УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л. И. Кусик

Одес. нац. мор. ун-т
Украина, 65029, Одесса, ул. Мечникова, 34

We establish asymptotic properties of some solutions of a class of essentially nonlinear nonautonomous second order differential equations, and find necessary and sufficient conditions for existence of the solutions.

Встановлено асимптотичні властивості деяких типів розв'язків одного класу істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку, а також знайдено необхідні та достатні умови їх існування.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)|y'|^{\sigma_1}\psi(t,y,y'), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $\sigma_1 \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$[1] — непрерывная функция, $\varphi_0 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ — строго монотонная дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\psi : [a,\omega[\times D \longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, $D = \Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}$, Δ_{Y_i} $i = 0,1$, — односторонняя окрестность Y_i, а каждое Y_i, $i \in \{0,1\}$, равно либо 0, либо $\pm\infty$. При этом также предполагаем, что функции φ_0 и ψ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)} = \sigma_0, \quad \sigma_0 \in \mathbf{R}\setminus\{0\}, \quad \limsup_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \left|\frac{y\varphi_0''(y)}{\varphi_0'(y)}\right| < +\infty, \tag{2}$$

$$\lim_{\substack{t\uparrow\omega\\ (y,z)\to(Y_0,Y_1)\\ (y,z)\in D}} \psi(t,y,z) = 1, \tag{3}$$

а σ_0 и σ_1 таковы, что $\sigma_0+\sigma_1 \ne 1$.

Из условия (2) следует, что функция φ_0 является правильно меняющейся (см. [1]) и имеет место представление

$$\varphi_0(y) = |y|^{\sigma_0+\bar{o}(1)} \quad \text{при} \quad y\to Y_0 \quad (y\in\Delta_{Y_0}). \tag{4}$$

[1] В случае $\omega = +\infty$ считаем $a > 0$.

Определение 1. *Решение y уравнения (1), заданное на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset \subset [a, \omega[$, называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если для него выполнены условия*

$$y^{(i)}(t) \in \Delta Y_i \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad i = 0, 1, \tag{5}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y(t) y''(t)} = \lambda_0. \tag{6}$$

Уравнение (1) при $\psi(t, y, y') \equiv 1$, $\varphi_0(y) = |y|^{\sigma_0} \operatorname{sign} y$, $\sigma_0 \neq 1$, является обобщенным уравнением Эмдена – Фаулера, свойства решений которого исследуются в [2 – 5]. Асимптотические представления $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений при $\psi(t, y, y') \equiv 1$ получены в [6 – 9]. Цель данной статьи — распространение результатов [3 – 9] на случай, когда в уравнении (1) $\psi(t, y, y') \not\equiv 1$. При этом здесь ограничимся исследованием асимптотических свойств $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, для которых $\lambda_0 \neq 0, \pm\infty$.

Очевидно, что каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение уравнения (1) согласно (5) является строго монотонным вместе со своей первой производной на $[t_y, \omega[\subset [t_0, \omega[$. Кроме того, из вида уравнения (1) ясно, что знак второй производной такого решения совпадает со знаком α_0. Поэтому в промежутке $[t_y, \omega[$ знак $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения в силу (6) такой же, как и знак $\alpha_0 \lambda_0$. Таким образом, вышеизложенное влечет однозначность выбора стороны окрестности Y_0, в которой должна быть определена функция φ_0 при изучении $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (1). Этот факт позволяет с помощью некоторой постоянной y_0 такой, что $y_0\, \alpha_0\, \lambda_0 > 0$, конкретизировать вид односторонней окрестности Δ_{Y_0} :

$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases} [y_0, 0[, & \text{если} \quad \alpha_0 \lambda_0 < 0, \\ ]0, y_0], & \text{если} \quad \alpha_0 \lambda_0 > 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad Y_0 = 0,$$
$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases}]-\infty, y_0], & \text{если} \quad \alpha_0 \lambda_0 < 0, \\ [y_0\,, +\infty\,[, & \text{если} \quad \alpha_0 \lambda_0 > 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad Y_0 = \pm\infty. \tag{7}$$

Далее рассмотрим два случая: $\lambda_0 \in \mathbf{R} \backslash \{0, 1\}$ и $\lambda_0 = 1$. В первом случае для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения согласно [9] из условий (5), (6) следует соотношение

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{8}$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при} \quad \omega < +\infty. \end{cases} \tag{9}$$

Соотношение (8) позволяет установить знак производной $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения в окрестности ω и поэтому вид окрестности Δ_{Y_1} конкретизируем следующим образом:

$$\Delta_{Y_1} = \begin{cases} [y_1, 0[, & \text{если} \quad \gamma_0 < 0, \\ ]0, y_1], & \text{если} \quad \gamma_0 > 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad Y_1 = 0,$$
$$\Delta_{Y_1} = \begin{cases}]-\infty, y_1], & \text{если} \quad \gamma_0 < 0, \\ [y_1, +\infty[, & \text{если} \quad \gamma_0 > 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad Y_1 = \pm\infty, \tag{10}$$

где $\gamma_0 = \alpha_0 \mathrm{sign}\,((\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t))$, $t \in [a, \omega[$, y_1 — постоянная, для которой выполнено неравенство $\gamma_0 y_1 > 0$.

