УДК 517 . 9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А. И. Двирный, В. И. Слынько

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3
e-mail: dvirny@mail.ru
vitstab@ukr.net

We study the question of stability of critical equilibrium positions for a nonlinear impulsive differential system in a particular case. The study is carried out via the direct Lyapunov method with a use of two auxiliary functions.

Розглядається питання про стійкість критичних станів рівноваги нелінійної системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією в одному окремому випадку. Дослідження стійкості проводиться на основі прямого методу Ляпунова з використанням двох допоміжних функцій.

1. Введение. Математическими моделями физических и технических процессов, в которых вектор состояния претерпевает мгновенные изменения в некоторые моменты времени, являются дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Теория устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием рассмотрена в работах [1 – 7]. В монографии [1] доказаны утверждения об устойчивости решений для этого класса систем по линейному приближению. Случай, когда линейное приближение системы не позволяет судить об устойчивости или неустойчивости решения системы, называют критическим. Исследование этих случаев требует привлечения нелинейных членов и проводится с помощью прямого метода Ляпунова. Для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием проблема устойчивости решений в критических случаях является малоизученной [8, 9]. Следует отметить, что в случае, когда моменты импульсного воздействия равноудалены, исследование устойчивости решений в критическом случае может быть сведено к исследованию неподвижной точки отображения Пуанкаре [10 – 12].

Целью настоящей работы является исследование одного специального критического случая. Основным методом исследования выбран прямой метод Ляпунова на основе двух вспомогательных функций. Такой подход позволяет охватить те случаи, когда состояние равновесия соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений и неподвижная точка отображения скачка являются одновременно неустойчивыми.

Предложенный подход позволил получить новые достаточные условия устойчивости решений системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критическом случае.

2. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= Ay(t) + \sum_{|\nu|=2r+1} f_\nu(t) y^\nu, \quad t \neq \tau_k, \\
\Delta y(t) &= B_k y(t) + \sum_{|\nu|=2r+1} g_\nu^k y^\nu(t), \quad t = \tau_k,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f_\nu \in C([a,\infty);\mathbb{R}^n)$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\nu| = \sum_{k=1}^n \nu_k$, $a \in \mathbb{R}$, $y^\nu = y_1^{\nu_1}\ldots y_n^{\nu_n}$, $\Delta y(t) = y(t+0) - y(t)$, $B_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность моментов импульсного воздействия, относительно которых предположим, что выполняются неравенства

$$
0 \leq \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 \leq +\infty.
$$

Относительно матриц $I + B_k$ предположим, что они невырождены, тогда задача Коши для системы дифференциальных уравнений (2.1) имеет единственное решение. Для системы (2.1) рассмотрим систему линейного приближения

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= Ax(t), \quad t \neq \tau_k, \\
\Delta x(t) &= B_k x(t), \quad t = \tau_k.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Условия устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (2.1) по линейному приближению приведены в [1]. Далее будем рассматривать систему (2.1) в двух случаях:

1) матрицант $\Omega_{t_0}^t$ системы (2.2) удовлетворяет условиям: существуют положительные функции $c_i(t)$, $i = 1, 2$, такие, что

$$
\|\Omega_{t_0}^t\| \leq c_1(t_0), \quad \|(\Omega_{t_0}^t)^{-1}\| \leq c_2(t_0), \quad t \geq t_0;
$$

2) существует симметричная положительно определенная матрица P_0, для которой матрица $A^T P_0 + P_0 A = 0$, а матрицы

$$
B_k^T P_0 + P_0 B_k + B_k^T P_0 B_k, \quad k = 1, 2, \ldots,
$$

являются отрицательно-полуопределенными.

Отметим, что в первом случае систему (2.1) можно привести к системе без линейного приближения. Введем замену переменных

$$
x = (\Omega_{t_0}^t)^{-1} y, \quad y = \Omega_{t_0}^t x,
$$

тогда

$$
\frac{dy}{dt} = \frac{d\Omega_{t_0}^t}{dt} x + \Omega_{t_0}^t \frac{dx}{dt} = A\Omega_{t_0}^t x + \sum_{|\nu|=2r+1} f_\nu(t)(\Omega_{t_0}^t x)^\nu, \quad t \neq \tau_k.
$$

Введем функции $\widetilde{f}_\nu(t)$, $|\nu| = 2r + 1$ так, что

$$\sum_{|\nu|=2r+1} \widetilde{f}_\nu(t)x^\nu = (\Omega_{t_0}^t)^{-1} \sum_{|\nu|=2r+1} f_\nu(t)(\Omega_{t_0}^t x)^\nu.$$

Учитывая свойство фундаментальной матрицы $\dfrac{d\Omega_{t_0}^t}{dt} = A\Omega_{t_0}^t$, $t \neq \tau_k$, получаем

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{|\nu|=2r+1} \widetilde{f}_\nu(t)x^\nu, \quad t \neq \tau_k.$$

Аналогично, определим коэффициенты $\widetilde{g}_\nu^k$ так, что

$$\sum_{|\nu|=2r+1} \widetilde{g}_\nu^k x^\nu = (\Omega_{t_0}^{\tau_k})^{-1} \sum_{|\nu|=2r+1} g_\nu^k(\Omega_{t_0}^{\tau_k} x)^\nu.$$

Тогда

$$\Delta x = \sum_{|\nu|=2r+1} \widetilde{g}_\nu^k x^\nu, \quad t = \tau_k.$$

Далее, в случае 1 вместо системы (2.1) будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{|\nu|=2r+1} \widetilde{f}_\nu(t)x^\nu, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= \sum_{|\nu|=2r+1} \widetilde{g}_\nu^k x^\nu(t), \quad t = \tau_k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Отметим, что устойчивость (асимптотическая устойчивость) состояния равновесия $x = 0$ системы (2.3) влечет за собой устойчивость (асимптотическую устойчивость) состояния равновесия $y = 0$ системы (2.1). В случае, когда функции $c_i(t_0)$, $i = 1, 2$, можно выбрать не зависящими от t_0, из равномерной асимптотической устойчивости по $t_0 \in \mathbb{R}_+$ состояния равновесия $x = 0$ следует равномерная устойчивость по $t_0 \in \mathbb{R}_+$ состояния равновесия $y = 0$.

Рассмотрим вопрос о выборе вспомогательной функции Ляпунова. В первом случае выбор вспомогательной функции ограничен лишь общими свойствами функций Ляпунова, а также условиями устойчивости (асимптотической устойчивости). Целесообразно функцию Ляпунова выбрать в виде квадратичной формы $v(y) = y^T Py$, где P — симметричная положительно определенная матрица. Во втором случае выбор функции ограничен свойствами первого приближения, поэтому целесообразно выбрать $v(y) = y^T Py$, где $P = P_0$ — матрица из условия 2.

3. Теорема об устойчивости. Для исследования устойчивости нулевого решения системы (2.3) в критическом случае приведем некоторую модификацию теоремы об устойчивости на основе двух вспомогательных функций [7].

