + s\omega) - \pi_{u(\varphi)}v(\varphi)]/s\right\|_0 \le \\ &\le \left\|s^{-1}[\pi_{u(\varphi+s\omega)} - \pi_{u(\varphi)}]v(\varphi + s\omega)\right\|_0 + \left\|\pi_{u(\varphi)}[v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s\right\|_0 \le \\ &\le KK_1\,\|[u(\varphi + s\omega) - u(\varphi)]/s\|_0 + \left\|\pi_{u(\varphi)}[v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s\right\|_0,\end{aligned}$$

і зрозуміло, що наслідком (4) є $v \in H^1_\omega(T^m; E^n)$.

Твердження 2. *Якщо $v(\varphi) \in TH[u]$ і виконується (4), то $\tilde{\nabla}_\omega v$ існує.*

Доведення. З обмеженої послідовності в $H(T^m; E^n)$ можна вибрати слабко збіжну підпослідовність. Тому існує послідовність $\{s_k\}, k = 1, 2, \ldots,$ і поле $w_1(\varphi) \in H(T^m; E^n)$ такі, що $\lim\limits_{k\to\infty}\langle [v(\varphi + s_k\omega) - v(\varphi)]/s_k, h(\varphi)\rangle_0 = \langle w_1(\varphi), h(\varphi)\rangle_0 = \langle \pi_{u(\varphi)}w_1(\varphi), h(\varphi)\rangle_0$ для всіх $h \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$. Покажемо, що $\tilde{\nabla}_\omega v(\varphi) = \pi_{u(\varphi)}w_1(\varphi) := w(\varphi)$. Дійсно, оскільки $\|[h(\varphi + s\omega) - h(\varphi)]/s - D_\omega h(\varphi)\|_0 \to 0,\ s \to 0$, то $\langle w, h\rangle_0 = \lim\limits_{k\to\infty}\langle v(\varphi), [h(\varphi - s_k\omega) - h(\varphi)]/s_k\rangle_0 = -\langle v, D_\omega h\rangle_0 = -\langle v, \nabla_\omega h\rangle_0$.

Твердження 3. *Простір $\mathcal{T}^1_\omega[u]$ утворюють поля класу $T\hat{H}[u]$, для яких існують слабкі коваріантні похідні.*

Доведення. Нехай для $v \in T\hat{H}[u]$ існує $\tilde{\nabla}_\omega v := w$. Покажемо, що тоді існує $D_\omega v \in H(T^m; E^n)$. Для цього потрібно вказати таку функцію $w_1 \in H(T^m; E^n)$, що $\langle [v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s, f(\varphi)\rangle_0 \to \langle w_1(\varphi), f(\varphi)\rangle$, $s \to 0$, для всіх $f \in C^\infty(T^m; E^n)$. Зауважимо, що з (5) випливає нерівність $\|s^{-1}(\pi_{u(\varphi+s\omega)} - \pi_{u(\varphi)})\eta\| \leq K_1\|s^{-1}\|u(\varphi + s\omega) - u(\varphi)\|\|\eta\|$ для всіх $\varphi \in T^m$, $\eta \in T_{u(\varphi)}M$. Тому відображення $\varphi \to \pi_{u(\varphi)}$ належить класу $H^1_\omega(T^m; \mathrm{Hom}(E^n; E^n))$ і з урахуванням істотної обмеженості $v(\varphi)$ маємо

$$\left\| \left[[\pi_{u(\varphi+s\omega)} - \pi_{u(\varphi)}/s - D_\omega \pi_{u(\varphi)} \right] v(\varphi) \right\|_0 \to 0, s \to 0.$$

Оскільки $\pi_{u(\varphi)} f(\varphi) \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$ і $\|f(\varphi + s\omega) - f(\varphi)\| \to 0, s \to 0$, рівномірно щодо $\varphi \in T^m$, то

$$\begin{aligned}
&\langle [v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s, f(\varphi)\rangle_0 = \\
&\quad = \langle [\pi_{u(\varphi+s\omega)} v(\varphi + s\omega) - \pi_{u(\varphi)} v(\varphi)]/s, f(\varphi)\rangle_0 = \\
&\quad = \langle s^{-1}(\pi_{u(\varphi+s\omega)} - \pi_{u(\varphi)}) v(\varphi + s\omega), f(\varphi)\rangle_0 + \\
&\quad + \langle [\pi_{u(\varphi)} v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s, \pi_{u(\varphi)} f(\varphi)\rangle_0 = \\
&\quad = \langle s^{-1}(\pi_{u(\varphi)} - \pi_{u(\varphi-s\omega)}) v(\varphi), f(\varphi)\rangle_0 + \\
&\quad + \langle s^{-1}(\pi_{u(\varphi)} - \pi_{u(\varphi-s\omega)}) v(\varphi), f(\varphi - s\omega) - f(\varphi)\rangle_0 + \\
&\quad + \langle [\pi_{u(\varphi)} v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)]/s, \pi_{u(\varphi)} f(\varphi)\rangle_0 \to \\
&\quad \to \langle (D_\omega \pi_{u(\varphi)}) v(\varphi) + \tilde{\nabla}_\omega v(\varphi), f(\varphi)\rangle_0, \quad s \to 0,
\end{aligned}$$

і існування $w_1(\varphi)$ доведене.

Зауваження 1. Якщо $TM|_Q$ тривіалізується, і, отже, існує базис векторних полів $\{X_i(x)\}_{i=1}^k$ в Q, то коефіцієнти $v^i(\varphi)$ векторного поля $v(\varphi) = v^i(\varphi) X_i(u(\varphi))$ класу $\mathcal{T}^1_\omega[u]$ належать $H^1_\omega(T^m; \mathbf{R}) \cap \hat{H}(T^m; \mathbf{R})$ і справедлива стандартна формула

$$\nabla_\omega v(\varphi) = (D_\omega v^i(\varphi) + \Gamma^i_{jl}(u(\varphi))(D_\omega u(\varphi))^j v^l(\varphi)) X_i(u(\varphi)),$$

де $\Gamma^i_{jl}(x)$ — символи Кристоффеля, $(D_\omega u(\varphi))^j$ — коефіцієнти розкладу $D_\omega u(\varphi)$ за базисом $\{X_i(u(\varphi))\}_{i=1}^k$. Існування $D_\omega v^i$ випливає з рівності $v^i(\varphi) = \langle v(\varphi), Y_i(u(\varphi))\rangle$, де $\{Y_i(x)\}$ — базис, дуальний до вихідного.

