УДК 517.98

ПРО ДЕЯКІ ПРИКЛАДИ В ТЕОРІЇ АБСТРАКТНИХ ЗАДАЧ КОШІ

А. В. Чайковський

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 7

We give examples of abstract Cauchy problems proving that the inclusions in the chain of function classes are strict, and disproving sufficient conditions for solvability of a Cauchy problem published earlier.

Приведены примеры абстрактных задач Коши, доказывающие строгость включений ряда функциональных классов и опровергающие опубликованное ранее достаточное условие разрешимости задачи Коши.

1. Вступ. Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, I — одиничний оператор у B.

Велика кількість диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу та їх систем зводяться до диференціальних рівнянь у банаховому просторі вигляду

$$x'(t) + Ax(t) = y(t),$$

де $t \in U$ (U — відрізок, піввісь або вся дійсна вісь), $y : U \to B$ — відома функція, $x : U \to B$ — невідома функція, $A : D(A) \subset B \to B$ — операторний коефіцієнт.

У багатьох випадках оператор A при цьому секторіальний. Нагадаємо, що лінійний оператор $A : D(A) \subset B \to B$ називають секторіальним, якщо множина $D(A)$ скрізь щільна в B та існують такі сталі $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, що для множини

$$S_{a,\varphi} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq a,\ |\arg(z-a)| < \varphi\}$$

виконуються умови:

1) $\sigma(A) \subset S_{a,\varphi}$;

2) $\exists C > 0\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash S_{a,\varphi},\ \lambda \neq a\ : \|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \dfrac{C}{|\lambda - a|}$.

У подальшому A — секторіальний оператор.

Властивості секторіальних операторів, зокрема дослідження операторної експоненти $K(t) := e^{-At}$, $t > 0$, теорію диференціальних рівнянь з секторіальним операторним коефіцієнтом та її застосування, викладено, наприклад, в [1–4]. Зокрема, детально вивчається задача Коші

$$x'(t) + Ax(t) = f(t), \quad t \in (0, T], \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

де $T > 0$, $f \in C([0,T], B)$, $x_0 \in B$. Зауважимо, що якщо існує розв'язок задачі Коші

$$x'(t) + Ax(t) = f(t), \quad t \in (0, T], \quad x(0) = \overline{0}, \tag{2}$$

то розв'язок задачі Коші (1) можна отримати з нього додаванням величини $K(t)x_0$. Тому далі будемо розглядати задачу (2).

В роботі [4] показано, що якщо функція f гельдерова на $[0,T]$, то задача (2) має розв'язок з класу $C^1([0,T],B)$. В монографії [3, с. 59] доведено, що при послабленні умови на f до локальної гельдеровості на $(0,T)$ і належності класу $L_1([0,T],B)$, задача (2) має розв'язок з класу $C^1((0,T],B) \cap C([0,T],B)$.

Можливість подальшого послаблення умов на функцію f досліджено в роботі [5]. Отримані результати зручно сформулювати, ввівши такі простори (тут $V(f,[a,b])$ — варіація функції f на відрізку $[a,b]$, $BV([a,b],B)$ — клас функцій $f : [a,b] \to B$ обмеженої варіації):

$$Y := \{f \in C([0,T],B) \mid \exists x \in C([0,T],B) - \text{розв'язок задачі Коші (2)}\},$$

$$Y_1 := \left\{f \in C([0,T],B) \mid \exists x \in C([0,T],B) \cap C^1((0,T],B) - \text{розв'язок задачі Коші (2)}\right\},$$

$$Y_2 := \left\{f \in C([0,T],B) \mid \exists x \in C^1([0,T],B) - \text{розв'язок задачі Коші (2)}\right\},$$

$$F := \left\{f \in C([0,T],B) \mid \forall t \in (0,T] : \int_0^t \frac{\|f(t-s)-f(t)\|}{s} ds < +\infty\right\},$$