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta y(t) &= g_k(y(t)), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $f \in C([a, \infty) \times \Omega; \mathbb{R}^n)$, $g_k \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$, Ω — открытая связная окрестность точки $y = 0$, $\Delta y = y(t+0) - y(t)$, $f(t, 0) = 0$, $g_k(0) = 0$ и точка $y = 0$ является изолированным состоянием равновесия системы (3.1). Последовательность моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [a, \infty)$ удовлетворяет неравенству

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < \infty.$$

Предположим, что задача Коши для дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1) имеет единственное решение $y(t; t_0, y_0)$ и функция $f(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по $t \in [a, \infty)$, т. е.

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|.$$

Пусть $v(y) \in C^1(D)$, $w(y) \in C^1(D)$ — некоторые вспомогательные функции, $D \subset \Omega$ — открытая связная окрестность состояния равновесия $y = 0$, $v(0) = w(0) = 0$. Введем обозначения

$$G^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : w(y) > 0\},$$

∂G^+ — граница множества G^+ и $G^- = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}^+$ — внешность множества G^+.

Всюду далее K_r обозначает открытый шар с центром в точке 0 радиуса r.

Предположение 3.1. *Пусть вспомогательные функции $v(y)$ и $w(y)$ таковы, что:*

1) $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{(3.1)} > 0$ *при всех* $y \in \partial G^+ \cap D = \partial G^- \cap D$;

2) существуют функции сравнения класса Хана $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{K}$ *такие, что:*

а) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(3.1)} \leq \varphi_1(v(y))$ *при всех* $y \in \overline{G}^+ \cap D$, $t \neq \tau_k$,

б) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(3.1)} \leq -\varphi_2(v(y))$ *при всех* $y \in \overline{G}^- \cap D$, $t \neq \tau_k$;

3) существуют функции сравнения класса Хана $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_{[0, r_0]}$, $K_{r_0} \subset D$, *такие, что:*

а) $v(y + g_k(y)) \leq \psi_1(v(y)))$ *при всех* $y \in \overline{G}^+ \cap D$, $t \neq \tau_k$,

б) $v(y + g_k(y)) \leq \psi_2(v(y))$ *при всех* $y \in \overline{G}^- \cap D$, $t \neq \tau_k$.

Предположение 3.1 позволяет сформулировать следующие условия устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову.

Теорема 3.1. *Пусть система уравнений (3.1) такова, что:*

1) существует открытая связная окрестность D состояния равновесия $y = 0$ и функция $v(y)$ является положительно определенной в области D, т. е. существует функция a класса Хана такая, что выполняются условия предположения 3.1 и

$$v(y) \geq a(\|y\|)$$

при всех $y \in D$;

2) существует постоянная $a_0 > 0$ такая, что выполняются неравенства

$$\int\limits_{a}^{\psi_2(a)} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \leq \theta_1, \quad \int\limits_{\psi_1(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \geq \theta_2$$

при всех $a \in (0, a_0]$.

Тогда состояние равновесия $y = 0$ системы (3.1) устойчиво.

Если выполняются условия 1, 2 и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\int\limits_{a}^{\psi_2(a)} \frac{ds}{\varphi_2(s)} + \gamma \leq \theta_1, \quad \int\limits_{\psi_1(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \geq \theta_2 + \gamma$$

при всех $a \in (0, a_0]$, то состояние равновесия $y = 0$ системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. *Устойчивость.* Пусть $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ заданы, $t_0 \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$, R — положительное число, такое, что $K_R \subset K_{r_0} \cap D$. Выберем $\widetilde{\gamma} < \min(a(\varepsilon), a(R), a_0)$. При заданных ε и t_0, учитывая непрерывность функции $v(y)$, можно выбрать δ так, что $v(y) < l$ при $\|y\| < \delta$, где $l = \min\{\widetilde{\gamma}, \psi_1(\widetilde{\gamma})\}$. Пусть решение $y(t; t_0, y_0)$ системы (2.3) начинается в области $K_\delta = \{y \in \mathbb{R}^n : \|\|y\| < \delta\}$, т. е. $y_0 \in K_\delta$ при $t = t_0 \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$. Рассмотрим поведение решения $y(t)$ в двух случаях:

1) начальные значения $y_0 \in \overline{G}^+ \cap D$;

2) начальные значения $y_0 \in \overline{G}^- \cap D$.

Случай 1. Пусть для любого $t \in [t_0; \tau_j]$ справедливо включение $y(t; t_0, y_0) \in \overline{G}^+$. Покажем, что на интервале $[t_0, \tau_j]$ решение $y(t; t_0, y_0)$ не выходит из множества K_ε. Предположим, что существует момент времени $t^* \in [t_0, \tau_j]$ такой, что

$$v(y(t; t_0, y_0)) < \widetilde{\gamma}, \quad t \in [t_0, t^*), \quad v(y(t^*; t_0, y_0)) = \widetilde{\gamma}.$$

Тогда имеет место цепочка неравенств

$$\int\limits_{\psi_1(\widetilde{\gamma})}^{\widetilde{\gamma}} \frac{ds}{\varphi_1(s)} < \int\limits_{v(y_0)}^{\widetilde{\gamma}} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \leq \int\limits_{v(y_0)}^{v(y(t^*; t_0, y_0))} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \leq t^* - t_0 \leq \theta_2.$$

Учитывая, что $\widetilde{\gamma} < a_0$, получаем противоречие с условием 2 теоремы 3.1.

Таким образом, $a(\|y(t;t_0,y_0)\|) \le v(y(t;t_0,y_0)) < \widetilde{\gamma} < a(\varepsilon)$, откуда следует, что

$$\|y(t;t_0,y_0)\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad y(t;t_0,y_0) \in D.$$

Докажем, что $v(y(\tau_j+0;t_0,y_0)) < l$. Из условия 2а) предположения 3.1 следует, что

$$\int\limits_{v(y_0)}^{v(y(\tau_j;t_0,y_0))} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \le \tau_j - t_0 \le \theta_2. \tag{3.2}$$

Учитывая, что $v(y(\tau_j;t_0,y_0)) < \widetilde{\gamma}$, из условия 2 теоремы 3.1 находим

$$\int\limits_{\psi_1(v(y(\tau_j;t_0,y_0)))}^{v(y(\tau_j;t_0,y_0))} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \ge \theta_2. \tag{3.3}$$

Сопоставляя (3.2) и (3.3), получаем

$$\int\limits_{v(y_0)}^{\psi_1(v(y(\tau_j;t_0,y_0)))} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \le 0.$$

Таким образом,

$$v(y(\tau_j+0;t_0,y_0)) \le \psi_1(v(y(\tau_j;t_0,y_0))) \le v(y_0) < l.$$

Предположим, что существует момент времени $\tau \in [t_0,\tau_j]$ такой, что $y(\tau;t_0,y_0) \in G^-$. Вследствие непрерывности функции $y(t;t_0,y_0)$ на интервале (t_0,τ_j) существует интервал $(\tau^*-\eta,\tau^*)$ такой, что для всех $t \in (\tau^*-\eta,\tau^*) \subset [t_0,\,\tau_j)$ выполняется включение $y(t;t_0,y_0) \in G^- \cap D$ и $y(\tau^*-\eta;t_0,y_0) \in \partial G^- \cap D$. По условию

$$w(y(\tau^*-\eta;t_0,y_0)) = 0, \quad \dot{w}(y(t;t_0,y_0))|_{t=\tau^*-\eta} > 0,$$

поэтому $w(y(t;t_0,y_0)) > 0$ при всех $t \in (\tau^*-\eta,\tau^*-\eta+\alpha)$, α — некоторое малое положительное число, что противоречит включению $y(t;t_0,y_0) \in G^- \cap D$ при всех $t \in (\tau^*-\eta,\tau^*)$.