Тепер охарактеризуємо узагальнену коваріантну похідну в термінах паралельного переносу. Якщо б $u(\varphi)$ було гладким, то $\nabla_\omega v$ можна було б визначати за допомогою паралельного переносу вздовж гладкої кривої $u(\varphi + s\omega)$, $s \in \mathbf{R}$. Ми маємо справу з вимірними відображеннями, і ця обставина потребує дещо іншої конструкції. З огляду на припущення про повноту многовиду M будь-які дві точки $x, y \in Q$ можна з'єднати геодезичною $\Gamma(x, y)$, довжина якої реалізує відстань $\rho(x, y)$ від x до y.

Нехай відображення $t \to g(t; x, y)$ визначає геодезичну $\Gamma(x, y)$, параметризовану натуральним параметром t, причому $g(0; x, y) = x$. Позначимо через $\tau^t(x, y)$ оператор паралельного перенесення з x в $g(t; x, y)$ вздовж $\Gamma(x, y)$. Цей оператор характеризується рівністю

$$\nabla_{\dot{t}} \tau^t(x, y)\eta = \pi_{g(t;x,y)} \frac{d}{dt} \tau^t(x, y)\eta = 0 \quad \forall\, \eta \in T_x M.$$

Тут і далі $\dot{t}$ позначає орт прямої $\mathbf{R}$, прикладений в точці t.

Існує стала $C = C(Q) > 0$ така, що для довільних $\eta \in T_x M$, $x, y \in Q$ виконуються оцінки

$$\rho(x,y) \leq C\|x-y\|, \quad \|\tau^t(x,y)\eta - \eta\| \leq Ct\|\eta\|,$$

$$\|\pi_x \tau^t(x,y)\eta - \eta\| = \|\pi_x \tau^t(x,y)\eta - \eta - t\nabla_t|_{t=0}\tau^t(x,y)\eta\| \leq Ct^2\|\eta\|.$$

Поклавши $\tau(x,y) = \tau^{\rho(x,y)}(x,y)$, одержимо

$$\|\tau(x,y)\eta - \eta\| \leq C^2\|x-y\|\,\|\eta\|, \tag{6}$$

$$\|\pi_x \tau(x,y)\eta - \eta\| \leq C^3\|x-y\|^2\|\eta\|. \tag{7}$$

Покладемо $\tau_s[u](\varphi) := \tau(u(\varphi+s\omega), u(\varphi))$ і покажемо, що існує стала $C_1 = C_1(Q)$ така, що для всіх $v(\varphi) \in TH[u]$ виконується нерівність

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\tau_s[u](\varphi)v(\varphi+s\omega) - v(\varphi)}{s} - \frac{\pi_{u(\varphi)}(v(\varphi+s\omega) - v(\varphi))}{s} \right\| \leq \\
&\qquad \leq C_1 \frac{\|u(\varphi+s\omega) - u(\varphi)\|^2}{s}\|v(\varphi+s\omega)\|.
\end{aligned} \tag{8}$$

Дійсно, з урахуванням (5) – (7) маємо

$$\begin{aligned}
&\|\tau_s[u](\varphi)v(\varphi+s\omega) - \pi_{u(\varphi)}v(\varphi+s\omega)\| = \\
&\qquad = \|\pi_{u(\varphi)}(\tau_s[u](\varphi)v(\varphi+s\omega) - v(\varphi+s\omega))\| \leq \\
&\qquad \leq \|\pi_{u(\varphi+s\omega)}\tau_s[u](\varphi)v(\varphi+s\omega) - v(\varphi+s\omega)\| + \\
&\qquad + \|(\pi_{u(\varphi+s\omega)} - \pi_{u(\varphi)})(\tau_s[u](\varphi)v(\varphi+s\omega) - v(\varphi+s\omega))\| \leq \\
&\qquad \leq (C^3 + K_1C^2)\|u(\varphi+s\omega) - u(\varphi)\|^2\|v(\varphi+s\omega)\|,
\end{aligned}$$

що і доводить (8).

Твердження 4. *Поле $v \in TH[u]$ має слабку коваріантну похідну $w(\varphi)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{s\to 0}\left\langle \frac{\tau_s[u](\varphi)v(\varphi+s\omega) - v(\varphi)}{s}, h(\varphi) \right\rangle_0 = \langle w, h\rangle_0 \quad \forall\, h \in \mathcal{T}^1_\omega[u].$$

Доведення. Нехай $h \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$ і $K > 0$ — така стала, що $\|h(\varphi)\| \leq K$ і $\|u(\varphi)\| \leq K, \varphi \in$ $\in T^m$. Тоді з урахуванням (8) маємо

$$\begin{aligned}
&\left| \left\langle \frac{\tau_s[u](\varphi)v(\varphi+s\omega) - v(\varphi)}{s} - \frac{v(\varphi+s\omega) - v(\varphi)}{s}, h(\varphi) \right\rangle_0 \right| \leq \\
&\qquad \leq K(2\pi^{-m}) \int\limits_{T^m} \left\| \frac{\tau_s[u](\varphi)v(\varphi+s\omega) - v(\varphi)}{s} - \frac{\pi_{u(\varphi)}(v(\varphi+s\omega) - v(\varphi))}{s} \right\| d\varphi \leq \\
&\qquad \leq KC_1(2\pi^{-m}) \int\limits_{T^m} \frac{\|u(\varphi+s\omega) - u(\varphi)\|^2}{s}\|v(\varphi+s\omega)\| d\varphi \leq \\
&\qquad \leq C_2 \left\| \frac{u(\varphi+s\omega) - u(\varphi)}{s} \right\|_0 \|\|u(\varphi - s\omega) - u(\varphi)\|\|v(\varphi)\|\|_0 \to 0, \quad s \to 0.
\end{aligned}$$

Тут враховано, що $\|u(\varphi - s\omega) - u(\varphi)\|^2 \leq 4K^2, \varphi \in T^m$, а $\|u(\varphi - s\omega) - u(\varphi)\| \to 0, s \to 0$, за мірою.