$$F_1 := \left\{f \in C([0,T],B) \mid \forall [a,b] \subset (0,T] : \sup_{t\in[a,b]} \int_0^\delta \frac{\|f(t-s)-f(t)\|}{s} ds \to 0,\ \delta \to 0+\right\},$$

$$F_2 := \left\{f \in C([0,T],B) \mid \sup_{t\in[\delta,T]} \int_0^\delta \frac{\|f(t-s)-f(t)\|}{s} ds \to 0,\ \delta \to 0+\right\},$$

$$W := \{f \in C([0,T],B) \mid \forall t \in (0,T]\ \exists \delta = \delta(t) \in (0,t)\ :\ V(f,[t-\delta,t]) < +\infty\},$$

$$W_1 := \{f \in C([0,T],B) \mid \forall \delta \in (0,T) : V(f,[\delta,T]) < +\infty\},$$

$$W_2 := C([0,T],B) \cap BV([0,T],B).$$

В роботі [5] доведено включення

$$W_2 \cup F_2 \subset Y_2, W_1 \cup F_1 \subset Y_1, \quad W \cup F \subset Y. \tag{3}$$

Якщо б наведене нижче твердження з роботи [2, с. 111] було правильним, то воно посилювало б включення $F_1 \subset Y_1$.

Теорема 1 (Пазі). *Нехай A — секторіальний оператор, $f \in L_1([0,T],B)$ і для кожного $t \in (0,T)$ існують $\delta_t > 0$ і неперервна числова функція $W_t : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ така, що*

$$\|f(t)-f(s)\| \le W_t(|t-s|), \quad s \in [0,T],$$

і

$$\int_0^{\delta_t} \frac{W_t(\tau)}{\tau} d\tau < +\infty.$$

Тоді для кожного $x_0 \in B$ функція

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

є класичним розв'язком задачі Коші (1), тобто $x \in C([0,T],B) \cap C^1((0,T),B)$, $x(t) \in \in D(A)$, $t \in (0,T)$, і виконано умови (1).

Проте вдалося встановити, що це твердження є хибним. Метою даної роботи є побудова прикладів, що свідчать про хибність теореми 1 та дозволяють детальніше дослідити включення (3).

2. Основні приклади. ***Приклад 1 (необмежена похідна розв'язку).*** Нехай $B = L_1([0,+\infty))$ — простір інтегровних за Лебегом на півосі комплекснозначних функцій з нормою $\|y\| = = \int_0^\infty |y(t)|dt$, $T = 1$. Введемо кілька допоміжних функцій. Нехай $f_0 : (0,1] \to B$,

$$f_0(s) = \chi_{[\frac{1}{s}, \frac{1}{s}+1]}, s \in (0,1],$$

де

$$\chi_{[a,b]}(t) := \begin{cases} 1, & t \in [a,b], \\ 0, & t \notin [a,b], \end{cases}$$

— характеристична функція відрізка. Нехай також для довільних $\triangle > 0$, $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{\triangle}{2}\right)$ неперервну функцію $f_{\triangle,\varepsilon} : \mathbb{R} \to B$ визначено таким чином:

$$f_{\triangle,\varepsilon}(s) = f_0(s),\ s \in [\varepsilon, \triangle - \varepsilon];$$

$f_{\triangle,\varepsilon}$ дорівнює нульовому елементу, якщо аргумент не лежить на відрізку $[0,\triangle]$, і лінійна на відрізках $[0,\varepsilon]$, $[\triangle - \varepsilon, \triangle]$. Зауважимо, що

$$\|f_{\triangle,\varepsilon}(s)\| \le 1, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \triangle > 0, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{\triangle}{2}\right). \tag{4}$$

Визначимо тепер функцію f для задачі Коші формулою

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n f_{2^{-n-1},\,\varepsilon_n}(2^{-n} - s), \quad s \in [0,1],$$