Таким образом, справедливо включение $y(t;t_0,y_0)) \in \overline{G}^+ \cap D$ при всех $t \in [t_0,\tau_j]$, как только $y_0 \in \overline{G}^+ \cap D$.

Случай 2. Предположим, что для всех $t \in [t_0,\tau_j]$ выполняется включение $y(t;t_0,y_0) \in \in \overline{G}^-$. Покажем, что на интервале $[t_0,\tau_j]$ решение $y(t;t_0,y_0)$ не выходит из множества $K_\varepsilon \cap D$. Предположим, что существует момент времени $t^* \in [t_0,\tau_j]$ такой, что

$$v(y(t;t_0,y_0)) < \widetilde{\gamma}, \quad t \in [t_0,t^*), \quad v(y(t^*;t_0,y_0)) = \widetilde{\gamma},$$

тогда

$$v(y(t;t_0,y_0)) = v(y_0) + \int\limits_{t_0}^{t} Dv(y(s;t_0,y_0))\,ds \le v(y_0) < l.$$

Полученное противоречие доказывает, что $y(t;t_0,y_0)\in K_\varepsilon\cap D$ при всех $t\in[t_0,\tau_j]$.

Докажем, что $v(y(\tau_j+0;t_0,y_0))<l$. Из условия 2б) предположения 3.1 следует, что

$$\int\limits_{v(y(\tau_j;t_0,y_0))}^{v(y_0)}\frac{ds}{\varphi_2(s)}\geq\tau_j-t_0\geq\theta_1.$$

Учитывая, что $v(y(\tau_j;t_0,y_0))<\widetilde{\gamma}$, и сопоставляя это неравенство с условием 2 теоремы 3.1

$$\int\limits_{v(y(\tau_j;t_0,y_0))}^{\psi_2(v(y(\tau_j;t_0,y_0)))}\frac{ds}{\varphi_2(s)}\leq\theta_1,$$

получаем

$$\int\limits_{\psi_2(v(y(\tau_j;t_0,y_0)))}^{v(y_0)}\frac{ds}{\varphi_2(s)}\geq 0.$$

Далее, используя условие 3б) предположения 3.1, находим

$$v(y(\tau_j+0;t_0,y_0))\leq\psi_2(v(y(\tau_j;t_0,y_0)))\leq v(y_0)<l.$$

Пусть теперь существует момент времени $\tau\in(t_0,\tau_j)$ такой, что $y(\tau;t_0,y_0)\in G^+$. Из непрерывности функции $w(y(t;t_0,y_0))$ на интервале (t_0,τ_j) следует, что существует $\tau^*\in(t_0,\tau_j)$ — наибольший момент времени, для которого $y(t;t_0,y_0)\in\overline{G}^-$. Покажем, что $y(t;t_0,y_0)\in G^+$ при всех $t\in(\tau^*,\tau_j]$. Действительно, если при некотором $\xi\in(\tau^*,\tau_j)$ выполняется включение $y(\xi;t_0,y_0)\in G^-$, то существует момент времени $\xi^*<\xi$ такой, что

$$y(t;t_0,y_0)\in G^-,\quad t\in(\xi^*,\xi),\quad y(\xi^*;t_0,y_0)\in\partial G^-.$$

Поскольку

$$w(y(\xi^*;t_0,y_0))=0,\quad \dot{w}(y(t;t_0,y_0))|_{t=\xi^*}>0,$$

то $w(y(t;t_0,y_0))>0$ при всех $t\in(\xi^*,\xi^*+\beta)$, $\beta>0$, что противоречит установленному факту $y(t;t_0,y_0)\in G^-$ при всех $t\in(\xi^*,\xi)$. Таким образом, существует момент времени $\underline{\eta}\in[t_0,\tau_j)$ такой, что

$$y(t;t_0,y_0)\in\overline{G}^-,\quad t\in[t_0,\underline{\eta}],\quad y(t;t_0,y_0)\in G^+,\quad t\in(\underline{\eta},\tau_j].$$

Покажем, от противного, что решение $y(t;t_0,y_0)$ не выходит из множества $K_\varepsilon\cap D$ при всех $t\in[t_0,\underline{\eta}]$. Предположим, что существует момент времени $t^*\in[t_0,\underline{\eta})$ такой, что

$$v(y(t;t_0,y_0))<\widetilde{\gamma},\quad t\in[t_0,t^*),\quad v(y(t^*;t_0,y_0))=\widetilde{\gamma},$$

тогда

$$\widetilde{\gamma}=v(y(t^*;t_0,y_0))=v(y_0)+\int\limits_{t_0}^{t^*}Dv(y(s;t_0,y_0)\,ds\leq v(y_0)<l<\widetilde{\gamma}.$$

Полученное противоречие доказывает включение $y(t;t_0,y_0)\in K_\varepsilon\cap D$ при всех $t\in[t_0,\underline{\eta}]$.

Докажем, далее, что $y(t;t_0,y_0)\in K_\varepsilon\cap D$ при всех $t\in(\underline{\eta},\tau_j]$.

Предположим, от противного, что существует момент времени $\widetilde{t}\in(\underline{\eta},\tau_j]$ такой, что выполняются условия

$$v(y(\widetilde{t};t_0,y_0))=\widetilde{\gamma},\quad v(y(t;t_0,y_0))<\widetilde{\gamma},\quad t\in[\underline{\eta},\widetilde{t}).$$

С учетом того, что $v(y(\underline{\eta};t_0,y_0))<l$, имеет место цепочка неравенств

$$\int\limits_{\psi_1(\widetilde{\gamma})}^{\widetilde{\gamma}}\frac{ds}{\varphi_1(s)}<\int\limits_{v(y(\underline{\eta};t_0,y_0))}^{\widetilde{\gamma}}\frac{ds}{\varphi_1(s)}\le\int\limits_{v(y(\underline{\eta};t_0,y_0))}^{v(y(\widetilde{t};t_0,y_0))}\frac{ds}{\varphi_1(s)}<\widetilde{t}-\underline{\eta}\le\tau_j-t_0\le\theta_2.$$

Учитывая, что $\widetilde{\gamma}<a_0$, получаем противоречие с условием 2 теоремы 3.1.

Таким образом, $a(\|y(t;t_0,x_0)\|)\le v(y(t;t_0,y_0))<\widetilde{\gamma}<a(\varepsilon)$ при $t\in[\underline{\eta},\tau_j]$, откуда следует, что $\|y(t;t_0,y_0)\|<\varepsilon$ при $t\in[\underline{\eta},\tau_j]$.