З доведення твердження 4 випливає таке твердження.

Твердження 5. *Якщо $v(\varphi) \in TH[u]$ має сильну коваріантну похідну $\nabla_\omega v(\varphi)$, то*

$$\frac{\tau_s[u](\varphi)v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)}{s} \to \nabla_\omega v(\varphi), \quad s \to 0,$$

в середньому.

Відзначимо також, що

$$\limsup_{s\to 0} \left\| \frac{\tau_s[u](\varphi)v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)}{s} - \frac{\pi_{u(\varphi)}v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)}{s} \right\|_0 < \infty \tag{9}$$

для всіх $v(\varphi) \in T\hat{H}[u]$. Дійсно, якщо $K > 0$ — така стала, що $\|u(\varphi)\| \leq K$, $\|u(\varphi)\| \leq K, \varphi \in \in T^m$, то

$$\limsup_{s\to 0} \int\limits_{T^m} \frac{\|u(\varphi + s\omega) - u(\varphi)\|^4}{s^2} \|v(\varphi + s\omega)\|^2 d\varphi \leq 4K^4 \|D_\omega u\|_0^2,$$

і (9) тепер легко одержати з (8).

Твердження 6. *Простір $\mathcal{T}_\omega^1[u]$ утворюють поля $v(\varphi) \in T\hat{H}[u]$, для яких*

$$\liminf_{s\to 0} \left\| \frac{\tau_s[u](\varphi)v(\varphi + s\omega) - v(\varphi)}{s} \right\|_0 < \infty. \tag{10}$$

Доведення. Якщо $v(\varphi) \in \mathcal{T}_\omega^1[u]$, то виконується (4), а тоді, внаслідок (9), справджується й (10). Навпаки, якщо $v(\varphi) \in T\hat{H}[u]$ — поле, що задовольняє (10), то внаслідок (9) виконується (4).

У подальшому важливу роль відіграватиме оператор $P_r : E^n \to E^n$, який визначається за формулою

$$P_r\eta = \begin{cases} \eta, \text{ якщо } \|\eta\| \leq r; \\ r\eta/\|\eta\|, \text{ якщо } \|\eta\| > r. \end{cases}$$

Це оператор проектування на кулю радіуса r. Неважко показати, що $\|P_r\eta - P_r\zeta\| \leq \|\eta - \zeta\|$, а оскільки оператор паралельного переносу ортогональний, то $P_r\tau^t(x,y)\eta = \tau^t(x,y)P_r\eta$ для всіх $\eta \in T_xM$. Користуючись цими властивостями, доведемо таке твердження.

Твердження 7. *Якщо $v(\varphi) \in \mathcal{T}_\omega^1[u]$, то і $P_rv(\varphi) \in \mathcal{T}_\omega^1[u]$, причому $\|\nabla_\omega P_r v(\varphi)\| \leq \leq \|\nabla_\omega v(\varphi)\|$ майже скрізь на T^m.*

Доведення. З твердження 6 і властивостей P_r одержуємо

$$\begin{aligned} &\|s^{-1}(\tau_s[u](\varphi)P_rv(\varphi + s\omega) - P_rv(\varphi))\| = \\ &\quad = \|s^{-1}(P_r\tau_s[u](\varphi)v(\varphi + s\omega) - P_rv(\varphi))\| \leq \\ &\quad \leq \|s^{-1}(\tau_s[u](\varphi)v(\varphi + s\omega) - v(\varphi))\|, \end{aligned}$$

звідки

$$\liminf_{s\to 0} \|s^{-1}(\tau_s[u](\varphi) P_r v(\varphi+s\omega) - P_r v(\varphi))\|_0 \le$$

$$\le \liminf_{s\to 0} \|s^{-1}(\tau_s[u](\varphi) v(\varphi+s\omega) - v(\varphi))\|_0 < \infty.$$

Отже, $P_r v(\varphi) \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$ внаслідок твердження 6. Тоді з твердження 5 випливає, що існує послідовність $\{s_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $s_k \to 0, k \to \infty$ така, що $s_k^{-1}(\mathcal{T} s_k[u] w(\varphi + s_k\omega) - w(\varphi))$ збігається до $\nabla_\omega w(\varphi)$ майже скрізь на T^m, як при $w = v(\varphi)$, так і при $w = P_r v(\varphi)$. А тоді майже скрізь на T^m виконується нерівність $\|\nabla_\omega P_r v(\varphi)\| \le \|\nabla_\omega v(\varphi)\|$.

Означення 4. *Відображення $u(\cdot) : T^m \to Q$ назвемо ліпшіцевим вздовж $\omega \in \mathbf{R}^m$, якщо існує стала $L > 0$ така, що*

$$\rho(u(\varphi), u(\varphi+s\omega)) \le L|s| \quad \forall\, s \in \mathbf{R}.$$

Зрозуміло, що для зазначеного відображення існує $D_\omega u \in T\hat{H}[u]$.

За допомогою геодезичної $g(t, x, y)$ визначимо вектор

$$\xi := \dot{g}(0; x, y)\rho(x, y) \in T_x M. \tag{11}$$

Очевидно, що $\|\xi(x, y)\| = \rho(x, y)$.

Твердження 8. *Якщо $u(\cdot) : T^m \to Q$ — ліпшіцеве за напрямком ω, то*

$$\lim_{s\to 0} \|\xi(u(\varphi), u(\varphi+s\omega))/s - D_\omega u(\varphi)\|_0 = 0.$$

Доведення. Неважко показати, що для обмеженої області Q існує стала $C = C(Q) > 0$ така, що $\|x-y-\dot{g}(0, x, y)\rho(x, y)\| \le C\rho^2(x, y)$. Але тоді $\|(u(\varphi+s\omega)-u(\varphi))/s - \xi(u(\varphi), u(\varphi+ +s\omega))/s\| \le CL^2 s \to 0, s \to 0$, і тепер досить врахувати, що $\|(u(\varphi + s\omega) - u(\varphi))/s - -D_\omega u(\varphi)\|_0 \to 0, s \to 0$.

