УДК 517.925.44

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. С. Владова

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Украина, 65000, Одесса, ул. Дворянская, 2

We find asymptotic representations for a certain class of solutions of cyclic nonlinear systems of ordinary differential equations. The systems we consider are of a more general type than Emden – Fowler systems.

Встановлено асимптотичні зображення для одного класу розв'язків циклічних нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь більш загального типу, ніж системи типу Емдена – Фаулера.

1. Постановка задачи и вспомогательные обозначения. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$y_i' = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}), \quad i = \overline{1,n}^1, \tag{1.1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1,n}$, $p_i : [a, \omega[\to]0, +\infty[$, $i = \overline{1,n}$, — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty^2$, $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \to]0; +\infty[$, $i = \overline{1,n}$, — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{y_i \to Y_i^0 \\ y_i \in \Delta(Y_i^0)}} \frac{y_i \varphi_i'(y_i)}{\varphi_i(y_i)} = \sigma_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \ne 1, \tag{1.2}$$

где Y_i^0, $i \in \{1, \ldots, n\}$, равно либо 0, либо $\pm\infty$, $\Delta(Y_i^0)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, — односторонняя окрестность Y_i^0.

В силу условий (1.2) функции φ_i, $i = \overline{1,n}$, являются правильно меняющимися при $y_i \to Y_i^0$ порядков σ_i и поэтому (см. [1]) представимы в виде

$$\varphi_i(y_i) = |y_i|^{\sigma_i} \theta_i(y_i), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.3}$$

где θ_i, $i = \overline{1,n}$, — медленно меняющиеся при $y_i \to Y_i^0$ функции. Согласно определению и свойствам медленно меняющихся функций, а также (1.2)

$$\lim_{y_i \to Y_i^0} \frac{\theta_i(\lambda y_i)}{\theta_i(y_i)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \qquad \lim_{y_i \to Y_i^0} \frac{y_i \theta_i'(y_i)}{\theta_i(y_i)} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

[1] Здесь и далее для всех функций и параметров с индексом $n+1$ будем полагать их взаимно однозначное соответствие с соответствующими величинами с индексом 1.

[2] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.

причем первые предельные соотношения выполняются равномерно по λ на любом отрезке $[c,d] \in]0,+\infty[$.

В случае, когда $\theta_i(y_i) \equiv 1$, $i = \overline{1,n}$, система (1.1) называется системой типа Эмдена – Фаулера. При $n = 2$ асимптотическое поведение неколеблющихся решений системы типа Эмдена – Фаулера детально исследовано в [2 – 6].

В настоящей работе (в отличие от [2 – 6]) система (1.1) исследуется в случае, когда функции $\varphi_i(y_i)$, $i = \overline{1,n}$, близки к степенным в окрестностях точек Y_i^0 в смысле определения правильно меняющихся функций.

Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1.1) называется $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решением, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ и удовлетворяет условиям

$$y_i(t) \in \Delta(Y_i^0) \text{ при } t \in [t_0,\omega[, \ \lim_{t\uparrow\omega} y_i(t) = Y_i^0, \ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t)y'_{i+1}(t)}{y'_i(t)y_{i+1}(t)} = \Lambda_i, \ i = \overline{1,n-1}. \quad (1.5)$$

Целью работы является установление необходимых и достаточных условий существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений системы дифференциальных уравнений (1.1), а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ формул для таких решений в случае, когда Λ_i, $i = \overline{1,n-1}$, — вещественные постоянные, среди которых имеются равные нулю.

Введем необходимые для дальнейшего вспомогательные обозначения.

Прежде всего, полагая

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Y_i^0 = +\infty, \\ & \text{либо} \quad Y_i^0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta(Y_i^0) - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если} \quad Y_i^0 = -\infty, \\ & \text{либо} \quad Y_i^0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta(Y_i^0) - \text{левая окрестность } 0, \end{cases}$$

замечаем, что числа μ_i, $i = \overline{1,n}$, определяют знаки компонент $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решения в некоторой левой окрестности ω.

Далее введем множества

$$\mathfrak{I} = \{i \in \{1,\ldots,n-1\} : 1 - \Lambda_i\sigma_{i+1} \neq 0\}, \quad \bar{\mathfrak{I}} = \{1,\ldots,n-1\} \setminus \mathfrak{I}$$

и будем считать, что $1 - \Lambda_{n-1}\sigma_n \neq 0$.

Учитывая, что $n-1 \in \mathfrak{I}$, вводим вспомогательные функции I_i, Q_i, $i = 1,\ldots,n$, и отличные от нуля постоянные β_i, $i = 1,\ldots,n$, полагая

$$I_i(t) = \begin{cases} \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau)I_{i+1}(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \\ \int\limits_{A_n}^{t} p_n(\tau)q_n(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad i = n, \end{cases} \qquad \beta_i = \begin{cases} 1 - \Lambda_i\sigma_{i+1} & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \beta_{i+1}\Lambda_i & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \\ 1 - \prod\limits_{k=1}^{n}\sigma_k & \text{при} \quad i = n, \end{cases}$$

$$Q_i(t) = \begin{cases} \alpha_i\beta_i I_i(t) & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I} \cup \{n\}, \\ \dfrac{\alpha_i\beta_i I_i(t)}{I_{i+1}(t)} & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \end{cases}$$

где каждый из пределов интегрирования $A_i \in \{\omega, a\}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $A_n \in \{\omega, b\}$, $b \in [a, \omega[$, выбран так, чтобы соответствующий ему интеграл I_i стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$,

$$q_n(t) = \theta_1\left(\mu_1|I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}}\right)|Q_{n-1}(t)|^{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sigma_k}\prod_{k=1}^{n-2}\left|Q_k(t)\theta_{k+1}\left(\mu_{k+1}|I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}}\right)\right|^{\prod\limits_{i=1}^{k}\sigma_i}.$$

Кроме того, введем числа

$$A_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A_i = a, \\ -1, & \text{если} \quad A_i = \omega, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad A_n^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A_n = b, \\ -1, & \text{если} \quad A_n = \omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

позволяющие определять знаки функций I_i, $i = 1, \ldots, n-1$, на промежутке $]a, \omega[$ и функции I_n на промежутке $]b, \omega[$, а также следующее определение.

Будем говорить, что функция φ_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяет условию $\mathbf{S}$, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $l : \Delta(Y_k^0) \longrightarrow]0, +\infty[$ такой, что

$$\lim_{\substack{z \to Y_k^0 \\ z \in \Delta(Y_k^0)}} \frac{z\, l'(z)}{l(z)} = 0,$$

функция θ_k допускает асимптотическое соотношение

$$\theta_k(zl(z)) = \theta_k(z)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad z \to Y_k^0 \quad (z \in \Delta(Y_k^0)). \tag{1.7}$$

Условию $\mathbf{S}$ заведомо удовлетворяют функция φ_k, для которой функция θ_k имеет конечный предел при $y_k \to Y_k^0$, а также функции вида

$$\varphi_k(y_k) = |y_k|^{\sigma_k}|\ln y_k|^{\gamma_1}, \quad \varphi_k(y_k) = |y_k|^{\sigma_k}|\ln y_k|^{\gamma_1}|\ln|\ln y_k||^{\gamma_2},$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, и другие.