Докажем далее, что $v(y(\tau_j+0;t_0,y_0))<l$. Из условия 2а) предположения 3.1 следует, что

$$\int\limits_{v(y(\underline{\eta};t_0,y_0))}^{v(y(\tau_j;t_0,y_0))}\frac{ds}{\varphi_1(s)}\le\tau_j-\underline{\eta}<\tau_j-t_0\le\theta_2. \tag{3.4}$$

Учитывая, что $v(y(\tau_j;t_0,y_0))<\widetilde{\gamma}<a_0$, из условия 2 теоремы 3.1 находим

$$\int\limits_{\psi_1(v(y(\tau_j;t_0,y_0)))}^{v(y(\tau_j;t_0,y_0))}\frac{ds}{\varphi_1(s)}\ge\theta_2. \tag{3.5}$$

Сопоставляя (3.4) и (3.5), получаем

$$\int\limits_{v(y(\underline{\eta};t_0,y_0))}^{\psi_1(v(y(\tau_j;t_0,y_0)))}\frac{ds}{\varphi_1(s)}\le 0.$$

Отсюда следует, что

$$v(y(\tau_j+0;t_0,y_0))\le\psi_1(v(y(\tau_j;t_0,y_0)))\le v(y(\underline{\eta};t_0,y_0))\le v(y_0)<l.$$

Таким образом, решение $y(t;t_0,y_0)$ не выходит из множества $K_\varepsilon\cap D$ на интервале $[t_0,\tau_j]$ и $v(y(\tau_j+0;t_0,y_0))<l$, а для завершения доказательства достаточно воспользоваться методом математической индукции.

Притяжение. Пусть $\rho=\delta(\Delta,t_0)>0$ (см. определение 2.1б)). Покажем, что если $y_0\in K_\rho$, то $\|y(t;t_0,y_0)\|\to 0$ при $t\to\infty$.

Последовательность $\{v(y(\tau_i;t_0,y_0))\}_{k=j}^{\infty}$, как следует из доказательства устойчивости, является убывающей, поэтому существует предел этой последовательности, который обозначим через ξ и предположим, что $\xi > 0$. Тогда

$$v(y(\tau_i+0;t_0,y_0)) \ge \xi, \quad i=j, \quad j+1,\ldots.$$

Докажем, что для всех $k=j+1,\ldots$ выполняется неравенство

$$v(y(\tau_{k-1}+0;t_0,y_0)) - v(y(\tau_k+0;t_0,y_0)) \ge \gamma^*, \tag{3.6}$$

где γ^* — положительная постоянная.

По доказанному выше возможны три случая:

1) $y(t;t_0,y_0) \in \overline{G}^+ \cap D$ при всех $t \in (\tau_{k-1},\tau_k]$;

2) $y(t;t_0,y_0) \in \overline{G}^- \cap D$ при всех $t \in (\tau_{k-1},\tau_k]$;

3) существует момент времени $\eta \in (\tau_{k-1},\tau_k]$ такой, что $y(t;t_0,y_0) \in G^- \cup \partial G^-$ при всех $t \in (\tau_{k-1},\eta]$ и $y(t;t_0,y_0) \in G^+ \cup \partial G^+$ при всех $t \in [\eta,\tau_k]$.

В первом случае из условия 2a) предположения 3.1 следует неравенство

$$\int\limits_{v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0))}^{v(y(\tau_i;t_0,y_0))} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \le \tau_i - \tau_{i-1} \le \theta_2.$$

С другой стороны, из условия теоремы 3.1 следует, что

$$\int\limits_{\psi_1(v(y(\tau_i;t_0,y_0)))}^{v(y(\tau_i;t_0,y_0))} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \ge \theta_2 + \gamma.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_{v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0))}^{\psi_1(v(y(\tau_i;t_0,y_0)))} \frac{ds}{\varphi_1(s)} \le -\gamma.$$

Обозначая $c_1 = \min_{\xi\le s\le a_0}\varphi_1(s)$, получаем цепочку неравенств

$$v(y(\tau_i+0;t_0,y_0)) - v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0)) \le \psi_1(v(y(\tau_i;t_0,y_0))) - v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0)) \le -\gamma c_1.$$

В случае 2 обозначим $c_2 = \min_{\xi\le s\le a_0}\varphi_2(s)$. Вследствие условия теоремы 3.1 имеем

$$\theta_1 \ge \int\limits_{v(y(\tau_i;t_0,y_0))}^{\psi_2(v(y(\tau_i;t_0,y_0)))} \frac{ds}{\varphi_2(s)} + \gamma.$$

Сопоставляя это неравенство с условием теоремы

$$-\int\limits_{v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0))}^{v(y(\tau_i;t_0,y_0))} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \ge \tau_i - \tau_{i-1} \ge \theta_1,$$

получаем
$$\int\limits_{\psi_2(v(y(\tau_i;t_0,y_0)))}^{v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0))} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \geq \gamma.$$

Таким образом,
$$v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0)) - v(y(\tau_i+0;t_0,y_0)) \geq v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0)) - \psi_2(v(y(\tau_i+0;t_0,y_0))) \geq \gamma c_2.$$

В третьем случае аналогично случаю 1 можно получить оценку
$$v(y(\tau_i+0;t_0,y_0)) - v(y(\eta;t_0,y_0)) < -\gamma c_1,$$

исходя из которой, находим
$$\begin{aligned} v(y(\tau_i+0;t_0,y_0)) - v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0) &\leq v(y(\tau_i+0;t_0,y_0)) - v(y(\eta;t_0,y_0)) + \\ &+ v(y(\eta;t_0,y_0)) - v(y(\tau_{i-1}+0;t_0,y_0)) \leq \\ &\leq -\gamma c_1 + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\eta} Dv(s,x(s;t_0,x_0))\,ds \leq -\gamma c_1. \end{aligned}$$

Отсюда можем сделать вывод о выполнении неравенства (3.6) с постоянной
$$\gamma^* = \min\{\gamma c_1, \gamma c_2\}.$$

Неравенство (3.6) позволяет сделать вывод, что $v(y(\tau_i+0;t_0,y_0)) \to 0$ при $i \to \infty$. Учитывая условие 1 теоремы 3.1, получаем $\|y(\tau_i;t_0,y_0)\| \to 0$ при $i \to \infty$.

Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\sigma(\varepsilon,t_0,x_0) > 0$ такое, что
$$\|y(t;t_0,x_0)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq t_0 + \sigma(\varepsilon,t_0,x_0).$$

По доказанному выше для $\omega(\varepsilon) = \varepsilon e^{-L\theta_2}$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что $\|y(\tau_i+0;t_0,y_0)\| < \varepsilon e^{-L\theta_2}$ при $i > N(\varepsilon)$. Пусть $\sigma(\varepsilon,t_0,y_0) = \tau_{N(\varepsilon)+1} - t_0$. На интервале времени $(\tau_i,\tau_{i+1}]$ решение $y(t;t_0,y_0)$ допускает интегральное представление
$$y(t;t_0,y_0) = y(\tau_i+0;t_0,y_0) + \int\limits_{\tau_i}^{t} f(s,y(s;t_0,y_0))\,ds.$$

Используя условие Липшица, находим оценку при всех $t \in (\tau_i,\tau_{i+1}]$:
$$\|y(t;t_0,x_0)\| \leq \|y(\tau_i;t_0,y_0)\| + \int\limits_{\tau_i}^{t} L\|y(s;t_0,y_0)\|\,ds.$$

На основе неравенства Гронуолла – Беллмана имеем

$$\|y(t;t_0,y_0)\| \le \|y(\tau_i+0;t_0,y_0)\|e^{L(t-\tau_i)} \le \|y(\tau_i+0;t_0,y_0)\|e^{L\theta_2}$$

при $t\in(\tau_i,\tau_{i+1}]$, поэтому $\|y(t;t_0,y_0)\| < \varepsilon e^{-L\theta_2}e^{L\theta_2} = \varepsilon$ при $t \ge t_0+\sigma(\varepsilon,t_0,y_0)$.