Твердження 9. *Нехай j — натуральне і для довільних векторів $\nu_1, \ldots, \nu_j \in \mathbf{R}^m$ існують $\nabla_{\nu_1} \ldots \nabla_{\nu_{j-1}} D_{\nu_j} u(\varphi) \in T\hat{H}[u]$, причому*

$$\lim_{s\to 0} \left\| \nabla_{\nu_1} \ldots \nabla_{\nu_{j-1}} \frac{\xi(u(\varphi), u(\varphi+s\nu_j))}{s} - \nabla_{\nu_1} \ldots \nabla_{\nu_{j-1}} D_{\nu_j} u(\varphi) \right\|_0 = 0.$$

Припустимо, що існує $w(\varphi) \in TH[u]$ така, що

$$\lim_{s\to 0} \left\| \nabla_{\nu_1} \ldots \nabla_{\nu_j} \frac{\xi(u(\varphi), u(\varphi+s\nu_{j+1}))}{s} - w(\varphi) \right\|_0 = 0,$$

де $\nu_{j+1} \in \mathbf{R}^m$. Тоді $w(\varphi) = \nabla_{\nu_1} \ldots \nabla_{\nu_j} D_{\nu_{j+1}} u(\varphi)$.

Доведення. Для довільного $h \in \mathcal{T}^1_{\nu_1}[u]$ маємо, з одного боку,

$$\left\langle \nabla_{\nu_1} \ldots \nabla_{\nu_j} \frac{\xi(u(\varphi), u(\varphi+s\nu_{j+1}))}{s}, h \right\rangle_0 \to \langle w, h\rangle_0, \quad s \to 0,$$

а з іншого —

$$\left\langle \nabla_{\nu_1} \dots \nabla_{\nu_j} \frac{\xi(u(\varphi), u(\varphi + s\nu_{j+1}))}{s}, h \right\rangle_0 =$$
$$= - \left\langle \nabla_{\nu_2} \dots \nabla_{\nu_j} \frac{\xi(u(\varphi), u(\varphi + s\nu_{j+1}))}{s}, \nabla_{\nu_1} h \right\rangle_0 \to$$
$$\to - \left\langle \nabla_{\nu_2} \dots \nabla_{\nu_j} D_{\nu_{j+1}} u, \nabla_{\nu_1} h \right\rangle_0, \quad s \to 0.$$

Залишилось скористатися твердженням 3.

3. Теорема про гладкість. Далі будемо припускати, що в області Q відображення

$$\xi : Q \times Q \to TM,$$

визначене в (11), є гладким. Достатні умови існування і гладкості відображення ξ можна одержати на основі теореми з [12, с. 152] та теореми Морса – Шенберга з цієї ж роботи.

Для цього слід зауважити, що $\exp(x, \xi(x, y)) = y$, де $\exp(x, \cdot) : T_x M \to M$ — експоненціальне відображення в точці x.

Гладке відображення $\chi : [0, 1] \times Q \times Q \to M$, визначене рівністю

$$\chi(t, x, y) := \exp(x, t\xi(x, y)) \equiv g(t\rho(x, y); x, y),$$

будемо називати відображенням зв'язування в Q. Оператор паралельного перенесення з точки x вздовж χ за час t позначимо через $\theta^t(x, y)$.

Теорема. *Нехай лагранжева система $(M; T + W)$ має узагальнений розв'язок $x(t) = u(\omega t)$, де $u(\cdot) : T^m \to Q$ — відображення класу $H^1_\omega(T^m; E^n)$. Припустимо, що виконані такі умови:*

1) $\mathrm{cls}(u(T^m)) \subset Q$;

2) тензор зв'язності Леві – Чівіта R задовольняє нерівність $\langle R(\eta, \zeta)\zeta, \eta \rangle \leq 0$ для довільних $\eta, \zeta \in T_x M, x \in Q$;

3) існує $\gamma > 0$ таке, що $\langle \nabla_\eta W'(\varphi, x), \eta \rangle \geq \gamma \|\eta\|^2$ для всіх $\varphi \in T^m$, $x \in Q$, $\eta \in T_x Q$.

Тоді для будь-якого натурального j та будь-якого набору векторів $\nu_1, \dots, \nu_j \in \mathbf{R}^m$ існує $\nabla_{\nu_1} \dots \nabla_{\nu_{j-1}} D_{\nu_j} u(\varphi) \in T\hat{H}[u]$. Якщо додатково припустити, що Q дифеоморфна області в $\mathbf{R}^k$, то $u(\varphi) \in C^\infty(T^m; E^n)$ і $x(t) = u(\omega t)$ — класичний розв'язок лагранжевої системи

$$\nabla_t \dot{x} = W'(\omega t, x).$$

Доведення. Покажемо, що $u(\varphi)$ — ліпшіцеве за довільним напрямком $\nu \in \mathbf{R}^m$. Умову (2) подамо у вигляді

$$\langle D_\omega u, \nabla_\omega h \rangle_0 + \langle W', h \rangle_0 = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{T}^1_\omega[u]. \tag{12}$$

Звідси, позначивши $\chi^t(\varphi) = \chi(t, u(\varphi), u(\varphi + s\nu))$, $\theta^t(\varphi) = \theta^t(u(\varphi), u(\varphi + s\nu))$, одержимо

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\langle D_\omega \chi^t, \nabla_\omega \theta^t h \rangle_0 + \langle W'(\varphi + ts\nu, \chi^t(\varphi)), \theta^t h(\varphi) \rangle_0 \right] dt = 0. \tag{13}$$

Спираючись на означення 1 і структурні рівняння Картана [12, с. 65], неважко одержати такі рівності:

$$\nabla_{\dot{t}} D_\omega \chi^t = \nabla_\omega \dot{\chi}^t \qquad \nabla_{\dot{t}} \nabla_\omega \theta^t h = \nabla_\omega \nabla_{\dot{t}} \theta^t h + R(\dot{\chi}^t, D_\omega \chi^t)\theta^t h.$$