Замечание 1.1. Если функция φ_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяет условию $\mathbf{S}$, а функция $y_k : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta(Y_k^0)$ непрерывно дифференцируемая и такая, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_k(t) = Y_k^0, \quad \frac{y_k'(t)}{y_k(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}[r + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности ω вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то

$$\theta_k(y_k(t)) = \theta_k\left(\mu_k|\xi(t)|^r\right)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

так как в данном случае

$$y_k(t) = z(t)l(z(t)), \quad z(t) = \mu_k|\xi(t)|^r,$$

и

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}} \frac{z\,l'(z)}{l(z)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{z(t)\,l'(z(t))}{l(z(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{z(t)\left(\frac{y_k(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\frac{y_k(t)}{z(t)}\right)z'(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\xi(t)y_k'(t)}{r\xi'(t)y_k(t)} - 1\right] = 0.$$

2. Основные результаты.

Теорема 2.1. *Пусть* $\Lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n-1}$, *среди них имеются равные нулю,* $\Lambda_{n-1} \in \mathfrak{I}$ *и* $m = \max\{i \in \mathfrak{I} : \Lambda_i = 0\}$. *Пусть, кроме того, функции* φ_k, $k = \overline{1, n-1}$, *удовлетворяют условию* $\mathbf{S}$. *Тогда для существования* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$*-решений системы дифференциальных уравнений (1.1) необходимо, а если алгебраическое уравнение*

$$(1+\lambda)\prod_{j=m+1}^{n-1}(M_j+\lambda) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\sigma_j}{\prod\limits_{j=1}^{n}\sigma_j - 1}\left(\sum_{k=m}^{n-1}\prod_{j=m+1}^{k}(M_j+\lambda)\prod_{s=k+2}^{n-1}M_s\right)\lambda, \tag{2.1}$$

где $M_j = \left(\prod_{i=j}^{n-1}\Lambda_i\right)^{-1}$, $j = \overline{m+1, n-1}$, *не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_i(t)I_{i+1}'(t)}{I_i'(t)I_{i+1}(t)} = \Lambda_i\frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{2.2}$$

и для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ *выполнялись знаковые условия*

$$A_i^*\beta_i > 0 \quad \textit{при} \quad Y_i^0 = \pm\infty, \qquad A_i^*\beta_i < 0 \quad \textit{при} \quad Y_i^0 = 0, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{sign}\,[\alpha_i A_i^*\beta_i] = \mu_i. \tag{2.4}$$

Более того, компоненты каждого такого решения допускают при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = Q_i(t)[1+o(1)], \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{2.5}$$

$$\frac{y_n(t)}{[\varphi_n(y_n(t))]^{\prod\limits_{i=1}^{n-1}\sigma_i}} = Q_n(t)[1+o(1)], \tag{2.6}$$

причем существует k-параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди чисел

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_i A_i^* & \textit{при} \quad i \in \Im \setminus \{m+1, \dots, n-1\}, \\ \beta_i A_i^* A_{i+1}^* & \textit{при} \quad i \in \bar{\Im} \setminus \{m+1, \dots, n-1\}, \\ A_n^* \left(\prod\limits_{j=1}^{n-1} \sigma_j - 1 \right) \operatorname{Re} \lambda_{i-m}^0 & \textit{при} \quad i \in \{m+1, \dots, n\}, \end{cases} \tag{2.7}$$

где λ_j^0, $j = \overline{1, n-m}$, — корни (с учетом кратных) алгебраического уравнения (2.1), имеется k положительных.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y_i : [t_0, \omega[\to \Delta(Y_i^0)$, $i = \overline{1, n}$, — произвольное $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решение системы дифференциальных уравнений (1.1). Тогда в силу (1.1)

$$\frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i p_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[. \tag{2.8}$$

При $i \in \Im$, интегрируя (2.8) на промежутке от B_i до t, где $B_i = \omega$, если $A_i = \omega$, и $B_i = t_0$, если $A_i = a$, получаем

$$\int\limits_{B_i}^{t} \frac{y_i'(\tau) d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))} = \alpha_i \, I_i(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.9}$$

В силу правила Лопиталя в форме Штольца

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}}{\int_{B_i}^{t} \frac{y_i'(\tau) d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))}} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} - \frac{y_i(t)\varphi_{i+1}'(y_{i+1}(t)) y_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+1}^2(y_{i+1}(t))}}{\frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}} =$$

$$= 1 - \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_{i+1}(t)\varphi_{i+1}'(y_{i+1}(t))}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} = 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1} = \beta_i \neq 0$$

и поэтому согласно (2.9) имеем

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i I_i(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.10}$$

Следовательно, при $i \in \Im$ имеет место асимптотическое представление (2.5) и в силу (2.8), (2.10)

$$\frac{y_i'(t)}{y_i(t)} = \frac{I_i'(t)}{\beta_i I_i(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.11}$$

Далее, учитывая, что $n-1 \in \mathfrak{I}$, последовательно, начиная с наибольшего $i \in \bar{\mathfrak{I}}$, рассматриваем соотношения (2.8) при $i \in \bar{\mathfrak{I}}$, считая, что при больших значениях i выполняется соотношения (2.11). Умножая (2.8) на $I_{i+1}(t)$ и интегрируя на промежутке от B_i до t, где B_i выбираются таким же образом, как и выше, получаем

$$\int\limits_{B_i}^{t} \frac{y_i'(\tau) I_{i+1}(\tau) d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))} = \alpha_i I_i(t)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.12}$$

В силу правила Лопиталя в форме Штольца с использованием (2.11) и определения $P_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решения находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y_i(t) I_{i+1}(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}}{\int_{A_i}^{t} \frac{y_i'(\tau) I_{i+1}(\tau) d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y_i'(t) I_{i+1}(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} + \frac{y_i(t) I_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} - \frac{y_i(t) I_{i+1}(t) \varphi_{i+1}'(y_{i+1}(t)) y_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+1}^2(y_{i+1}(t))}}{\frac{y_i'(t) I_{i+1}(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}} =$$

$$= 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t) I_{i+1}'(t)}{y_i'(t) I_{i+1}(t)} - \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_{i+1}(t) \varphi_{i+1}'(y_{i+1}(t))}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} = 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1} +$$

$$+ \beta_{i+1} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} = \beta_{i+1} \lim_{t\uparrow\omega} \left[\frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} \right] = \beta_{i+1} \Lambda_i = \beta_i.$$

Отсюда с учетом (2.12) следует, что

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_i(y_{i+1}(t))} = \frac{\alpha_i \beta_i I_i(t)}{I_{i+1}(t)} [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.13}$$

и поэтому в силу (2.8) выполняется асимптотическое соотношение (2.11). Значит, при всех $i \in \bar{\mathfrak{I}}$ имеют место асимптотические соотношения (2.5) и (2.11).