Теорема доказана.

4. Оценки вспомогательной функции и условия устойчивости. Определим операторы усреднения

$$M_t\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s)\,ds,$$

$$M_k\{g^k\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g^k$$

и формы

$$W_1(t,y) = \sum_{|\nu|=2r+1}(M_t\{f_\nu(t)\}-f_\nu(t))y^\nu,$$

$$W_2(k,y) = \sum_{|\nu|=2r+1}(y^T(M_k\{(I+B_k)^TPg_\nu^k\}-$$
$$-(I+B_k)^TPg_\nu^k)+(M_k^T\{(I+B_k)^TPg_\nu^k\}-(I+B_k)^TPg_\nu^k)y)y^\nu,$$

$$W_3(y) = \sum_{|\nu|=2r+1}(y^TPM_t\{f_\nu(t)\}+M_t^T\{f_\nu(t)\}Py)y^\nu,$$

$$W_4(y) = \sum_{|\nu|=2r+1}(y^TM_k\{(I+B_k)^TPg_\nu^k\}+M_k^T\{(I+B_k)^TPg_\nu^k\}y)y^\nu,$$

$$W_5(y) = \sum_{|\nu|=2r+1}(\operatorname{grad}_y W_3(y))^TM_t\{f_\nu(t)\}y^\nu.$$

Для дальнейшего необходимы некоторые предположения относительно введенных форм.

Предположение 4.1. *Существуют постоянные $L_1>0$, $L_2>0$, $c_0>0$, ζ_m, ζ_M такие, что*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|W_1(t,y)\| \le L_1\|y\|^{2r+1},$$

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\|W_2(k,y)\| \le L_2\|y\|^{2r+2},$$

$$\zeta_m \le \frac{W_3(y)}{v^{r+1}(y)} \le \zeta_M,$$

$$\|\operatorname{grad}_y W_3(y)\| \le c_0\|y\|^{2r+1}.$$

Если $\zeta_m < 0$, *то будем рассматривать отдельно два случая:*

A_1) *существует постоянная* $\delta > 0$ *такая, что при всех* $\eta > 0, \eta \in (-\zeta_M, -\zeta_m)$

$$(\mathrm{grad}_y W_3(y))^T Ay \geq \delta \|y\|^{2r+2}$$

для тех $y \in D$, *для которых* $W_3(y) + \eta v^{r+1}(y) = 0$;

A_2) *при всех* $\eta > 0, \eta \in (-\zeta_M, -\zeta_m)$

$$(\mathrm{grad}_y W_3(y))^T Ay \geq 0$$

для тех $y \in D$, *для которых* $W_3(y) + \eta v^{r+1}(y) = 0$, *и существует постоянная* $\mu > 0$ *такая, что*

$$W_5(y) \geq \mu \|y\|^{4r+2}, \quad y \in D.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство вспомогательных функций

$$w_\eta(y) = W_3(y) + \eta v^{r+1}(y), \quad \eta > 0,$$

семейства множеств

$$G_\eta^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : w_\eta(y) > 0\},$$

$$G_\eta^- = \{y \in \mathbb{R}^n : w_\eta(y) < 0\}$$

и определим функции $\delta_+(\eta)$ и $\delta_-(\eta)$:

$$\sup_{y \in \overline{G}_\eta^+} \frac{W_4(y)}{v^{r+1}(y)} = \delta_+(\eta), \quad \sup_{y \in \overline{G}_\eta^-} \frac{W_4(y)}{v^{r+1}(y)} = \delta_-(\eta).$$

Отметим некоторые, легко проверяемые, свойства семейств множеств G_η^+ и G_η^- и функций $\delta_+(\eta), \delta_-(\eta)$:

1) если $\eta_1 > \eta_2$ и $G_{\eta_1}^+ \neq \mathbb{R}^n, G_{\eta_2}^+ \neq \mathbb{R}^n$, то $G_{\eta_1}^+ \supset G_{\eta_2}^+$;

2) если $\eta_1 > \eta_2$ и $G_{\eta_1}^- \neq \varnothing, G_{\eta_2}^- \neq \varnothing$, то $G_{\eta_1}^- \subset G_{\eta_2}^-$;

3) если $\zeta_m < 0$ и $\eta \in (-\zeta_M, -\zeta_m), \eta > 0$, то $G_\eta^- \neq \varnothing$ и $G_\eta^+ \neq \varnothing$, если же $\zeta_m \geq 0$, то при всех $\eta \in [0, \infty)$ $G_\eta^- = \varnothing$;

4) если $\zeta_m < 0$, то $D(\delta_+) = D(\delta_-) = (-\zeta_M, -\zeta_m) \cap (0, \infty)$ и функция $\delta_+(\eta)$ является возрастающей, а функция $\delta_-(\eta)$ — убывающей на множестве $D(\delta_+)$.

Применим функции $v(y)$ и $w_\eta(y)$ для исследования устойчивости нулевого состояния равновесия системы (2.1). Рассмотрим условие 1 предположения 3.1. В случае A_1 в достаточно малой окрестности состояния равновесия $y = 0$ выполняется неравенство

$$\left.\frac{dw_\eta}{dt}\right|_{(2.1)} \geq \delta \|y\|^{2r+2}.$$

В случае A_2 в достаточно малой окрестности положения равновесия $y = 0$ на множестве $\partial G_\eta^+ = \partial G_\eta^-$ выполняется неравенство

$$\left.\frac{dw_\eta}{dt}\right|_{(2.1)} \geq \mu\|y\|^{4r+2} - \eta^2(r+1)v^{2r+1} -$$

$$- (\mathrm{grad}_y w_\eta(y))^T \sum_{|\nu|=2r+1} (M_t\{f_\nu(t)\} - f_\nu(t))y^\nu \geq \mu\|y\|^{4r+2} -$$

$$- \eta^2\lambda_M^{2r+1}(P)(r+1)\|y\|^{4r+2} - L_1\|\mathrm{grad}_y w_\eta(y)\|\|y\|^{2r+1}.$$

С учетом неравенства

$$\|\mathrm{grad}_y w_\eta(y)\| \leq \|\mathrm{grad}_y W_3(y)\| + \eta\|\mathrm{grad}_y v^{1+r}(y)\| \leq$$

$$\leq c_0\|y\|^{2r+1} + \eta(r+1)v^r(y)\|\mathrm{grad}_y v(y)\| \leq (c_0 + 2\eta(r+1)\|P\|^{r+1})\|y\|^{2r+1}$$

получаем оценку

$$\left.\frac{dw_\eta}{dt}\right|_{(2.1)} \geq (\mu - \eta^2\lambda_M^{2r+1}(P)(r+1) - L_1(c_0 + 2\eta(r+1)\|P\|^{r+1}))\|y\|^{4r+2}.$$

Неравенство

$$\mu - \eta^2\lambda_M^{2r+1}(P)(r+1) - L_1(c_0 + 2\eta(r+1)\|P\|^{r+1}) > 0$$

гарантирует выполнение условия 1 предположения 3.1.