Крім того, за означенням геодезичної $\dot{\chi}^t = \theta^t \dot{\chi}^0 = \theta^t \xi$ і $\nabla_{\dot{t}} \theta^t \eta = 0$. Отже, (13) можна переписати у вигляді

$$\int_0^1 [\langle \nabla_\omega \theta^t \xi, \nabla_\omega \theta^t h \rangle_0 + \langle \nabla_{\theta^t \xi} W'(\varphi + ts\nu, \chi^t) - R(\theta^t \xi, D_\omega \chi^t) D_\omega \chi^t, \theta^t h \rangle_0 +$$
$$+ s \langle D_\nu W'(\varphi + st\nu, x)\big|_{x=\chi^t}, \theta^t h \rangle_0] dt = 0.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на s і поклавши $v_s = \xi/s$, $\nabla_{\theta^t v_s} W'(\varphi + ts\nu, \chi^t) - R(\theta^t v_s, D_\omega \chi^t) D_\omega \chi^t = A_s(t, \varphi)\theta^t v_s$, $D_\nu W'(\varphi + st\nu, x)\big|_{x=\chi^t} = a_s(t, \varphi)$, можемо скористатись твердженням 10 (при $\xi/s = v^0$, $A = A_s$, $a = a_s$) і твердженням 11 з п. 4. З них випливає нерівність

$$\|\xi(u(\varphi), u(\varphi + s\nu))/s\| \le L, \tag{14}$$

включення $D_\nu u(\varphi) \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$ (твердження 8) і рівність

$$\langle \nabla_\omega D_\nu u, \nabla_\omega h \rangle_0 + \langle B(\varphi, u(\varphi)) D_\nu u, h \rangle_0 + \langle b(\varphi, u(\varphi); \nu), h \rangle_0 = 0 \tag{15}$$

для всіх $h \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$, де $B(\varphi, x)\eta = \nabla_\eta W'(\varphi, x) - R(\eta, D_\omega u) D_\omega u$, $b(\varphi, x; \nu) = D_\nu W'(\varphi, x)$.

Перейдемо до аналізу похідних $D_\lambda u$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$. Скористаємось рівністю

$$\nabla_\omega \theta^t \xi = \theta^t \nabla_\omega \xi + \theta^t \int_0^t \theta^{-\tau} R(\theta^\tau \xi, D_\omega \chi^\tau) \theta^\tau \xi d\tau. \tag{16}$$

Її правильність випливає з того, що при $t = 0$ вона виконується, а коваріантні похідні $\nabla_{\dot{t}}$ обох її частин рівні при $t \in [0, 1]$.

Замінимо в (15) ν на λ. Тоді наслідком (15) є рівність

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} [\langle \nabla_\omega D_\lambda \chi^t, \nabla_\omega \theta^t h \rangle_0 + \langle B(\varphi + ts\nu, \chi^t(\varphi)) D_\lambda \chi^t, \theta^t h \rangle_0 +$$
$$+ \langle b(\varphi + ts\nu, \chi^t; \lambda), \theta^t h \rangle_0] dt = 0, \tag{17}$$

де χ^t та θ^t, як і раніше, залежать від ν. З огляду на (16), похідну першого доданка подамо у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\langle \nabla_{\dot t}\nabla_\omega D_\lambda \chi^t, \nabla_\omega^t h\rangle_0 + \langle \nabla_\omega D_\lambda\chi^t, \nabla_{\dot t}\nabla_\omega \theta^t h\rangle_0 = \\
&\quad = \langle \nabla_\omega \nabla_\lambda \theta^t \xi + R(\theta^t\xi, D_\omega\chi^t)D_\lambda\chi^t, \nabla_\omega\theta^t h\rangle_0 + \\
&\quad + \langle \nabla_\omega D_\lambda\chi^t, R(\theta^t\xi, D_\omega\chi^t)\theta^t h\rangle_0 = \langle \nabla_\omega \theta^t \nabla_\lambda \xi, \nabla_\omega\theta^t h\rangle_0 + \\
&\quad + \Big\langle \nabla_\omega \Big[\theta^t \int_0^t \theta^{-\tau} R(\theta^\tau\xi, D_\lambda\chi^\tau)\theta^\tau\xi d\tau\Big], \nabla_\omega \theta^t h\Big\rangle_0 - \\
&\quad - \langle \nabla_\omega [R(\theta^t\xi, D_\omega\chi^t)D_\lambda\chi^t] + R(\theta^t\xi, D_\omega\chi^t)\nabla_\omega D_\lambda\chi^t, \theta^t h\rangle_0. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

При обчисленні похідних за змінною t другого і третього доданків слід врахувати рівності

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{\dot t}[B(\varphi + ts\nu, \chi^t(\varphi))D_\lambda\chi^t(\varphi)] = B(\varphi+ts\nu, \chi^t(\varphi))\nabla_\lambda\theta^t\xi + \\
&\quad + [\nabla_{\dot t} B(\varphi+ts\nu, \chi^t(\varphi))]\nabla_\lambda\chi^t(\varphi) = B(\varphi+ts\nu, \chi^t(\varphi))\theta^t\nabla_\lambda\xi + \\
&\quad + B(\varphi+ts\nu, \chi^t(\varphi))\theta^t \int_0^t \theta^{-\tau}R(\theta^\tau\xi, D_\lambda\chi^\tau)\theta^\tau\xi d\tau + \\
&\quad + [\nabla_{\dot t} B(\varphi+ts\nu, \chi^t(\varphi))]D_\lambda\chi^t(\varphi) = B(\varphi+ts\nu, \chi^t(\varphi))\theta^t\nabla_\lambda\xi + \\
&\quad + s\beta_1(s,t,\varphi), \nabla_{\dot t} b(\varphi+ts\nu, \chi^t; \lambda) = s\beta_2(s,t,\varphi),
\end{aligned}
$$

де $\beta_i,\ i=1,2,$ — поля, що мають властивість $\sup_{[0,1]\times\mathbf{R}} \operatorname{essup}_{T^m}\|\beta_i(s,t,\varphi)\| < \infty, \quad i = 1,2.$

Спочатку розглянемо випадок, коли $\lambda = \omega$. Зауважимо, що оскільки $D_\omega u \in T\hat{H}[u]$, то з (12) і твердження 3 випливає, що $\nabla_\omega D_\omega u = W'(\varphi, u) \in \mathcal{T}_\omega^1[u]$. Тепер неважко встановити, що $\nabla_\omega^j D_\omega u \in \mathcal{T}_\omega^1[u]$, $j = 1, 2, \ldots$. Тоді похідна першого доданка в (17) з урахуванням (18) набирає вигляду

$$
\begin{aligned}
&\langle \nabla_\omega\theta^t\nabla_\omega\xi, \nabla_\omega\theta^t h\rangle_0 - \Big\langle \nabla_\omega^2\Big[\theta^t\int_0^t \theta^{-\tau}R(\theta^\tau\xi, D_\omega\chi^\tau)\theta^\tau\xi d\tau\Big], \theta^t h\rangle_0 - \\
&\quad - \langle\nabla_\omega[R(\theta^t\xi, D_\omega\chi^t)D_\omega\chi^t] + R(\theta^t\xi, D_\omega\chi^t)\nabla_\omega D_\omega\chi^t, \theta^t h\rangle_0.
\end{aligned}
$$