де $\{\delta_n : n \ge 1\}$, $\{\varepsilon_n : n \ge 1\}$ — монотонно спадні до нуля послідовності дійсних чисел, до того ж

$$\varepsilon_n < 2^{-n-3}, \quad \delta_n \le 2^{-n}, \quad n \ge 1. \tag{5}$$

Зауважимо, що

$$f(s) = \delta_n f_{2^{-n-1},\,\varepsilon_n}(2^{-n} - s), \quad s \in [2^{-n-1}, 2^{-n}], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Звідси випливає неперервність функції f при $s > 0$. Крім того, враховуючи (4), (5), маємо

$$\|f(s)\| \le \delta_n \le 2^{-n} \le 2s, \quad s \in [2^{-n-1}, 2^{-n}], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

отже, функція f неперервна в нулі.

Доведемо, що функція f на кожному відрізку $[c,d] \subset (0,1]$ ліпшицева. З зображення (6) випливає, що достатньо перевірити ліпшицевість кожної функції $f_{2^{-n-1},\varepsilon_n}(s)$, $s \in [0, 2^{-n-1}]$, $n \in \mathbb{N}$. Для цього, в свою чергу, досить перевірити ліпшицевість функції f_0 на кожному з відрізків $[\varepsilon_n, 2^{-n-1} - \varepsilon_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Скористаємося рівністю

$$\|f_0(s_1) - f_0(s_2)\| = \int\limits_0^\infty |\chi_{[\frac{1}{s_2},\frac{1}{s_2}+1]}(\tau) - \chi_{[\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_1}+1]}(\tau)|d\tau = 2\min\left\{1, \left|\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right|\right\}, \quad s_1, s_2 > 0.$$

Тоді маємо потрібну ліпшицевість:

$$\|f_0(s_1) - f_0(s_2)\| \le 2\frac{|s_1 - s_2|}{\varepsilon_n^2}, \quad s_1, s_2 \in [\varepsilon_n, 2^{-n-1} - \varepsilon_n].$$

Визначимо оператор A формулою

$$(Ay)(\tau) = \tau y(\tau), \quad \tau \ge 0,$$

для всіх $y \in B$ таких, що $Ax \in B$. Тоді A — секторіальний оператор в B і операторна експонента задається формулою

$$(K(s)y)(\tau) = e^{-\tau s} y(\tau), \quad \tau \ge 0, \quad s > 0.$$

Тому, згідно з теоремою 3.2.2 [3, с. 59], функція $x(t) = \int_0^t K(t-s)f(s)\,ds$, $t \in [0,1]$, є розв'язком задачі Коші (2) і належить класу Y_1.

Покажемо, що похідна $x'(t) = \int_0^t K'(t-s)f(s)ds + f(t)$, $t \in (0,1]$, не може бути неперервно довизначеною в нулі. Оскільки $f(s)(\tau) \ge 0$, $\tau \ge 0$, $s > 0$, то для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ справджуються оцінки

$$-x'(2^{-N})(\tau) + f(2^{-N})(\tau) = \int\limits_0^{2^{-N}} \tau e^{-(2^{-N}-s)\tau} f(s)(\tau)ds \ge \int\limits_{2^{-N-1}}^{2^{-N}} \tau e^{-(2^{-N}-s)\tau} f(s)(\tau)ds =$$

$$= \int\limits_{2^{-N-1}}^{2^{-N}} \tau e^{-(2^{-N}-s)\tau} \delta_N f_{2^{-N-1},\varepsilon_N}(2^{-N} - s)(\tau)\,ds =$$

$$= |2^{-N} - s = z| = \int\limits_0^{2^{-N-1}} \tau e^{-z\tau} \delta_N f_{2^{-N-1},\, \varepsilon_N}(z)(\tau) dz \geq$$

$$\geq \int\limits_{\varepsilon_N}^{2^{-N-1}-\varepsilon_N} \tau e^{-z\tau} \delta_N f_0(z)(\tau) dz, \quad \tau \geq 0.$$

Позначимо $a = a(N) := (2^{-N-1} - \varepsilon_N)^{-1} + 1$, $b = b(N) := \varepsilon_N^{-1}$. Внаслідок умов (5) $a < b$. Враховуючи, що при $\tau > 1$ виконується рівність

$$f_0(z)(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau^{-1} \leq z \leq (\tau - 1)^{-1}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