Поскольку при всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ функции φ_i удовлетворяют условию **S** и имеют место асимптотические соотношения (2.11), то согласно замечанию 1.1

$$\varphi_i(y_i(t)) = |y_i(t)|^{\sigma_i} \theta_i \left(\mu_i |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}} \right) [1+o(1)], \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Учитывая эти соотношения и установленные при $i = \overline{1, n-1}$ асимптотические соотношения (2.5), находим

$$\varphi_1(y_1(t)) = |y_1(t)|^{\sigma_1} \theta_1 \left(\mu_1 |I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}} \right) [1+o(1)] =$$

$$= \theta_1 \left(\mu_1 |I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}} \right) \left| |y_2(t)|^{\sigma_2} Q_1(t) \theta_2 \left(\mu_2 |I_2(t)|^{\frac{1}{\beta_2}} \right) \right|^{\sigma_1} [1+o(1)] =$$

$$= \theta_1 \left(\mu_1 |I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}} \right) \left| Q_1(t) \theta_2 \left(\mu_2 |I_2(t)|^{\frac{1}{\beta_2}} \right) \right|^{\sigma_1} \times$$

$$\times \left| |y_3(t)|^{\sigma_3} Q_2(t) \theta_3 \left(\mu_3 |I_3(t)|^{\frac{1}{\beta_3}} \right) \right|^{\sigma_1 \sigma_2} [1+o(1)] = \ldots$$

$$\ldots = q_n(t) \left[\varphi_n(y_n(t)) \right]^{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \sigma_i} [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу данного представления и последнего из соотношений (2.8)

$$\frac{y_n'(t)}{[\varphi_n(y_n(t))]^{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sigma_k}} = \alpha_n p_n(t) q_n(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.14}$$

Интегрируя (2.14) на промежутке от B_n до t, где $B_n = \omega$, если $A_n = \omega$, и $B_n = t_0$, если $A_n = b$, имеем

$$\int\limits_{B_n}^{t} \frac{y_n'(\tau)\,d\tau}{[\varphi_n(y_n(\tau))]^{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sigma_k}} = \alpha_n I_n(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда, учитывая, что согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y_n(t)}{[\varphi_n(y_n(t))]^{\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k}}}{\int_{B_n}^{t} \frac{y_n'(\tau)\,d\tau}{[\varphi_n(y_n(\tau))]^{\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k}}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y_n'(t)}{[\varphi_n(y_n(t))]^{\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k}}\left[1 - \left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sigma_k\right)\frac{y_n(t)\varphi_n'(y_n(t))}{\varphi_n(y_n(t))}\right]}{\frac{y_n'(t)}{[\varphi_n(y_n(t))]^{\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k}}} = 1 - \prod_{k=1}^{n}\sigma_k = \beta_n,$$

получаем асимптотическое соотношение

$$\frac{y_n(t)}{[\varphi_n(y_n(t))]^{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sigma_k}} = \alpha_n \beta_n I_n(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Значит, имеет место представление (2.6) и в силу (2.14) выполняется (2.11) при $i = n$.

Поскольку соотношения (2.11) справедливы при $i = \overline{1,n}$ и рассматриваемое решение удовлетворяет последнему предельному соотношению из определения $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решения, для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняются условия (2.2). Кроме того, из (2.11) следует, что $|y_i(t)| = |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}+o(1)}$, $i = \overline{1,n}$, при $t \uparrow \omega$, откуда с учетом условия $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y_i(t) = Y_i^0$ из определения $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решения и определения числа A_i^* вытекают знаковые условия (2.3).

Справедливость знаковых условий (2.4) непосредственно следует из (2.5), (2.6), если учесть знаки функций y_i и I_i, $i = \overline{1,n}$, на промежутке $[t_0, \omega[$.

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (2.2) – (2.4) и алгебраическое уравнение (2.1) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в этом случае система (1.1) имеет хотя бы одно $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решение, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.5), (2.6), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Рассматривая систему соотношений вида

$$\begin{aligned} &\frac{y_i}{\varphi_{i+1}(y_{i+1})} = Q_i(t)(1+v_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ &\frac{y_n}{[\varphi_n(y_n)]^{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sigma_k}} = Q_n(t)(1+v_n), \end{aligned} \tag{2.15}$$

устанавливаем, что она однозначно определяет заданные на множествах $D_i = [t_0, \omega[\times V_i$, где $t_0 \in [a, \omega[$ и $V_i = \{\bar{v}_i \equiv (v_i, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n-i+1} : |v_k| \le 1/2, k = \overline{i, n}\}$, непрерывно дифференцируемые неявные функции $y_i = Y_i(t, \bar{v}_i)$, $i = \overline{1, n}$, вида

$$Y_i(t, \bar{v}_i) = \mu_i |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}[1 + z_i(t, \bar{v}_i)]}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.16}$$

причем функции z_i, $i = \overline{1, n}$, таковы, что

$$|z_i(t, \bar{v}_i))| \le \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad (t, \bar{v}_i) \in D_i \quad \text{и} \quad \lim_{t \uparrow \omega} z_i(t, \bar{v}_i) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar{v}_i \in V_i.$$

Для этого, полагая в (2.15)

$$y_i = \mu_i |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1 + z_i)}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.17}$$

с учетом (1.3) получаем систему соотношений вида

$$\frac{|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)}}{|I_{i+1}(t)|^{\frac{\sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}}(1+z_{i+1})}} = \mu_i Q_i(t) \theta_{i+1} \left(\mu_{i+1} |I_{i+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i+1}}(1+z_{i+1})} \right) (1 + v_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$|I_n(t)|^{1+z_n} = \mu_n Q_n(t) \left[\theta_n \left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)} \right) \right]^{\prod_{k=1}^{n-1} \sigma_k} (1 + v_n),$$

определенную в силу знаковых условий (2.3), (2.4) при всех $|v_i| \le \dfrac{1}{2}$, $|z_i| \le \dfrac{1}{2}$, $i = \overline{1, n}$, и t из некоторой левой окрестности ω.

Отсюда, логарифмируя, находим

$$\begin{gathered} \frac{1}{\beta_i}(1 + z_i) \ln |I_i(t)| - \frac{\sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}}(1 + z_{i+1}) \ln |I_{i+1}(t)| = \\ = \ln |Q_i(t)| + \ln \theta_{i+1} \left(\mu_{i+1} |I_{i+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i+1}}(1+z_{i+1})} \right) + \ln |1 + v_i|, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ (1 + z_n) \ln |I_n(t)| = \ln |Q_n(t)| + \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sigma_k \right) \ln \theta_n \left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)} \right) + \ln |1 + v_n|. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Из последнего соотношения имеем

$$z_n = a_n(t) + b_n(t, v_n) + Z_n(t, z_n), \tag{2.19$_n$}$$

где

$$a_n(t) = -1 + \frac{\ln |Q_n(t)|}{\ln |I_n(t)|}, \quad b_n(t, v_n) = \frac{\ln |1 + v_n|}{\ln |I_n(t)|}, \quad Z_n(t, z_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sigma_k \right) \frac{\ln \theta_n \left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)} \right)}{\ln |I_n(t)|}.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\uparrow\omega} I_n(t)$ равен либо нулю, либо бесконечности, $Q_n(t) = \alpha_n\beta_n I_n(t)$ и θ_n — медленно меняющаяся функция при стремлении аргумента к Y_n^0, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_n(t) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} b_n(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad |v_n| \le \frac{1}{2}, \tag{2.20_n}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z_n(t, z_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad |z_n| \le \frac{1}{2}. \tag{2.21_n}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial Z_n(t, z_n)}{\partial z_n} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sigma_k\right) \frac{\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)} \theta_n'\left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}\right)}{\beta_n \theta_n\left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}\right)}$$