У цьому виразі, з огляду на (16) і (14) можемо записати

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\omega^2[\theta^t\int_0^t \theta^{-\tau}R(\theta^\tau\xi, D_\omega\chi^\tau)\theta^\tau\xi d\tau] = \\
&\quad = 2\theta^t\int_0^t \theta^{-\tau}R(\theta^\tau\nabla_\omega\xi, D_\omega\chi^\tau)\theta^\tau\nabla_\omega\xi d\tau + s\beta_3(t,s,\varphi) = \\
&\quad = \theta^t F(t,s,\varphi)\theta^t\nabla_\omega\xi + s\beta_3(t,s,\varphi)
\end{aligned}
$$

і

$$
\nabla_\omega[R(\theta^t\xi, D_\omega\chi^t)D_\omega\chi^t] = R(\theta^t\nabla_\omega\xi, D_\omega\chi^t)D_\omega\chi^t + s\beta_4(t,s,\varphi),
$$

де $F(t,s,\varphi)\theta^t\eta := 2\int\limits_0^t \theta^{-\tau}R(\theta^\tau\nabla_\omega\xi, D_\omega\chi^\tau)\theta^\tau\eta d\tau$, а β_3, β_4 обмежені в тому ж сенсі, що й β_1, β_2. Остаточно (17) при $\lambda=\omega$ можна подати у вигляді рівності

$$\int\limits_0^1 \langle\nabla_\omega\theta^t\nabla_\omega\xi, \nabla_\omega\theta^t h\rangle_0 + \langle[B(\varphi+st\nu,\chi^t(\varphi)) - \theta^t F(t,s,\varphi)]\theta^t\nabla_\omega\xi -$$

$$-R(\theta^t\nabla_\omega\xi, D_\omega\chi^t)D_\omega\chi^t, \theta^t h\rangle_0 + s\langle\beta(t,s,\varphi),\theta^t h\rangle_0\, dt = 0,$$

у якій $\sup_{[0,1]\times\mathbf{R}}\operatorname{essup}_{T^m}\|\beta(t,s,\varphi)\|<\infty$. Поділимо обидві її частини на s і покладемо $v^0 = \nabla_\omega\xi/s$. Тоді, враховуючи рівність $\langle\theta^t F\theta^t\eta,\eta\rangle = 0$ (наслідок кососиметричності R) та умову недодатності кривини, можна знову застосувати твердження 10 і довести існування такої сталої $L>0$, що $\|\nabla_\omega\xi/s\| < L$ для всіх $s\in\mathbf{R}$ і майже всіх $\varphi\in T^m$. Застосування тверджень 11 і 9 дозволяє довести, що $\nabla_\omega\xi/s$ збігається в сенсі $\|\cdot\|_0$ до $\nabla_\omega D_\nu u \in T\hat{H}[u]$, причому виконується рівність

$$\langle\nabla_\omega\nabla_\omega D_\nu u, \nabla_\omega h\rangle_0 + \langle B(\varphi,u(\varphi))\nabla_\omega D_\nu u -$$

$$-R(\nabla_\omega D_\nu u, D_\omega u)D_\omega u, h\rangle_0 + \langle\beta_0(\varphi), h\rangle_0 = 0,$$

де $\beta_0(\varphi)=\beta(t,0,\varphi)$ не залежить від t. Звідси легко одержуємо $\nabla_\omega^j D_\nu u \in \mathcal{T}_\omega^1[u]$, $j=1,2,\ldots$.

Тепер можна розглянути (17) при $\lambda\neq\omega$. З урахуванням нерівності $\|\nabla_\omega\xi\|\le L|s|$ маємо

$$\nabla_\omega^2\theta^t\int\limits_0^t \theta^{-\tau}R(\theta^\tau\xi, D_\lambda\chi^\tau)\theta^\tau\xi d\tau + \nabla_\omega[R(\theta^t\xi, D_\omega\chi^t)D_\lambda\chi^t] +$$

$$+R(\theta^t\xi, D_\omega\chi^t)\nabla_\omega D_\lambda\chi^t = s\beta_5(t,s,\varphi),$$

де β_5 обмежене в тому ж сенсі, що й β_1. Тому, провівши стосовно $\nabla_\lambda\xi$ ті ж міркування, що й вище при аналізі $\nabla_\omega\xi$, застосувавши твердження 9 – 11, встановлюємо існування $L>0$ такого, що $\|\nabla_\lambda\xi/s\|\le L$ для всіх $s\in\mathbf{R}$ і майже всіх $\varphi\in T^m$, а також збіжність $\nabla_\lambda\xi/s \to \nabla_\lambda D_\nu u$, $s\to 0$, в сенсі $\|\cdot\|_0$.

Викладена техніка дозволяє послідовно встановити існування всіх вищих коваріантних узагальнених похідних. Усі вони належать класу $T\hat{H}[u]$.

Якщо Q дифеоморфна області в $\mathbf{R}^k$ з координатами $(y^1,\ldots,y^k)$, то в цих координатах $u(\varphi) = (u^1(\varphi),\ldots,u^k(\varphi))$ і $D_\nu u(\varphi) = D_\nu u^i(\varphi)\dfrac{\partial}{\partial y^i}$. Враховуючи зауваження до твердження 3, можна за індукцією довести існування будь-яких похідних $D_{\nu_1}\ldots D_{\nu_j}u^i(\varphi)$, $i=1,\ldots,k$. Після цього для встановлення гладкості $u(\varphi)$ залишається застосувати теорему вкладення.

4. Про обмежені розв'язки деяких варіаційних рівностей. Нехай $z(\cdot) : T^m \to Q$ — деяке відображення класу $H_\omega^1(T^m;E^n)$. Покладемо $\theta^t(\varphi) = \theta^t(u(\varphi),z(\varphi))$, $\chi^t(\varphi) = \chi(t,u(\varphi),z(\varphi))$.