Далее, при $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ нам понадобятся свойства вспомогательной функции

$$\Phi(y) = \int\limits_{Y_0^*}^{y} \frac{|z|^{\frac{-\sigma_1 - 1}{2}}}{\sqrt{\varphi_0(z)}}\, dz,$$

где $Y_0^* \in \{y_0, Y_0\}$ и выбрано так, чтобы $\lim_{y \to Y_0} \Phi(y)$ был равен либо 0, либо $\pm\infty$, а именно:

$$Y_0^* = \begin{cases} Y_0, & \text{если} \quad Y_0 = 0, \\ y_0, & \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty, \end{cases} \qquad \text{при} \quad \sigma_0 + \sigma_1 - 1 > 0,$$

$$Y_0^* = \begin{cases} y_0, & \text{если} \quad Y_0 = 0, \\ Y_0, & \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty, \end{cases} \qquad \text{при} \quad \sigma_0 + \sigma_1 - 1 < 0.$$

Функция Φ определена и является строго монотонной на промежутке (7). Легко проверить, что для нее справедливо асимптотическое представление

$$\Phi(y) \sim \frac{|y|^{\frac{1-\sigma_1}{2}} \mathrm{sign}\, y}{\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2} \sqrt{\varphi_0(y)}} \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{11}$$

Обратная функция Φ^{-1} к Φ существует и определена

$$\text{при} \quad Y_0^* = Y_0 \quad \text{на промежутке} \quad \begin{cases} [c_{\varphi_0}, 0[, & \text{если} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1)\alpha_0\lambda_0 < 0, \\ ]0, c_{\varphi_0}], & \text{если} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1)\alpha_0\lambda_0 > 0, \end{cases}$$

$$\text{при} \quad Y_0^* = y_0 \quad \text{на промежутке} \quad \begin{cases}]-\infty, 0], & \text{если} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1)\alpha_0\lambda_0 < 0, \\ [0, +\infty[, & \text{если} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1)\alpha_0\lambda_0 > 0, \end{cases}$$

где $c_{\varphi_0} = \displaystyle\int_{Y_0^*}^{y_0} \frac{|z|^{\frac{-\sigma_1-1}{2}}}{\sqrt{\varphi_0(z)}}\, dz.$

Введем обозначения

$$I(t) = \int\limits_{A}^{t} \sqrt{p(s)|\pi_\omega(s)|^{-\sigma_1}}\, ds, \quad A = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int\limits_{a}^{\omega} \sqrt{p(s)|\pi_\omega(s)|^{-\sigma_1}} ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int\limits_{a}^{\omega} \sqrt{p(s)|\pi_\omega(s)|^{-\sigma_1}} ds < +\infty, \end{cases}$$

$$B = \alpha_0 \gamma_0 \, |\lambda_0|^{\frac{\sigma_1+1}{2}} \, |\lambda_0 - 1|^{\frac{-\sigma_1}{2}} \mathrm{sign}\,(\lambda_0).$$

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, *а* Δ_{Y_0}, Δ_{Y_1} *выбраны, как в (7) и (10). Для существования* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-решений уравнения (1) необходимо, а если выполнено одно из следующих двух условий:*

$$\lambda_0 \neq \sigma_1 - 1; \quad \lambda_0 = \sigma_1 - 1 \quad \textit{и} \quad \lambda_0(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0, \tag{12}$$

то и достаточно, чтобы

$$Y_0 = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I(t) < 0, \\ \pm\infty & \textit{при} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I(t) > 0, \end{cases} \qquad t \in]a, \omega[, \tag{13}$$

$$Y_1 = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad (\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) < 0, \\ \pm\infty & \textit{при} \quad (\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \end{cases} \qquad t \in [a, \omega[, \tag{14}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I'(t)\pi_\omega(t)}{I(t)} = \frac{\lambda_0(1 - \sigma_0 - \sigma_1)}{2(\lambda_0 - 1)}. \tag{15}$$

Каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-решение допускает асимптотические представления (8) и*

$$\frac{|y(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{2}} \operatorname{sign} y(t)}{\sqrt{\varphi_0(y(t))}} \sim \frac{B\,(1 - \sigma_0 - \sigma_1)}{2}\, I(t) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{16}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ является $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением уравнения (1), где $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Поскольку для любого $t \in [t_0, \omega[$ справедливо равенство

$$\left(\frac{y(t)}{y'(t)}\right)' = 1 - \frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2},$$

то в силу (5), (6) при $t \uparrow \omega$ выполнено (8).