Рассмотрим условие 2 предположения 3.1 на множестве $\overline{G_\eta^+}$:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} \leq (\mathrm{grad}_y v(y))^T \sum_{|\nu|=2r+1} M_t\{f_\nu(t)\}y^\nu -$$

$$- (\mathrm{grad}_y v(y))^T \sum_{|\nu|=2r+1} (M_t\{f_\nu(t)\} - f_\nu(t))y^\nu \leq W_3(y) +$$

$$+ \|\mathrm{grad}_y v(y)\|L_1\|y\|^{2r+1} \leq W_3(y) + 2\|P\|L_1\|y\|^{2r+2} \leq$$

$$\leq \left(\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right)v^{1+r}.$$

Рассмотрим условие 2 предположения 3.1 на множестве $\overline{G_\eta^-}$:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} \leq -\eta v^{1+r} + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}v^{1+r} = \left(-\eta + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right)v^{1+r}.$$

Рассмотрим условие 3 предположения 3.1 на множестве $\overline{G_\eta^+}$:

$$v(y(\tau_k+0)) \leq v(y(\tau_k)) + \left(\delta_+(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right)v^{1+r} + C_1v^{2(r+1)},$$

где C_1 — положительная постоянная. Аналогично на множестве $\overline{G}_\eta^-$ справедлива оценка

$$v(y(\tau_k+0)) \le v(y(\tau_k)) + \left(\delta_-(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right) v^{1+r} + C_2 v^{2(r+1)},$$

где C_2 — положительная постоянная.

Таким образом, в условиях теоремы 3.1 имеем

$$\varphi_1(s) = \begin{cases} \left(\zeta_M + \dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right) s^{r+1}, & \zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} > 0, \\ \varepsilon s^{r+1}, & \zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} \le 0, \end{cases}$$

$$\varphi_2(s) = \left(\eta - \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right) s^{1+r}, \quad \eta > \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)},$$

$$\psi_1(s) = s + \left(\delta_+(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right) s^{1+r} + C_1 s^{2(r+1)},$$

$$\psi_2(s) = s + \left(\delta_-(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right) s^{1+r} + C_1 s^{2(r+1)},$$

где ε — произвольное сколь угодно малое положительное число.

Применение теоремы 3.1 приводит к условиям асимптотической устойчивости состояния равновесия $y = 0$ системы (2.1), которые распадаются на несколько случаев.

Случай 1. Предположим, что выполняются условия A_1 и неравенства

$$\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} > 0, \quad \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} < \eta < -\zeta_m, \quad \eta > -\zeta_M,$$

$$\delta_-(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} < \theta_1 \left(\eta - \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right), \tag{4.1}$$

$$-\left(\delta_+(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right) > \theta_2 \left(\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right). \tag{4.2}$$

Рассмотрим неравенство (4.1), записанное в виде

$$\theta_1\eta - \delta_-(\eta) > \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}.$$

Поскольку левая часть этого неравенства является возрастающей функцией, из неравенства

$$\frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \delta_-\left(\frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right) > \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$$

следует, что неравенство (4.1) выполняется при всех $\eta > \dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$. В этом случае обозначим $\eta_M = \dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$. Если выполняется неравенство

$$-\theta_1\zeta_m - \delta_-(-\zeta_m - 0) < \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)},$$

то неравенство (4.1) не выполняется ни в одной точке интервала $\left(\dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, -\zeta_m\right)$. В этом случае положим $\eta_M = -\zeta_m$. В случае, когда уравнение

$$\theta_1\eta - \delta_-(\eta) = \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$$

имеет (единственный) корень $\eta_M \in \left(\dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, -\zeta_m\right)$, неравенство (4.1) выполняется при всех $\eta \in (\eta_M, -\zeta_m)$. Рассмотрим неравенство (4.2), записанное в виде

$$\delta_+(\eta) < -\frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right).$$

Если выполняется неравенство

$$\delta_+(-\zeta_m - 0) < -\frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2L_1\|P\|}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right),$$

то неравенство (4.2) выполняется при всех $\eta \in \left(\dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, -\zeta_m\right)$. В этом случае положим $\eta_m = -\zeta_m$, если же выполняется неравенство

$$\delta_+\left(\frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right) > -\frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right),$$

то неравенство (4.2) не может выполняться ни при одном $\eta \in \left(\dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, -\zeta_m\right)$. В этом случае положим $\eta_m = \dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$. В случае, когда уравнение

$$\delta_+(\eta) = -\frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2L_1\|P\|}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right)$$

имеет корни на интервале $\left(\dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, -\zeta_m\right)$, неравенство (4.2) выполняется при всех $\eta \in$ $\in \left(\dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, \eta_m\right)$, где η_m —один из корней.

Итогом приведенных рассуждений является следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (2.1) удовлетворяет условиям предположения 4.1 и выполняются условие A_1 и неравенства*

$$\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} > 0, \quad \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} \le \eta_M < \eta_m \le -\zeta_m.$$

Тогда состояние равновесия $y = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Случай 2. Предположим, что выполняются условие A_1 и неравенства

$$\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} < 0, \quad \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} < \eta < -\zeta_m, \quad \eta > -\zeta_M,$$

$$\delta_-(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} < \theta_1\left(\eta - \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right), \tag{4.3}$$

$$\delta_+(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} < 0. \tag{4.4}$$

Рассмотрим неравенство (4.3), записанное в виде

$$\theta_1\eta - \delta_-(\eta) > \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}.$$

Поскольку левая часть этого неравенства является возрастающей функцией, из неравенства

$$-\zeta_M\theta_1 - \delta_-(-\zeta_M + 0) > \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$$

следует, что неравенство (4.3) выполняется при всех $\eta > -\zeta_M$. В этом случае обозначим $\eta_M = -\zeta_M$. Если выполняется неравенство

$$-\theta_1\zeta_m - \delta_-(-\zeta_m - 0) < \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)},$$

то неравенство (4.3) не выполняется ни в одной точке интервала $(-\zeta_M, -\zeta_m)$. В этом случае положим $\eta_M = -\zeta_m$. В случае, когда уравнение

$$\theta_1\eta - \delta_-(\eta) = \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$$

имеет (единственный) корень $\eta_M \in (-\zeta_M, -\zeta_m)$, неравенство (4.3) выполняется при всех $\eta \in (\eta_M, -\zeta_m)$.

Если $\delta_+(-\zeta_m - 0) + \dfrac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} < 0$, то положим $\eta_m = -\zeta_m$, если же $\delta_+\left(\dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right) + \dfrac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} > 0$, то положим $\eta_m = -\zeta_M$. В случае, когда уравнение

$$\delta_+(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} = 0$$

имеет корень на интервале $(-\zeta_M, -\zeta_m)$, обозначим этот корень через η_m.

Теорема 4.2. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (2.1) удовлетворяет условиям предположения 4.1 и выполняются условие A_1 и неравенства*

$$\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} < 0, \quad -\zeta_M \le \eta_M < \eta_m \le -\zeta_m.$$

Тогда состояние равновесия $y = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (2.1) в случае A_2.