и поэтому в силу (1.4)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z_n(t, z_n)}{\partial z_n} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad |z_n| \le \frac{1}{2}. \tag{2.22_n}$$

Используя теперь предпоследнее из соотношений (2.18), с учетом (2.19_n) получаем

$$z_{n-1} = -1 + \frac{\beta_{n-1}\sigma_n}{\beta_n} \frac{\ln |I_n(t)|}{\ln |I_{n-1}(t)|} \left[1 + a_n(t) + b_n(t, v_n) + Z_n(t, z_n)\right] +$$

$$+ \frac{\beta_{n-1} \ln |Q_{n-1}(t)|}{\ln |I_{n-1}(t)|} + \frac{\beta_{n-1} \ln \theta_n\left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}\right)}{\ln |I_{n-1}(t)|} + \frac{\beta_{n-1} \ln |1 + v_{n-1}|}{\ln |I_{n-1}(t)|}.$$

Отсюда следует, что

$$z_{n-1} = a_{n-1}(t) + b_{n-1}(t, v_{n-1}, v_n) + Z_{n-1}(t, z_n), \tag{2.19_{n-1}}$$

где

$$a_{n-1}(t) = -1 + \frac{\beta_{n-1}\sigma_n}{\beta_n} \frac{\ln |I_n(t)|}{\ln |I_{n-1}(t)|} \left[1 + a_n(t)\right] + \frac{\beta_{n-1} \ln |Q_{n-1}(t)|}{\ln |I_{n-1}(t)|},$$

$$b_{n-1}(t, v_{n-1}, v_n) = \frac{\beta_{n-1}\sigma_n}{\beta_n} \frac{\ln |I_n(t)|}{\ln |I_{n-1}(t)|} b_n(t, v_n) + \frac{\beta_{n-1} \ln |1 + v_n|}{\ln |I_{n-1}(t)|},$$

$$Z_{n-1}(t, z_n) = \frac{\beta_{n-1}\sigma_n}{\beta_n} \frac{\ln |I_n(t)|}{\ln |I_{n-1}(t)|} Z_n(t, z_n) + \frac{\beta_{n-1} \ln \theta_n\left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}\right)}{\ln |I_{n-1}(t)|}.$$

Поскольку $\beta_{n-1} = 1 - \Lambda_{n-1}\sigma_n$, $Q_{n-1}(t) = \alpha_{n-1}\beta_{n-1}I_{n-1}(t)$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} I_{n-1}(t)$ равен либо нулю, либо бесконечности,

$$\frac{\partial\left(\ln \theta_n\left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}\right)\right)}{\partial z_n} = \frac{\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)} \theta_n'\left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}\right)}{\beta_n \theta_n\left(\mu_n |I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}\right)} \ln |I_n(t)|$$

и в силу правила Лопиталя и (2.2)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln|I_n(t)|}{\ln|I_{n-1}(t)|}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_{n-1}(t)I_n'(t)}{I_{n-1}'(t)I_n(t)}=\Lambda_{n-1}\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}},$$

с учетом (2.20_n), (2.21_n), (2.22_n) и (1.4) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}a_{n-1}(t)=0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}b_{n-1}(t,v_{n-1},v_n)=0\quad \text{равномерно по}\quad \bar v_{n-1}\in V_{n-1},\tag{2.20_{n-1}}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}Z_{n-1}(t,z_n)=0\quad \text{равномерно по}\quad |z_n|\le\frac{1}{2},\tag{2.21_{n-1}}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\partial Z_{n-1}(t,z_n)}{\partial z_n}=0\quad \text{равномерно по}\quad |z_n|\le\frac{1}{2}.\tag{2.22_{n-1}}$$

Далее, вводя наряду с V_i, $i=\overline{1,n}$, множества

$$W_i=\left\{\bar z_i\equiv(z_i,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^{n-i+1}:|z_k|\le\frac{1}{2},k=\overline{i,n}\right\},\quad i=\overline{2,n},$$

из (2.18) с использованием метода математической индукции, условий (2.2) – (2.4) и второго из свойств (1.4) медленно меняющихся функций устанавливаем, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} z_i&=a_i(t)+b_i(t,\bar v_i)+Z_i(t,\bar z_{i+1}),\quad i=\overline{1,n-1},\\ z_n&=a_n(t)+b_n(t,v_n)+Z_n(t,z_n),\end{aligned}\tag{2.19}$$

в которых функции a_i, b_i, Z_i, $i=\overline{1,n}$, определяются из рекуррентных соотношений

$$a_n(t)=-1+\frac{\ln|Q_n(t)|}{\ln|I_n(t)|},\;\; b_n(t,v_n)=\frac{\ln|1+v_n|}{\ln|I_n(t)|},$$

$$Z_n(t,z_n)=\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k\right)\frac{\ln\theta_n\left(\mu_n|I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}\right)}{\ln|I_n(t)|},$$

$$Z_{n-1}(t,z_n)=\frac{\beta_{n-1}\sigma_n}{\beta_n}\frac{\ln|I_n(t)|}{\ln|I_{n-1}(t)|}Z_n(t,z_n)+\frac{\beta_{n-1}\ln\theta_n\left(\mu_n|I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}\right)}{\ln|I_{n-1}(t)|},$$

$$a_i(t)=-1+\frac{\beta_i\sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}}\frac{\ln|I_{i+1}(t)|}{\ln|I_i(t)|}[1+a_{i+1}(t)]+\frac{\beta_i\ln|Q_i(t)|}{\ln|I_i(t)|},\quad i=\overline{1,n-1},$$

$$b_i(t,\bar v_i)=\frac{\beta_i\sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}}\frac{\ln|I_{i+1}(t)|}{\ln|I_i(t)|}b_{i+1}(t,\bar v_{i+1})+\frac{\beta_i\ln|1+v_i|}{\ln|I_i(t)|},\quad i=\overline{1,n-1},$$

$$Z_i(t,\bar z_{i+1}) = \frac{\beta_i\sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}}\frac{\ln|I_{i+1}(t)|}{\ln|I_i(t)|}\times$$

$$\times\, Z_{i+1}(t,\bar z_{i+2}) + \frac{\beta_i \ln\theta_{i+1}\left(\mu_{i+1}|I_{i+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i+1}}(1+z_{i+1})}\right)}{\ln|I_i(t)|}, \quad i=\overline{1,n-2},$$

и имеют следующие свойства:

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_i(t) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} b_i(t,\bar v_i) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar v_i \in V_i, \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.20}$$

$$\begin{gathered} \lim_{t\uparrow\omega} Z_n(t,z_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad |z_n| \le \frac{1}{2}, \\ \lim_{t\uparrow\omega} Z_i(t,\bar z_{i+1}) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar z_{i+1}\in W_{i+1}, \quad i=\overline{1,n-1}, \end{gathered} \tag{2.21}$$

$$\begin{gathered} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z_n(t,z_n)}{\partial z_n} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad |z_n| \le \frac{1}{2}, \\ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z_i(t,\bar z_{i+1})}{\partial z_k} = 0, \quad k=\overline{i+1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad \bar z_{i+1}\in W_{i+1}, \quad i=\overline{1,n-1}. \end{gathered} \tag{2.22}$$

В силу условий (2.20) – (2.22) существует число $t_0 \in [a,\omega[$ такое, что выполняются неравенства

$$\begin{gathered} |a_n(t)+b_n(t,v_n)+Z_n(t,z_n)| \le \frac{1}{2n} \quad \text{при} \quad (t,v_n,z_n)\in[t_0,\omega[\times V_n\times W_n, \\ |a_i(t)+b_i(t,\bar v_i)+Z_i(t,\bar z_{i+1})| \le \frac{1}{2n} \ \text{при} \ (t,\bar v_i,\bar z_{i+1})\in[t_0,\omega[\times V_i\times W_{i+1}, \ i=\overline{1,n-1}, \end{gathered} \tag{2.23}$$

и условия Липшица

$$\begin{gathered} |Z_n(t,z_n^1)-Z_n(t,z_n^2)| \le \frac{1}{n+1}|z_n^1-z_n^2| \quad \text{при} \quad (t,z_n^1),(t,z_n^2)\in[t_0,\omega[\times W_n, \\ |Z_i(t,\bar z_{i+1}^1)-Z_i(t,\bar z_{i+1}^2)| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=i+1}^{n}|z_k^1-z_k^2|, \quad i=\overline{1,n-1}, \end{gathered} \tag{2.24}$$

при $t\in[t_0,\omega[$ и любых $\bar z_{i+1}^1, \bar z_{i+1}^2 \in W_{i+1}$.

Выбрав таким образом число t_0, обозначим через **B** банахово пространство вектор-функций $z=(z_i)_{i=1}^n$, каждая компонента которого z_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$, определена, непрерывна и ограничена на множестве $D_i=[t_0,\omega[\times V_i$, с нормой

$$\|z\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|z_i(t,\bar v_i)| : (t,\bar v_i)\in D_i, \ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Выделим из него подпространство $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $\|z\| \le \dfrac{1}{2}$, и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$, выбрав предварительно произвольным образом число $\nu \in (0,1)$, оператор $\Phi = (\Phi_i)_{i=1}^n$, определенный соотношениями

$$\begin{aligned}\Phi_i(z)(t,\bar{v}_i) &= z_i(t,\bar{v}_i) - \nu\left[z_i(t,\bar{v}_i) - a_i(t) - b_i(t,\bar{v}_i) - \right.\\ &\left. - Z_i(t, z_{i+1}(t,\bar{v}_{i+1}), \ldots z_n(t,v_n))\right], \quad i = \overline{1,n-1},\\ \Phi_n(z)(t,v_n) &= z_n(t,v_n) - \nu\left[z_n(t,v_n) - a_n(t) - b_n(t,v_n) - Z_n(t, z_n(t,v_n))\right].\end{aligned} \tag{2.25}$$

В силу условий (2.23), (2.24) для любого $z \in \mathbf{B}_0$ выполняется неравенство $\|\Phi(z)\| \le \dfrac{1}{2}$ и для любых $z, \tilde{z} \in \mathbf{B}_0$

$$\|\Phi(z) - \Phi(\tilde{z})\| \le \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\|z - \tilde{z}\|.$$

Значит, оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная вектор-функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (2.25) эта вектор-функция с непрерывными компонентами $z_i : D_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, является единственным решением системы (2.18), удовлетворяющим условию $\|z\| \le \dfrac{1}{2}$. Из (2.19) с учетом этого условия и (2.20) – (2.22) следует, что компоненты данного решения $z_i(t,\bar{v}_i)$, $i = \overline{1,n}$, стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $\bar{v}_i \in V_i$. Непрерывная дифференцируемость этих компонент на множествах D_i непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определяемых системой соотношений. В силу замены (2.17) полученной вектор-функции $z = (z_i)_{i=1}^n$ соответствует вектор-функция $(Y_i)_{i=1}^n$ с компонентами вида (2.16), которая является решением системы (2.15), причем согласно (2.16) и знаковым условиям (2.3), (2.4)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y_i(t,\bar{v}_i) = Y_i^0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar{v}_i \in V_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.26}$$

Кроме того, из (2.15) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{(Y_n(t,v_n))'_t}{Y_n(t,v_n)} &= \frac{O'_n(t)}{Q_n(t)}\left[1 - \left(\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k\right)\frac{Y_n(t,v_n)\varphi'_n\left(Y_n(t,v_n)\right)}{\varphi_n\left(Y_n(t,v_n)\right)}\right]^{-1},\\ \frac{(Y_i(t,\bar{v}_i))'_t}{Y_i(t,\bar{v}_i)} &= \frac{O'_i(t)}{Q_i(t)} + \frac{Y_{i+1}(t,\bar{v}_{i+1})\varphi'_{i+1}\left(Y_{i+1}(t,\bar{v}_{i+1})\right)}{\varphi_{i+1}\left(Y_{i+1}(t,\bar{v}_{i+1})\right)}\frac{(Y_{i+1}(t,\bar{v}_{i+1}))'_t}{(Y_{i+1}(t,\bar{v}_{i+1}))}, \quad i = \overline{1,n-1}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Здесь в силу (2.26) и (1.2)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,\bar{v}_i)\varphi'_i\left(Y_i(t,\bar{v}_i)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,\bar{v}_i)\right)} = \sigma_i \quad \text{равномерно по} \quad \bar{v}_i \in V_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.28}$$

и согласно виду функций Q_i, $i = \overline{1,n}$,

$$\frac{Q_i'(t)}{Q_i(t)} = \begin{cases} \dfrac{I_i'(t)}{I_i(t)} & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I} \cup \{n\}, \\[2ex] \dfrac{I_i'(t)}{I_i(t)} - \dfrac{I_{i+1}'(t)}{I_{i+1}(t)} & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Поэтому из (2.27) с учетом условий (2.2) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_i(t)[Y_i(t,\bar v_i)]_t'}{I_i'(t)Y_i(t,\bar v_i)} = \frac{1}{\beta_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad \bar v_i \in V_i. \tag{2.30}$$

Теперь, применяя к системе дифференциальных уравнений (1.1) преобразование

$$y_i(t) = Y_i(t, \bar v_i(t)), \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.31}$$

и учитывая, что вектор-функция $(Y_i(t,\bar v_i(t)))_{i=1}^n$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $\bar v_i(t) \in V_i$, $i = \overline{1,n}$, является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = Q_i(t)[1 + v_i(t)], \quad i = \overline{1,n-1}, \\ &\frac{y_n(t)}{[\varphi_n(y_n(t))]^{\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k}} = Q_n(t)[1 + v_n(t)], \end{aligned} \tag{2.32}$$

получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} v_i' &= \frac{I_i'(t)}{\beta_i I_i(t)} - \frac{Q_i'(t)}{Q_i(t)}(1+v_i) - \frac{I_{i+1}'(t)}{\beta_{i+1}I_{i+1}(t)}\,\frac{1+v_i}{1+v_{i+1}}\,H_{i+1}(t,\bar v_{i+1}), \quad i = \overline{1,n-2}, \\ v_{n-1}' &= \frac{I_{n-1}'(t)}{\beta_{n-1}I_{n-1}(t)} - \frac{I_{n-1}'(t)}{I_{n-1}(t)}(1+v_{n-1}) - \frac{1+v_{n-1}}{Q_n(t)(1+v_n)}H_n(t,v_n)H(t,\bar v_1), \\ v_n' &= \frac{H(t,\bar v_1)}{Q_n(t)}\left[1 - \left(\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k\right)H_n(t,v_n)\right] - \frac{Q_n'(t)}{Q_n(t)}(1+v_n), \end{aligned} \tag{2.33}$$

где

$$H_i(t,\bar v_i) = \frac{Y_i(t,\bar v_i)\varphi_i'(Y_i(t,\bar v_i))}{\varphi_i(Y_i(t,\bar v_i))}, \quad i = \overline{1,n}, \quad H(t,\bar v_1) = \frac{\alpha_n p_n(t)\varphi_1(Y_1(t,\bar v_1))}{[\varphi_n(Y_n(t,v_n))]^{\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k}}.$$

Поскольку выполняются условия (2.28), (2.30) и функции φ_i, $i = 1,\ldots,n-1$, удовлетворяют условию **S**, с учетом замечания 1.1 имеем

$$H_i(t,\bar v_i) = \sigma_i + R_i(t,\bar v_i), \quad i = \overline{1,n},$$

$$H(t,\bar v_1) = \alpha_n p_n(t) q_n(t) \prod_{k=1}^{n-1} |1+v_k|^{\prod_{j=1}^{k}\sigma_j} [1+R(t,\bar v_1)],$$

где

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_i(t,\bar v_i) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar v_i \in V_i, \quad i=\overline{1,n},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} R(t,\bar v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar v_1 \in V_1.$$

В силу этих представлений и условий (2.2) систему уравнений (2.33) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v_i' &= h_i(t)\left[f_i(t,\bar v_i) - v_i + \Lambda_i\sigma_{i+1}v_{i+1} + W_i(v_i,v_{i+1})\right], \quad i=\overline{1,n-2},\\ v_{n-1}' &= h_{n-1}(t)\left[f_{n-1}(t,\bar v_1) - \Lambda_{n-1}\sigma_n\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{0k}v_k - v_n\right) - v_{n-1} + W_{n-1}(\bar v_1)\right],\\ v_n' &= h_n(t)\left[f_n(t,\bar v_1) + \left(1-\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{0k}v_k - v_n\right) + W_n(v_1,\dots,v_{n-1})\right], \end{aligned} \tag{2.34}$$

где

$$h_i(t) = \frac{I_i'(t)}{\beta_i I_i(t)}, \quad i=\overline{1,n}, \quad a_{0k} = \prod_{j=1}^{k}\sigma_j \quad k=\overline{1,n-1},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t,\bar v_i) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar v_i \in V_i, \quad i=\overline{1,n-2},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t,\bar v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar v_1 \in V_1, \quad i=n-1,n,$$

$$W_i(v_i,v_{i+1}) = -\Lambda_i\sigma_{i+1}\left[\frac{1+v_i}{1+v_{i+1}} - 1 - v_i + v_{i+1}\right], \quad i=\overline{1,n-2},$$

$$W_{n-1}(\bar v_1) = -\Lambda_{n-1}\sigma_n\left[\frac{1+v_{n-1}}{1+v_n}\prod_{k=1}^{n-1}|1+v_k|^{a_{0k}} - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}a_{0k}v_k - v_{n-1} + v_n\right],$$

$$W_n(v_1,\dots,v_{n-1}) = \left(1-\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n-1}|1+v_k|^{a_{0k}} - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}a_{0k}v_k\right].$$

Здесь

$$\lim_{|v_i|+|v_{i+1}|\to 0} \frac{\partial W_i(v_i,v_{i+1})}{\partial v_k} = 0, \quad i=\overline{1,n-2}, \quad k=i,i+1,$$

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0} \frac{\partial W_{n-1}(\bar v_1)}{\partial v_k} = 0, \quad k=\overline{1,n},$$

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_{n-1}|\to 0} \frac{\partial W_n(v_1,\dots,v_{n-1})}{\partial v_k} = 0, \quad k=\overline{1,n-1},$$

и в силу того, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} I_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, равны либо нулю, либо $\pm\infty$, выполняются условия

$$\int\limits_{t_0}^{\omega} h_i(t)\,dt = \pm\infty, \quad i=\overline{1,n}.$$

Далее рассмотрим два случая, когда $m=\max\{i\in\mathfrak{I} : \Lambda_i = 0\} = n-1$ и $m<n-1$.

В первом случае алгебраическое уравнение (2.1) является уравнением первой степени и имеет корень $\lambda_1^0 = \prod_{k=1}^n \sigma_k - 1 \neq 0$, а система дифференциальных уравнений (2.34) имеет вид

$$\begin{aligned} v_i' &= h_i(t)\left[f_i(t,\bar v_i) - v_i + \Lambda_i\sigma_{i+1}v_{i+1} + W_i(v_i,v_{i+1})\right], \quad i=\overline{1,n-2},\\ v_{n-1}' &= h_{n-1}(t)\left[f_{n-1}(t,\bar v_1) - v_{n-1}\right],\\ v_n' &= h_n(t)\left[f_n(t,\bar v_1) + \left(1-\prod_{k=1}^n\sigma_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{0k}v_k - v_n\right) + W_n(v_1,\dots,v_{n-1})\right]. \end{aligned}$$

Полагая в ней

$$v_i = \varepsilon z_i, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad v_n = z_n, \tag{2.35}$$

где $\varepsilon>0$ выбрано настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}|a_{0k}|<1$, получаем относительно z_k, $k=\overline{1,n}$, систему дифференциальных уравнений, которая на основании теоремы 1.2 из работы [7] имеет по крайней мере одно решение $(z_i) : [t_1,\omega[\longrightarrow$ $\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t_1\in[t_0,\omega[$, стремящееся к нулю при $t\uparrow\omega$. Ему в силу замен (2.35) и (2.31) соответствует решение $(y_i)_{i=1}^n : [t_1,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}^n$ системы дифференциальных уравнений (1.1), допускающее асимптотические представления

$$y_i(t) = \mu_i|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}+o(1)}, \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega$$

и удовлетворяющее асимптотическим соотношениям (2.5), (2.6). Кроме того, из этой теоремы следует, что таких решений существует k-параметрическое семейство, если среди чисел (2.7), где $m=n-1$, имеется k положительных. В силу (2.2) – (2.4) и (2.30) такие решения системы (1.1) являются $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$-решениями.