маємо

$$\| - x'(2^{-N}) + f(2^{-N})\| \geq \int\limits_a^b \left| -x'(2^{-N})(\tau) + f(2^{-N})(\tau) \right| d\tau \geq$$

$$\geq \int\limits_a^b \left(\int\limits_{b^{-1}}^{(a-1)^{-1}} \tau e^{-z\tau} \delta_N f_0(z)(\tau)\, dz \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\tau^{-1}}^{(\tau-1)^{-1}} \tau e^{-z\tau} \delta_N \, dz \right) d\tau =$$

$$= \delta_N \int\limits_{a(N)}^{b(N)} (e^{-1} - e^{-\tau(\tau-1)^{-1}}) d\tau = \delta_N I_N.$$

Оскільки інтеграл $\int_0^{+\infty} (e^{-1} - e^{-\tau(\tau-1)^{-1}}) d\tau$ розбіжний, то можна підібрати послідовність $\{\varepsilon_n : n \geq 1\}$ настільки швидко спадною, що $I_N \geq 4^N$, $N \to \infty$. Тоді покладемо $\delta_N := \sqrt{I_N^{-1}}$, $N \geq 1$, і отримаємо, що похідна розв'язку задачі Коші необмежена на $(0, 1)$.

Приклад 2 (розривна похідна розв'язку). Нехай простір B та оператор A ті самі, що і в прикладі 1. Розглянемо задачу Коші

$$x_1'(t) + Ax_1(t) = f_1(t), \quad t \in (0, 2], \quad x_1(0) = \overline{0},$$

де

$$f_1(s) = \begin{cases} \overline{0}, & s \in [0, 1], \\ f(s - 1), & s \in (1, 2], \end{cases}$$

f — функція з прикладу 1. Тоді f_1 належить F, відповідний розв'язок задачі Коші має вигляд

$$x_1(t) = \vec{0}, \quad t \in [0,1],$$

$$x_1(t) = \int\limits_0^t e^{-A(t-s)} f_1(s)\, ds = x(t-1), \quad t \in [1,2],$$

де x — розв'язок з прикладу 1. Отже, внаслідок результатів із прикладу 1 функція x_1 має розривну в точці 1 похідну.

При цьому внаслідок оцінки (7) і кускової ліпшицевості функції f на $(0,1]$ функція f_1 задовольняє на відрізку $[0,2]$ умови теореми 1 з лінійною для кожного t функцією W_t. Тому за теоремою Пазі похідна розв'язку повинна бути неперервною на $(0,2)$.

3. Аналіз розв'язності задачі Коші. Більш детальний аналіз включень (3) дає така теорема.

Теорема 2. *Для довільного* $\alpha \in (0,1]$ *правильною є наступна діаграма з включень функціональних класів:*

$$\begin{array}{ccccccc} C_\alpha & \subset & F_2 & \subset & F_1 & \subset & F \\ & & \cap & & \cap & & \cap \\ & & Y_2 & \subset & Y_1 & \subset & Y \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ & & W_2 & \subset & W_1 & \subset & W, \end{array}$$

де C_α *— клас функцій* $f : [0,T] \to B$, *гельдерових на* $[0,T]$ *з показником* α. *При цьому існують простори* B, *для яких всі включення строгі. Крім того, для всіх просторів* $B \neq \{\overline{0}\}$ *маємо* $F_2 \not\subset W, W_2 \not\subset F$.

Доведення. Включення в діаграмі випливають з результатів роботи [5].

Покажемо, що у випадку простору B з прикладів 1 і 2 всі включення є строгими.

Оскільки розв'язок x, розглянутий у прикладі 1, належить класу Y_1 і не належить класу Y_2, а розв'язок x_1, розглянутий у прикладі 2, належить класу Y і не належить класу Y_1, то включення $Y_2 \subset Y_1 \subset Y$ є строгими.