Случай 3. Предположим, что выполняются неравенства

$$\mu - \eta^2\lambda_M^{2r+1}(P)(r+1) - L_1(c_0 + 2\eta(r+1)\|P\|^{r+1}) > 0,$$

$$\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} > 0, \quad \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} < \eta < -\zeta_m, \quad \eta > -\zeta_M,$$

$$\left(\delta_-(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right) < \theta_1\left(\eta - \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right), \tag{4.5}$$

$$-\left(\delta_+(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right) > \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right), \tag{4.6}$$

$$\mu - c_0L_1 + L_1^2(r+1)\|P\| \ge 0.$$

Обозначим

$$\zeta^* = \frac{-L_1(r+1)\|P\|^{r+1} + \sqrt{(r+1)(\mu - c_0L_1)\|P\|^{1+2r} + L_1^2(r+1)^2\|P\|^{2(r+1)}}}{(r+1)\lambda_M^{2r+1}(P)},$$

$$\zeta_m^* = \min\{-\zeta_m, \zeta^*\}.$$

Рассмотрим неравенство (4.5), записанное в виде

$$\theta_1\eta - \delta_-(\eta) > \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}.$$

Поскольку левая часть этого неравенства является возрастающей функцией, из неравенства

$$\frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \delta_-\left(\frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right) > \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$$

следует, что неравенство (4.5) выполняется при всех $\eta > \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$. В этом случае обозначим $\eta_M = \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$. Если выполняется неравенство

$$\theta_1\zeta_m^* - \delta_-(\zeta_m^* - 0) < \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)},$$

то неравенство (4.5) не выполняется ни в одной точке интервала $\left(\frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, \zeta_m^*\right)$. В этом случае положим $\eta_M = \zeta_m^*$. В случае, когда уравнение

$$\theta_1\eta - \delta_-(\eta) = \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$$

имеет (единственный) корень $\eta_M \in \left(\frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, \zeta_m^*\right)$, неравенство (4.5) выполняется при всех $\eta \in (\eta_M, \zeta_m^*)$. Рассмотрим неравенство (4.6), записанное в виде

$$\delta_+(\eta) < -\frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right).$$

Если выполняется неравенство

$$\delta_+(\zeta_m^* - 0) < -\frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2L_1\|P\|}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right),$$

то неравенство (4.6) выполняется при всех $\eta \in \left(\frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, \zeta_m^*\right)$. В этом случае положим $\eta_m = \zeta_m^*$, если же выполняется неравенство

$$\delta_+\left(\frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right) > -\frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right),$$

то неравенство (4.6) не может выполняться ни при одном $\eta \in \left(\frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, \zeta_m^*\right)$. В этом случае положим $\eta_m = \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$. Если уравнение

$$\delta_+(\eta) = -\frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} - \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2L_1\|P\|}{\lambda_m^{1+r}(P)}\right)$$

имеет корень $\eta_m \in \left(\dfrac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, \zeta_m^*\right)$, неравенство (4.6) выполняется при всех

$$\eta \in \left(\frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}, \eta_m\right).$$

Теорема 4.3. *Предположим, что система дифференциальных уравнений удовлетворяет условиям предположения 4.1 и выполняются неравенства*

$$\mu - c_0 L_1 + L_1^2(r+1)\|P\| > 0,$$

$$\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} > 0, \quad \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} \le \eta_M < \eta_m \le \zeta_m^*.$$

Тогда состояние равновесия $y = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Случай 4. Предположим, что выполняются условие A_2 и неравенства

$$\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} < 0, \quad \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} < \eta < -\zeta_m, \quad \eta > -\zeta_M,$$

$$\delta_-(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} < \theta_1\left(\eta - \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right), \tag{4.7}$$

$$\delta_+(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} < 0. \tag{4.8}$$

Рассмотрим неравенство (4.7), записанное в виде

$$\theta_1\eta - \delta_-(\eta) > \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}.$$

Поскольку левая часть этого неравенства является возрастающей функцией, из неравенства

$$-\zeta_M\theta_1 - \delta_-(-\zeta_M + 0) > \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$$

следует, что неравенство (4.7) выполняется при всех $\eta > -\zeta_M$. В этом случае обозначим $\eta_M = -\zeta_M$. Если выполняется неравенство

$$\theta_1\zeta_m^* - \delta_-(\zeta_m^* - 0) < \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)},$$

то неравенство (4.7) не выполняется ни в одной точке интервала $(-\zeta_M, \zeta_m^*)$. В этом случае положим $\eta_M = \zeta_m^*$. В случае, когда уравнение

$$\theta_1\eta - \delta_-(\eta) = \frac{L_2}{\lambda_m^{1+r}(P)} + \frac{2\theta_1\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)}$$

имеет (единственный) корень $\eta_M \in (-\zeta_M, \zeta_m^*)$, неравенство (4.7) выполняется при всех $\eta \in (\eta_M, \zeta_m^*)$.

Если $\delta_+(\zeta_m^*) + \dfrac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} < 0$, то положим $\eta_m = \zeta_m^*$, если же $\delta_+(-\zeta_M + 0) + \dfrac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} > 0$, то положим $\eta_m = -\zeta_M$. В случае, когда уравнение

$$\delta_+(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)} = 0$$

имеет корень на интервале $(-\zeta_M, \zeta_m^*)$, обозначим этот корень через η_m.

Теорема 4.4. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (2.1) удовлетворяет условиям предположения 4.1 и выполняются условие A_2 и неравенства*

$$\mu - c_0 L_1 + L_1^2 (r+1)\|P\| > 0,$$

$$\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} < 0, \quad -\zeta_M \le \eta_M < \eta_m \le \zeta_m^*.$$

Тогда состояние равновесия $y = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим отдельно случай $\zeta_m \ge 0$. В этом случае состояние равновесия $x = 0$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений является вполне неустойчивым, а множества $G_\eta^- = \varnothing$ при всех $\eta > 0$, поэтому теорема 3.1 неприменима, но можно применить утверждение теоремы 18.2 [1]. Приведем без доказательства соответствующее утверждение.

Теорема 4.5. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (2.1) удовлетворяет условиям предположения 4.1 и выполняются неравенства*

$$-\left(\delta_+(0) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right) > \left(\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right)\theta_2.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво.

5. Пример. В качестве приложения полученных результатов рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}
\frac{dx_1}{dt} = (-\alpha + \varepsilon\cos t)x_1^3 + \varepsilon \sin t x_2^3, \\
\frac{dx_2}{dt} = \varepsilon \sin t x_1^3 + (\frac{\alpha}{2} + \varepsilon \cos t)x_2^3, \quad t \ne \tau_k, \\
\Delta x_1(t) = (\cos\psi - 1)x_1 + \sin\psi x_2 + \gamma x_1^3 - \delta \operatorname{tg}\psi x_2^3, \\
\Delta x_2(t) = -\sin\psi x_1 + (\cos\psi - 1)x_2 - \gamma \operatorname{tg}\psi x_1^3 - \delta x_2^3, \quad t = \tau_k,
\end{gathered} \tag{5.1}$$

где α, β, γ, δ — положительные параметры, причем $\alpha > \beta$, $\delta > \gamma$, $\cos\psi > 0$, ε — малый параметр, $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторая последовательность, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < \theta_1 \le \tau_{k+1} - \tau_k \le \theta_2 < \infty.$$