Пусть теперь $m<n-1$. В этом случае, учитывая, что при $i=\overline{m+1,n-1}$

$$h_i(t) = h_n(t)\frac{h_i(t)}{h_n(t)} = h_n(t)\frac{\beta_n I_n(t) I_i'(t)}{\beta_i I_i(t) I_n'(t)} = h_n(t)\frac{\beta_{i+1}I_i'(t)I_{i+1}(t)}{\beta_i I_i(t)I_{i+1}'(t)}\,\frac{\beta_{i+2}I_{i+1}'(t)I_{i+2}(t)}{\beta_{i+1}I_{i+1}(t)I_{i+2}'(t)}\times\dots$$
$$\dots\times\frac{\beta_n I_{n-1}'(t)I_n(t)}{\beta_{n-1}I_{n-1}(t)I_n'(t)} = \frac{h_n(t)[1+o(1)]}{\Lambda_i\Lambda_{i+1}\dots\Lambda_{n-1}} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

записываем систему дифференциальных уравнений (2.34) в виде

$$
\begin{aligned}
v_i' &= h_i(t)\left[f_i(t,\bar v_i) - v_i + \Lambda_i\sigma_{i+1}v_{i+1} + W_i(v_i, v_{i+1})\right], \quad i = \overline{1, m-1},\\
v_m' &= h_m(t)[f_m(t,\bar v_m) - v_m],\\
v_i' &= h_n(t)\left[\tilde f_i(t,\bar v_i) - \frac{v_i}{\Lambda_i\ldots\Lambda_{n-1}} + \frac{\sigma_{i+1}}{\Lambda_{i+1}\ldots\Lambda_{n-1}}v_{i+1} + \tilde W_i(v_i, v_{i+1})\right], \ \ i = \overline{m+1, n-2},
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{n-1}' &= h_n(t)\left[\tilde f_{n-1}(t,\bar v_1) - \sigma_n\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{0k}v_k - v_n\right) - \frac{v_{n-1}}{\Lambda_{n-1}} + \tilde W_{n-1}(\bar v_1)\right],\\
v_n' &= h_n(t)\left[f_n(t,\bar v_1) + \left(1 - \prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{0k}v_k - v_n\right) + W_n(v_1,\ldots,v_{n-1})\right],
\end{aligned}
$$

где функции $\bar f_i$, $\bar W_i$, $i = \overline{m+1, n-1}$, имеют такие же свойства, как и функции f_i, W_i, $i = \overline{m+1, n-1}$, в системе (2.34). Важной особенностью системы (2.36) является то, что в m-м уравнении, в отличие от последующих, коэффициент при v_{m+1} равен нулю.

Рассмотрим постоянную матрицу B_{m+1}, составленную из коэффициентов при $v_{m+1},\ldots,v_n$ в последних $n-m$ уравнениях системы (2.36). Ее характеристическое уравнение $\det[B_{m+1} - \lambda E_{n-m}] = 0$, где E_{n-m} — единичная матрица размерности $(n-m)\times(n-m)$, имеет вид (2.1). В силу условий теоремы это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Поэтому с использованием доказательства теоремы 2.1 из работы [8] приходим к выводу, что существуют невырожденная постоянная матрица D_{m+1} размерности $(n-m)\times(n-m)$ и невырожденная непрерывно дифференцируемая и ограниченная вместе с обратной на промежутке $[t_0,\omega[$ матрица $L_{m+1}(t)$ такие, что

$$
L_{m+1}^{-1}(t)D_{m+1}^{-1}B_{m+1}D_{m+1}L_{m+1}(t) - \frac{1}{h_n(t)}\,L^{-1}(t)L'(t) = C_{m+1},
$$

где C_{m+1} — верхняя треугольная матрица вида

$$
C_{m+1} = \begin{pmatrix}
\mathrm{Re}\,\lambda_1^0 & c_{m+1m+2} & \ldots & c_{m+1n-1} & c_{m+1n}\\
0 & \mathrm{Re}\,\lambda_2^0 & \ldots & c_{m+2n-1} & c_{m+2n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & \mathrm{Re}\,\lambda_{n-m-1}^0 & c_{n-1n}\\
0 & 0 & \ldots & 0 & \mathrm{Re}\,\lambda_{n-m}^0
\end{pmatrix},
$$

в которой λ_i^0, $i = \overline{1, n-m}$, — все корни (с учетом кратных) алгебраического уравнения (2.1), все c_{ik}, $k = \overline{i+1, n}$, при $i \in \{m+1,\ldots,n\}$, за возможным исключением лишь одной, равной единице, равны нулю.

В силу этого факта система дифференциальных уравнений (2.36) с помощью преобразования

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O_1 \\ O_2 & D_{m+1}L_{m+1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

где O_1, O_2 — нулевые матрицы размерностей $m \times (n-m)$ и $(n-m) \times m$ соответственно, E_m — единичная матрица размерности $m \times m$, сводится к системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
&w_i' = h_i(t)\left[f_{1i}(t,\bar{w}_i) - w_i + \Lambda_i\sigma_{i+1}w_{i+1} + f_{2i}(w_i,w_{i+1})\right], \quad i = \overline{1,m-1},\\
&w_m' = h_m(t)[f_{1m}(t,\bar{w}_m) - w_m],\\
&w_i' = h_n(t)\left[f_{1i}(t,\bar{w}_1) + \sum_{k=1}^{m} c_{ik}(t)w_k + \left(\mathrm{Re}\lambda_{i-m}^0\right)w_i + \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}w_k + f_{2i}(t,\bar{w}_1)\right],\\
&i = \overline{m+1,n-1},\\
&w_n' = h_n(t)\left[f_{1n}(t,\bar{w}_1) + \sum_{k=1}^{m} c_{nk}(t)w_k + \left(\mathrm{Re}\lambda_{n-m}^0\right)w_n + f_{2n}(t,\bar{w}_1)\right],
\end{aligned} \tag{2.38}$$

в которой функции c_{ik}, $i = \overline{m+1,n}$, $k \in \{1,\ldots,m\}$, непрерывны и ограничены на промежутке $[t_0,\omega[$, а функции $f_{1i} : [t_0,\omega[\times\mathbb{R}_\delta^{n-i+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_{2i} : \mathbb{R}_\delta^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, и $f_{1i} : [t_0,\omega[\times\mathbb{R}_\delta^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_{2i} : [t_0,\omega[\times\mathbb{R}_\delta^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{m+1,n}$, где $\mathbb{R}_\delta^k = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k : |x_j| \le \delta\}$, $\delta > 0$ —некоторое достаточно малое число, непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_{1i}(t,\bar{w}_i) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad \text{равномерно по} \quad \bar{w}_i \in \mathbb{R}_\delta^{n-i+1},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_{1i}(t,\bar{w}_1) = 0, \quad i = \overline{m+1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad \bar{w}_1 \in \mathbb{R}_\delta^n,$$

$$\lim_{|w_i|+|w_{i+1}|\to 0} \frac{f_{2i}(w_i,w_{i+1})}{|w_i|+|w_{i+1}|} = 0, \quad i = \overline{1,m-1},$$

$$\lim_{|w_1|+\ldots+|w_n|\to 0} \frac{f_{2i}(t,\bar{w}_1)}{|w_1|+\ldots+|w_n|} = 0, \quad i = \overline{m+1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad t \in [t_0,\omega[.$$