Функція f з прикладу 1 є ліпшицевою на кожному відрізку $[a,b] \subset (0,1]$, отже, належить класу $F_1 \cap W_1$. З іншого боку, відповідний розв'язок має необмежену похідну, отже, $f \notin Y_2$. Враховуючи, що $F_2 \cup W_2 \subset Y_2$, маємо $f \notin F_2 \cup W_2$, отже, включення $F_2 \subset F_1$, $W_2 \subset W_1$ є строгими.

Функція f_1 з прикладу 2 є такою, що

$$\forall t \in (0,2]\, \exists \delta = \delta(t) \in (0,t) : f_1 \quad \text{ліпшицева на} \quad [t-\delta, t].$$

Тому $f_1 \in F \cap W$. З іншого боку, відповідний розв'язок має розривну в точці 1 похідну, отже, $f_1 \notin Y_1$. Враховуючи, що $F_1 \cup W_1 \subset Y_1$, маємо $f \notin F_1 \cup W_1$, отже, включення $F_1 \subset F, W_1 \subset W$ є строгими.

Розглянемо тепер довільний комплексний банахів простір $B \neq \{\overline{0}\}$.

Формулу $F_2 \not\subset W$ доводить приклад функції $f(t) = \begin{cases} (t-1)\sin\dfrac{1}{t-1}\, b, & t \in [0,1), \\ \vec{0}, \quad t \in [1,2], \end{cases}$

де $b \in B$, $b \neq \overline{0}$ — фіксований елемент. Те, що f належить F_2, видно з оцінок

$$\left| t\sin\frac{1}{t} - (t-s)\sin\frac{1}{t-s} \right| \leq s + (t-s)\left|\sin\frac{1}{t} - \sin\frac{1}{t-s}\right| \leq$$

$$\leq s + (t-s)\min\left\{\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{t-s}\right|, 2\right\} = \min\left\{s + \frac{s}{t}, s + 2(t-s)\right\} \leq$$

$$\leq 2\min\left\{\frac{s}{t}, t\right\} \leq 2\sqrt{s}, \quad t \in (0,1], \quad s \in (0,t).$$

Необмеженість варіації на відрізку $[-\delta, 0]$ при $\delta \in (0,1)$ випливає з означення. З формули $F_2 \not\subset W$ випливає також строгість включень $W_2 \subset Y_2$, $W_1 \subset Y_1$, $W \subset Y$.

Формулу $W_2 \not\subset F$ доводить приклад функції $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2-2t)}\, b, & t \in [0,1), \\ \vec{0}, \quad t \in [1,2], \end{cases}$ де $b \in B$, $b \neq \overline{0}$ — фіксований елемент. Включення $f \in W_2$ випливає з монотонності функції $\dfrac{1}{\ln(2-2t)}$, $t \in [0,1)$, а включення $f \notin F$ — з розбіжності інтеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{\|f(1-s) - f(1)\|}{s}\, ds = \int\limits_0^1 \frac{1}{s\ln 2s}\, ds.$$

З формули $W_2 \not\subset F$ випливає також строгість включень $F_2 \subset Y_2$, $F_1 \subset Y_1$, $F \subset Y$.

Теорему доведено.

4. Висновки. Наведено приклади абстрактних задач Коші, які доводять строгість включень ряду функціональних класів, пов'язаних з гладкістю розв'язку задачі Коші. Також показано хибність опублікованої в [2] теореми про існування класичного розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з секторіальним операторним коефіцієнтом.

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. —М.: Мир, 1972. — 740 с.
2. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983. — 279 p.
3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
4. *Goldstein J. A.* Semigroups of linear operators and applications. —Oxford Univ. Press, 1985. — 245 p.
5. *Чайковский А. В.* О разрешимости абстрактной задачи Коши // Дифференц. уравнения. — 2010. — **46**, № 5. — С. 756–760.

Одержано 13.10.10,
після доопрацювання — 28.11.10