Твердження 10. *Нехай $a(\cdot,\cdot) : [0,1]\times T^m \to E^n$ та $A(\cdot,\cdot) : [0,1]\times T^m \to \operatorname{Hom}(E^n;E^n)$ — інтегровні відображення, причому при деякому $\gamma>0$ виконується нерівність*

$$\langle A(t,\varphi)\eta,\eta\rangle \ge \gamma\|\eta\|^2 \quad \forall\,\eta\in T_{\chi^t(\varphi)}M, \varphi\in T^m, t\in[0,1],$$

а функція $\|a(t,\varphi)\|$ *істотно обмежена на* $[0,1]\times T^m$. *Припустимо також, що існує поле* $v^0(\varphi)\in\mathcal{T}^1_\omega[u]$ *таке, що*

$$\int\limits_0^1 \langle\nabla_\omega\theta^t v^0, \nabla_\omega\theta^t h\rangle_0 + \langle A(t,\varphi)\theta^t v^0, \theta^t h\rangle_0 + \langle a(t,\varphi), \theta^t h\rangle_0 dt = 0 \tag{19}$$

для всіх $h\in\mathcal{T}^1_\omega[u]$. *Тоді*

$$\mathrm{essup}_{T^m}\|v^0(\varphi)\| \le 2\gamma^{-1}\mathrm{essup}_{[0,1]\times T^m}\|a(t,\varphi)\| := 2\alpha/\gamma.$$

Доведення. Введемо до розгляду функціонал

$$\Phi(v) = \int\limits_0^1 \|\nabla_\omega\theta^t v\|_0^2 + \langle A(t,\varphi)\theta^t v, \theta^t v\rangle_0 + 2\langle a(t,\varphi), \theta^t v\rangle_0 dt,$$

визначений на полях з $\mathcal{T}^1_\omega[u]$, і для $r>0$ покладемо $V_r = \{\varphi\in T^m : \|v^0(\varphi)\| > r\}$. Міркуючи від супротивного, припустимо, що $\mathrm{mes}\, V_r > 0$ для деякого $r > 2\alpha/\gamma$. Розглянемо поле $v^* = P_r v^0(\varphi)$. З властивостей оператора P_r (див. п. 2) і твердження 7 випливає нерівність

$$\|\nabla_\omega\theta^t(\varphi)v^*(\varphi)\| = \|\nabla_\omega P_r\theta^t(\varphi)v^0(\varphi)\| \le \|\nabla_\omega\theta^t(\varphi)v^0(\varphi)\|, \tag{20}$$

яка виконується для всіх $t\in[0,1]$ і майже всіх $\varphi\in T^m$. Очевидно, що $v^*(\varphi) = v^0(\varphi)$, $\varphi\in T^m\backslash V_r$, а оскільки $\|\theta^t v^*\| = \|v^*\|$, $\|v^*(\varphi)\| = r$ при $\varphi\in V_r$ і

$$\int\limits_0^1\int\limits_{V_r} \langle A(t,\varphi)\theta^t(\varphi)v^*(\varphi), \theta^t v^*(\varphi)\rangle + 2\langle a(t,\varphi), \theta^t(\varphi)v^*(\varphi)\rangle d\varphi dt \ge$$
$$\ge [\gamma r^2 - 2\alpha r]\mathrm{mes}\, V_r > 0,$$

то

$$\int\limits_0^1\int\limits_{V_r} \langle A(t,\varphi)\theta^t(\varphi)v^0(\varphi), \theta^t v^0(\varphi)\rangle + 2\langle a(t,\varphi), \theta^t(\varphi)v^0(\varphi)\rangle d\varphi dt =$$
$$= \int\limits_0^1\int\limits_{V_r} \frac{\|v^0(\varphi)\|^2}{r^2}(\langle A(t,\varphi)\theta^t(\varphi)v^*(\varphi), \theta^t v^*(\varphi)\rangle +$$
$$+2\frac{\|v^0(\varphi)\|}{r}\langle a(t,\varphi), \theta^t(\varphi)v^*(\varphi)\rangle) d\varphi dt >$$
$$> \int\limits_0^1\int\limits_{V_r} \langle A(t,\varphi)\theta^t(\varphi)v^*(\varphi), \theta^t v^*(\varphi)\rangle + 2\langle a(t,\varphi), \theta^t(\varphi)v^*(\varphi)\rangle d\varphi dt,$$

а отже, $\Phi(v^*) < \Phi(v^0)$.

З іншого боку, використавши рівність

$$\langle A(t,\varphi)\theta^t(\varphi)v^0(\varphi), \theta^t(\varphi)v^*(\varphi)\rangle = \langle A(t,\varphi)\theta^t(\varphi)v^*(\varphi), \theta^t(\varphi)v^0(\varphi)\rangle,$$

яка виконується з урахуванням означення v^* без додаткової вимоги симетричності $A(t,\varphi)$, одержуємо

$$\Phi(v^*) = \Phi(v^0 + (v^* - v^0)) = \Phi(v^0) + \Phi(v^* - v^0) -$$
$$-2\int_0^1 \langle a, \theta^t(v^* - v^0)\rangle_0 dt \geq \Phi(v^0).$$

Маємо суперечність.

Нехай $\nu \in \mathbf{R}^m$. Покладемо $\theta^t_s(\varphi) = \theta^t(u(\varphi), u(\varphi + s\nu))$, $\chi^t_s(\varphi) = \chi(t, u(\varphi), u(\varphi + s\nu))$. Доведемо твердження про граничний перехід для розв'язків сім'ї варіаційних рівностей.

Твердження 11. *Нехай* $u(\cdot) : T^m \to Q$ *— ліпшицеве відображення, а* $a(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{R} \times [0,1] \times T^m \to E^n$ *і* $A(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{R} \times [0,1] \times T^m \to \mathrm{Hom}(E^n, E^n)$ *— такі неперервні відображення, що:*

1) $a_0(\varphi) := a(0,t,\varphi)$ *та* $A_0(\varphi) := A(0,t,\varphi)$ *не залежать від* t*;*

2) $A_0(\varphi)\big|_{T_{u(\varphi)}M}$ *— симетричне;*

3) існують сталі $\alpha, \gamma > 0$ *такі, що*

$$\|a(s,t,\varphi)\| \leq \alpha, \quad \langle A(s,t,\varphi)\eta, \eta\rangle \geq \gamma\|\eta\|^2$$

для всіх $\eta \in T_{\chi^t_s(\varphi)}M$, $(s,t,\varphi) \in \mathbf{R} \times [0,1] \times T^m$.