Из уравнения (1) с учетом (3), (6) получим асимптотическое представление

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 \sim \alpha_0 \lambda_0 p(t) \varphi_0(y(t)) \frac{|y'(t)|^{\sigma_1}}{y(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда в силу (8), (9) имеем соотношение

$$\frac{y'(t) \operatorname{sign} y(t)}{|y(t)|^{\frac{\sigma_1+1}{2}} \sqrt{\varphi_0(y(t))}} \sim \gamma_0 |\lambda_0|^{\frac{\sigma_1+1}{2}} |\lambda_0 - 1|^{\frac{-\sigma_1}{2}} \sqrt{p(t)|\pi_\omega(t)|^{-\sigma_1}} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{17}$$

В силу (4), (5), (7) интегрирование (17) влечет выполнение условия (13). Принимая во внимание (2), (13), (17) и применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{|y(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{2}}\operatorname{sign}y(t)}{\sqrt{\varphi_0(y(t))}I(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{|y(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{2}}\operatorname{sign}y(t)}{\sqrt{\varphi_0(y(t))}}\right)'}{I'(t)}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{1}{I'(t)}\left(\frac{\frac{1-\sigma_1}{2}|y(t)|^{\frac{-1-\sigma_1}{2}}y'(t)}{\sqrt{\varphi_0(y(t))}}-\frac{|y(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{2}}\operatorname{sign}y(t)}{\varphi_0(y(t))}\frac{\varphi_0'(y(t))y'(t)}{2\sqrt{\varphi_0(y(t))}}\right)=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{|y(t)|^{\frac{-1-\sigma_1}{2}}y'(t)}{I'(t)\sqrt{\varphi_0(y(t))}}\left(\frac{1-\sigma_1}{2}-\frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{2\varphi_0(y(t))}\right)=$$

$$=\gamma_0\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2}|\lambda_0|^{\frac{\sigma_1+1}{2}}|\lambda_0-1|^{\frac{-\sigma_1}{2}}\operatorname{sign}y(t)=\frac{B(1-\sigma_0-\sigma_1)}{2}.$$

Тем самым установлено (16).

Поскольку $B\neq 0$, то в силу (16), (17) имеет место представление

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\left(\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2}+\bar{o}(1)\right)\frac{I'(t)}{I(t)}\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда, принимая во внимание (8), получаем (15). Справедливость (14) непосредственно следует из (8) и (10).

Достаточность. Пусть $\lambda_0\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ и выполнены условия (12) – (16), а Δ_{Y_0}, Δ_{Y_1} выбраны, как в (7) и (10). Покажем, что уравнение (1) имеет хотя бы одно $P(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решение.

С помощью преобразования

$$\Phi(y(t))=B\,I(t)(1+z_1(x)),\quad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}(1+z_2(x)),\tag{18}$$

где

$$x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|,\quad \beta=\begin{cases}1 & \text{при}\quad \omega=+\infty,\\ -1 & \text{при}\quad \omega<+\infty,\end{cases}\tag{19}$$

приведем уравнение (1) к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1'&=\beta\left(\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)B}F(x,z_1)(1+z_2)-G(x)(1+z_1)\right),\\ z_2'&=\beta\left(\frac{\lambda_0z_2^2+z_2(\lambda_0+1)+1}{1-\lambda_0}+\frac{|1+z_2|^{\sigma_1}L(x,z_1,z_2)}{F^2(x,z_1)}\right),\end{aligned}\tag{20}$$

в которой

$$F(x,z_1) = \frac{|Y(t(x),z_1)|^{\frac{1-\sigma_1}{2}} \operatorname{sign} Y(t(x),z_1)}{\sqrt{\varphi_0(Y(t(x),z_1))} I(t(x))}, \quad G(x) = \frac{I'(t(x))\pi_\omega(t(x))}{I(t(x))},$$

$$L(x,z_1,z_2) = \frac{(\lambda_0-1)}{|\lambda_0|}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1} G^2(x)\psi\Big(t(x), Y(t(x),z_1), Y^{(1)}(t(x),z_1,z_2)\Big),$$

$$Y(t,z_1) = \Phi^{-1}(B\,I(t)(1+z_1)), \quad Y^{(1)}(t,z_1,z_2) = \frac{\lambda_0 Y(t,z_1)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}(1+z_2),$$

а функция $t : [b,+\infty[\, \to [a,\omega[$ является обратной к (19), где $b = \beta \ln|\pi_\omega(a)|$.