Система уравнений линейного приближения

$$\frac{dx_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0, \quad t \neq \tau_k,$$

$$\Delta x_1(t) = (\cos\psi - 1)x_1 + \sin\psi x_2,$$

$$\Delta x_2(t) = -\sin\psi x_1 + (\cos\psi - 1)x_2, \quad t = \tau_k,$$

имеет первый интеграл $v(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Нетрудно видеть, что

$$W_1(t,x) = -\varepsilon(\cos tx_1^3 + \sin tx_2^3, \sin tx_1^3 + \cos tx_2^3)^T, \quad W_2(k,x) = 0,$$

$$W_3(x) = -\alpha x_1^4 + \beta x_2^4, \quad W_4(x) = \frac{1}{\cos\psi}(\gamma x_1^4 - \delta x_2^4) + o(\|x\|^4),$$

$$W_5(x) = 4\alpha^2 x_1^6 + 4\beta^2 x_2^6.$$

Постоянные в предположении 4.1 есть $L_1 = |\varepsilon|$, $L_2 = 0$, $c_0 = 4\alpha^2$, $\mu = 4\beta^2$ $\zeta_m = -\alpha$, $\zeta_M = \beta$. Условия устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (3.1) сводятся к совместности системы неравенств

$$\mu - \eta^2\lambda_M^{2r+1}(P)(r+1) - L_1(c_0 + 2\eta(r+1)\|P\|^{r+1}) > 0,$$

$$\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)} > 0, \quad \eta > \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{1+r}(P)},$$

$$\left(\delta_-(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right) < \theta_1\left(\eta - \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right),$$

$$-\left(\delta_+(\eta) + \frac{L_2}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right) > \theta_2\left(\zeta_M + \frac{2\|P\|L_1}{\lambda_m^{r+1}(P)}\right).$$

Выберем $\eta = \frac{\alpha}{2}$. Нетрудно вычислить

$$\delta_-\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\gamma}{\cos\psi}, \quad \delta_+\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\gamma(4-2\sqrt{3}) - \delta(7-4\sqrt{3})}{\cos\psi}.$$

Условия устойчивости системы уравнений (5.1) сводятся к проверке совместности системы неравенств

$$|\varepsilon|\left(4\alpha + \frac{1}{2}\right) < \frac{15}{16}\alpha, \quad 8|\varepsilon| < \frac{\alpha(\delta(7-4\sqrt{3}) - \gamma(5-2\sqrt{3}))}{\delta(7-4\sqrt{3}) - \gamma(3-2\sqrt{3})},$$

$$\frac{\gamma}{\cos\psi} < \theta_1\left(\frac{\alpha}{2} - 4|\varepsilon|\right), \quad \frac{\delta(7-4\sqrt{3}) - \gamma(4-2\sqrt{3})}{\cos\psi} > \theta_2\left(\frac{\alpha}{2} + 4|\varepsilon|\right),$$

$$\frac{\gamma}{\delta} < \frac{7-4\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}.$$

6. Обсуждение результатов. Отметим, что в работах [1, 4, 8] приведены теоремы прямого метода Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. При этом используются непрерывно дифференцируемые вспомогательные функции. Теоремы 18.1 – 18.3, приведенные в монографии [1], позволяют установить достаточные условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Следует, однако, отметить, что эти условия могут быть применены лишь в случае наличия свойства асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений или (и) свойства асимптотической устойчивости нулевой неподвижной точки отображения скачка. Таким образом, достаточные условия устойчивости в этих теоремах не могут быть обращены. Обобщение прямого метода Ляпунова на основе кусочно-дифференцируемых функций Ляпунова приведено в монографии [3] и, в некоторых случаях, допускает обращение (например, для периодических систем [13]). Однако в этом случае остается открытым вопрос о построении вспомогательной функции, решающей задачу об устойчивости (см. также [14]). В работе [7] приведено обобщение теорем 18.1 – 18.3, использующее две вспомогательные функции. Теорема 3.1 обобщает результаты работы [7] и применяется при исследовании устойчивости нулевого решения системы (2.1) в критическом случае. Отметим, что в отличие от результатов работы [7] в теореме 3.1 несколько ослаблены предположения относительно второй вспомогательной функции $w(y)$. В пункте 4 исследована асимптотическая устойчивость нулевого решения нестационарной системы с импульсным воздействием в частных случаях, когда все переменные являются „критическими” или когда система линейного приближения имеет первый интеграл. Эти результаты проиллюстрированы в пункте 5. Отметим, что в этом примере при достаточно малых $|\varepsilon|$ состояние равновесия $x = 0$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = (-\alpha + \varepsilon\cos t)x_1^3 + \varepsilon\sin t x_2^3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \varepsilon\sin t x_1^3 + \left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\cos t\right)x_2^3$$

является неустойчивым. Если рассмотреть точечное отображение

$$\overline{x}_1 = x_1 + (\cos\psi - 1)x_1 + \sin\psi x_2 + \gamma x_1^3 - \delta\,\mathrm{tg}\,\psi x_2^3,$$

$$\overline{x}_2 = x_2 - \sin\psi x_1 + (\cos\psi - 1)x_2 - \gamma\,\mathrm{tg}\,\psi x_1^3 - \delta x_2^3,$$

то неподвижная точка $x = 0$ этого отображения будет неустойчивой. Таким образом, к исследованию устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (5.1) нельзя применить теоремы 18.1 – 18.3 монографии [1]. Теорема 3.1 и результаты пункта 4 позволяют установить асимптотическую устойчивость состояния равновесия $x = 0$ в этом случае.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
2. *Перестюк Н. А.* Устойчивость решений линейных систем с импульсным воздействием // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. — 1977. — № 19. — С. 71 – 76.
3. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1989. — 275 p.
4. *Перестюк Н. А.* К вопросу устойчивости положения равновесия импульсных систем // [Год. на ВУЗ : Прилож. мат.] — София, 1976. — **11**, кн. 1. — С. 145 – 150.
5. *Ignat'ev A. O., Ignat'ev O. A., Soliman A. A.* Asymptotic stability and instability of the solutions of systems with impulse action // Math. Notes. — 2006. — **80**, № 4. — P. 491 – 499.
6. *Ignat'ev A. O.* On the stability ofinvariant sets of systems withimpulse effect // Nonlinear Anal. — 2008. — **69**. — P. 53 – 72.
7. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика. — 2004. — **40**, № 2. — С. 112 – 122.
8. *Перестюк М. О., Чернікова О. С.* Деякі сучасні аспекти теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 1. — С. 81 – 94.
9. *Черникова О.С.* Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1982. — **34**, № 5. — С. 601 – 607.
10. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Динамические системы-1. — М.: ВИНИТИ, 1985. — С. 7 – 149.
11. *Бабенко С. В., Слынько В. И.* Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием в критических случаях // Доп. НАН України. — 2008. — № 6. — С. 46 – 52.
12. *Слынько В. И.* Построение отображений Пуанкаре для голономной механической системы с двумя степенями свободы при наличии ударов // Прикл. механика. — 2008. — **44**, № 5. — С. 115 – 122.
13. *Gladilina R. I., Ignat'ev A. O.* On the stability of periodic impulsive systems // Mat. Notes. — 2004. — **76**, № 1. — P. 41 – 47.
14. *Dvirnyi A. I., Slyn'ko V. I.* Stabylity of solutions to impulsive differential equations in critical cases // Sib. Math. J. — 2011. — **52**, № 1. — P. 54 – 62.

Получено 22.04.11