Покладемо $a_s(t,\varphi) = a(s,t,\varphi)$, $A_s(t,\varphi) = A(s,t,\varphi)$ *і припустимо, що для довільного* $s \neq 0$ *існує поле* $v_s \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$, *для якого*

$$\int_0^1 \langle \nabla_\omega \theta^t_s v_s, \nabla_\omega \theta^t_s h\rangle_0 + \langle A_s \theta^t_s v_s, \theta^t_s h\rangle_0 + \langle a_s, \theta^t_s h\rangle_0 \, dt = 0 \tag{21}$$

для всіх $h \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$.

Тоді існує $v_* \in \mathcal{T}^1_\omega[u]$ *таке, що*

$$\|v_s - v_*\|_0 + \|\nabla_\omega(v_s - v_*)\|_0 \to 0, \quad s \to 0,$$

і

$$\langle \nabla_\omega v_*, \nabla_\omega h\rangle_0 + \langle A_0 v_*, h\rangle_0 + \langle a_0, h\rangle_0 = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{T}^1_\omega[u].$$

Доведення. Розглянемо функціонал $\Phi_0(v) = \|\nabla_\omega v\|^2_0 + \langle A_0 v, v\rangle_0 + 2\langle a_0, h\rangle_0$ на $\mathcal{T}^1_\omega[u]$. Якщо $r = 2\alpha/\gamma$, то, як випливає з попередньої теореми, $\Phi(P_r v) \leq \Phi(v)$. Тому мінімізаційну послідовність $v_j(\varphi)$ для $\Phi_0(v)$ можна вибрати так, щоб $\mathrm{essup}_{T^m}\|v_j(\varphi)\| \leq r$ і $\|\nabla_\omega v_j\|_0$ була обмеженою. Зауважимо, що поповнення простору $\mathcal{T}^1_\omega[u]$ за напівнормою $\|\nabla_\omega \cdot\|_0 + \|\cdot\|_0$ має властивість Банаха – Сакса. Тому, враховуючи опуклість $\Phi_0(v)$, можна вважати, що мінімізаційна послідовність збігається в сенсі зазначеної напівнорми до елемента $v_* \in$

$\in \mathcal{T}^1_\omega[u]$, який реалізує мінімум $\Phi_0(v)$. Цей мінімум єдиний в сенсі $\|\cdot\|_0$ і задовольняє рівність

$$\langle \nabla_\omega v_*, \nabla h\rangle_0 + \langle A_0 v_*, h\rangle_0 + \langle a_0, h\rangle_0 = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{T}^1_\omega. \tag{22}$$

Далі, з попередньої теореми випливає, що $\operatorname{essup}_{[0,1]\times T^m}\|v_s\| \le r$, а з (15) маємо рівність

$$\nabla_\omega \theta^t_s v_s = \theta^t_s \nabla_\omega v_s + \theta^t_s \int\limits_0^1 \theta^{-\tau}_s R(\theta^\tau_s \xi_s, D_\omega \chi^\tau_s)\theta^\tau_s v_s d\tau,$$

де $\xi_s = \xi(u(\varphi), u(\varphi + s\nu)) \to 0$, $s \to 0$, рівномірно щодо $\varphi \in T^m$.

Тепер, поклавши в (21) $h = v_s - v_*$, маємо рівність

$$\langle \nabla_\omega v_s, \nabla_\omega(v_s - v_*)\rangle_0 + \langle A_0(\varphi)v_s, v_s - v_*\rangle_0 + \langle a_0(\varphi), v_s - v_*\rangle_0 + \sigma(s) = 0,$$

де $\sigma(s) \to 0$, $s \to 0$. Віднявши від неї почленно рівність (22) при $h = v_s - v_*$, з урахуванням умови 3 одержимо

$$\|\nabla_\omega(v_s - v_*)\|_0 + \gamma\|v_s - v_*\|_0 \to 0, \quad s \to 0.$$

1. *Blot J.* Calculus of variations in mean and convex lagrangians // J. Math. Anal. and Appl. — 1988. — **134**, № 2. — P. 312 – 321.
2. *Blot J.* Almost periodically forced pendulum // Funkc. ekvacioj. — 1993. — **36**. — P. 235 – 250.
3. *Berger M.S., Zhang L.* A new method for large quasiperiodic nonlinear oscillations with fixed frequencies for the nondissipative second order conservative systems // Communications Appl. Nonlinear Anal. — 1995. — **2**, № 2. — P. 79 – 106.
4. *Berger M.S., Zhang L.* A new method for large quasiperiodic nonlinear oscillations with fixed frequencies for the nondissipative second order conservative systems of second type // Ibid. — 1996. — **3**, № 1. — P. 25 – 49.
5. *Belley J.-M., Fournier G., Hayes J.* Existence of almost periodic weak solutions for the conservative foced pendulum equation // J. Different. Equat. — 1996. — **124**, № 1. — P. 205 – 224.
6. *Захарін С.Ф., Парасюк І.О.* Вимушені коливання маятника та їх екстремальні властивості // Допов. НАН України. — 1998. — № 6. — С. 19 – 21.
7. *Захарін С.Ф., Парасюк І.О.* Узагальнені та класичні майже періодичні розв'язки лагранжевих систем, опуклих на компакті // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 12. — С. 1601 – 1608.
8. *Захарін С.Ф.* Дослідження квазіперіодичних розв'язків лагранжевих систем // Вісн. Київ. ун-ту. — 1998. — Вип. 1. — С. 12 – 15.
9. *Захарін С.Ф., Парасюк І.О.* Узагальнені квазіперіодичні розв'язки лагранжевих систем на ріманових многовидах недодатної кривини // Там же. — 1999. — Вип. 3. — С. 15 – 20.
10. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
11. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. — Киев.: Наук. думка, 1985. — 184 с.
12. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971. — 344 с.

Одержано 16.04.99