В силу ограниченности функций c_{ik}, $i = \overline{m+1,n}$, $k \in \{1,\ldots,m\}$, на промежутке $[t_0,\omega[$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что постоянные B_i^0, $i = \overline{m+1,n}$, определяемые (начиная с $i = n$) рекуррентными соотношениями

$$B_n^0 = \frac{\varepsilon}{|\mathrm{Re}\,\lambda_{n-m}^0|}\sum_{k=1}^{m} c_{nk}^0, \quad B_i^0 = \frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda_{i-m}^0|}\left(\varepsilon\sum_{k=1}^{m} c_{ik}^0 + \sum_{i+1}^{n} |c_{ik}|B_k^0\right), \quad i = \overline{m+1,n-1},$$

где

$$c_{ik}^0 = \limsup_{t\uparrow\omega} |c_{ik}(t)|, \quad i = \overline{m+1,n}, \quad k \in \{1,\ldots,m\},$$

удовлетворяют неравенствам $B_i^0 < 1$, $i = \overline{m+1,n}$.

При таком выборе постоянной $\varepsilon > 0$ система дифференциальных уравнений (2.38) с помощью преобразования

$$w_i = \varepsilon z_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad w_i = z_i, \quad i = \overline{m+1,n}, \tag{2.39}$$

сводится к системе дифференциальных уравнений, для которой выполняются все условия теоремы 1.2 из работы [7]. Согласно этой теореме данная система имеет хотя бы одно решение $(z_i)_{i=1}^n : [t_1,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t_1 \in [t_0,\omega[$, стремящееся к нулю при $t\uparrow\omega$, причем таких решений существует k-параметрическое семейство, если среди чисел (2.7) имеется k положительных. Каждому такому решению в силу замен (2.39), (2.37) и (2.31) соответствует решение системы дифференциальных уравнений (1.1), удовлетворяющее при $t\uparrow\omega$ асимптотическим соотношениям (2.5), (2.6). Более того, учитывая вид функций (2.31) и условия (2.2) – (2.4), нетрудно заметить, что все эти решения являются $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решениями системы (1.1).

Теорема доказана.

Теперь укажем условия, при которых асимптотические представления (2.5), (2.6) могут быть записаны в явном виде.

Теорема 2.2. *Пусть $\Lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n-1}$, среди них имеются равные нулю, $\Lambda_{n-1} \in \Im$, $m = \max\{i \in \Im : \Lambda_i = 0\}$ и все функции φ_i, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяют условию $\mathbf{S}$. Тогда каждое $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решение (в случае их существования) системы дифференциальных уравнений (1.1) допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления*

$$y_i(t) = \mu_i \left(\prod_{k=i}^{n-1} \left| Q_k(t)\theta_{k+1}\left(\mu_{k+1}\,|I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}}\right)\right|^{\prod\limits_{j=i+1}^{k}\sigma_j} \right) \times$$

$$\times \left| Q_n(t)\left[\theta_n(\mu_n|I_n|^{\frac{1}{\beta_n}})\right]^{\prod\limits_{j=1}^{n-1}\sigma_j} \right|^{\frac{\prod\limits_{j=i+1}^{n}\sigma_j}{1-\prod\limits_{j=1}^{n}\sigma_j}} [1+o(1)], \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.40}$$

Доказательство. При установлении теоремы 2.1 было показано, что для существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений системы дифференциальных уравнений (1.1) необходимо, чтобы выполнялись условия (2.2) – (2.4) и каждое такое решение допускало при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (2.5), (2.6). Кроме того, было получено для таких решений асимптотическое соотношение (2.11). Поскольку все функции φ_i, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяют условию $\mathbf{S}$, в силу (2.11) и замечания 1.1

$$\theta_i(y_i(t)) = \theta_i\left(\mu_i\,|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}}\right)[1+o(1)], \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Поэтому асимптотические представления (2.5), (2.6) можно записать в виде

$$\frac{y_i(t)}{|y_{i+1}(t)|^{\sigma_{i+1}}} = Q_i(t)\theta_{i+1}\left(\mu_{i+1}\,|I_{i+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i+1}}}\right)[1+o(1)], \quad i=\overline{1,n-1}, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

$$|y_n(t)|^{1-\prod\limits_{j=1}^{n}\sigma_j}\operatorname{sign} y_n(t) = Q_n(t)\left[\theta_n\left(\mu_n|I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}}\right)\right]^{\prod\limits_{j=1}^{n-1}\sigma_j}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда, последовательно, начиная с $i=n$, получаем все асимптотические представления (2.40).

Теорема доказана.

3. Выводы. В данной работе для циклической системы дифференциальных уравнений (1.1) с правильно меняющимися нелинейностями введен класс так называемых $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений и исследован вопрос о наличии таких решений в особом случае, когда $\Lambda_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n-1}$, и среди них имеются равные нулю. Особенность данного случая потребовала наложения дополнительного условия $\mathbf{S}$ на все нелинейности системы, кроме одной, и предположения, что $\Lambda_{n-1}\in\mathfrak{I}$. В результате были получены необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений системы (1.1), а также неявные асимптотические при $t\uparrow\omega$ ($\omega\le+\infty$) формулы для компонент таких решений. Явные асимптотические формулы для компонент данных решений установлены при предположении, что все нелинейности удовлетворяют условию $\mathbf{S}$.

Результаты работы могут быть использованы, например, для установления асимптотики решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$y''=p(t)\varphi_1(y)\varphi_2(y') \quad \text{и} \quad y^{(n)}=p(t)\varphi(y),$$

где $p:\,[a,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{0\}$ — непрерывная функция и $\varphi,\varphi_1:\,\Delta(Y_0^0)\longrightarrow]0,+\infty[$, $\varphi_2:\,\Delta(Y_1^0)\longrightarrow]0,+\infty[$ ($\Delta(Y_i^0)$ — односторонняя окрестность Y_i^0) — непрерывно дифференцируемые и правильно меняющиеся при $y\to Y_0^0$ и $y'\to Y_1^0$ функции некоторых порядков.

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
2. *Мирзов Д. Д.* Об асимптотических свойствах решений одной системы типа Эмдена – Фаулера // Дифференц. уравнения. — 1985. — **21**, № 9. — С. 1498 – 1504.
3. *Мирзов Д. Д.* Некоторые асимптотические свойства решений одной системы типа Эмдена – Фаулера // Дифференц. уравнения. — 1987. — **23**, № 9. — С. 1519 – 1532.
4. *Мирзов Дж. Д.* Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Майкоп: Адыгей. книж. изд-во, 1993. — 132 с.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления правильных решений одной двумерной системы дифференциаальных уравнений // Доп. НАН України. — 2002. — № 4. — С. 11 – 17.
6. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления правильных решений одной полулинейной двумерной системы дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. — 2002. — № 5. — С. 11 – 17.
7. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений //Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52 – 80.
8. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. — С. 441 – 452.

Получено 14.12.10,
после доработки — 22.05.11