Так как $\lim\limits_{t\uparrow\omega} Y(t,\theta) = Y_0$ для фиксированного θ, то, учитывая (2), вид функций I, Φ, согласно правилу Лопиталя получаем равенство

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{|Y(t,\theta)|^{\frac{1-\sigma_1}{2}} \operatorname{sign} Y(t,\theta)}{\sqrt{\varphi_0(Y(t,\theta))} I(t)} = B(1+\theta)\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2}. \tag{21}$$

Учитывая (11), (13), (14), выбираем $x_0 \ge b$ настолько большим, чтобы $Y(t(x),z_1) \in \Delta_{Y_0}$, $Y^{(1)}(t(x),z_1,z_2) \in \Delta_{Y_1}$ при $x > x_0$ и $|z_i| \le \frac{1}{2}$, $i = 1,2$.

Теперь систему (20) рассмотрим на множестве $[x_0,+\infty[\times D_1\times D_2$, где $x_0 = \beta\ln|\pi_\omega(t_0)|$, $D_i = \left\{z_i : |z_i| \le \frac{1}{2}\right\}$, $i = 1,2$. Отметим, что на множестве $[x_0,+\infty[\times D_1$ функция F отлична от нуля, непрерывна по x и дважды непрерывно дифференцируема по z_1, причем

$$F'_{z_1}(x,z_1) = B\left(\frac{1-\sigma_1}{2} - \frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))}\right),$$

$$F''_{z_1z_1}(x,z_1) = -\frac{B^2}{F(x,z_1)}\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))}\times$$

$$\times\left(1 + \frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0''(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0'(Y(t(x),z_1))} - \frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))}\right).$$

В силу этих равенств, а также (2), (21)

$$F''_{z_1z_1}(x,z_1) \quad \text{ограничена на} \quad [x_0,+\infty[\times D_1\times D_2 \tag{22}$$

и при $x \to +\infty$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered} F'_{z_1}(x,z_1) \to \frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)B}{2} \quad \text{равномерно по} \quad z_1, |z_1| \le \frac{1}{2}, \\ F(x,\theta) \to \frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1+\theta)B}{2} \quad \left(\text{для любого фиксированного} \quad \theta \in \left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\right). \end{gathered} \tag{23}$$

Разлагая функции $F(x, z_1), 1/F^2(x, z_1)$ при каждом фиксированном $x \in [x_0, +\infty[$ в окрестности $z_1 = 0$, а функцию $|1 + z_2|^{\sigma_1}$ в окрестности $z_2 = 0$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа, записываем систему (20) в виде

$$z_1' = \beta\left(\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{2(\lambda_0-1)}\,z_2 + R_{11}(x,z_1,z_2) + R_{21}(x,z_1,z_2)\right),$$

$$z_2' = \beta\left(\frac{-2}{\lambda_0-1}z_1 + \frac{\lambda_0+1-\sigma_1}{1-\lambda_0}\,z_2 + R_{12}(x,z_1,z_2) + R_{22}(x,z_1,z_2)\right),$$

где

$$R_{11}(x,z_1,z_2) = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)B}\,F(x,0) - G(x) + \left(\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)B}\,F'_{z_1}(x,0) - G(x)\right)z_1 +$$
$$+\left(\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)B}\,F(x,0) - \frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{2(\lambda_0-1)}\right)z_2,$$

$$R_{12}(x,z_1,z_2) = \frac{L(x,z_1,z_2)}{F^2(x,0)} - \frac{1}{1-\lambda_0} + \left(\frac{2}{\lambda_0-1} - \frac{2F'_{z_1}(x,0)L(x,z_1,z_2)}{F^3(x,0)}\right)z_1 +$$
$$+\left(\frac{\sigma_1 L(x,z_1,z_2)}{F^2(x,0)} - \frac{\sigma_1}{\lambda_0-1}\right)z_2,$$

$$R_{21}(x,z_1,z_2) = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)B}\left(F'_{z_1}(x,0)z_1z_2 + \frac{1}{2}\,F''_{z_1z_1}(x,\theta_1)z_1^2(1+z_2)\right),$$

$$R_{22}(x,z_1,z_2) = L(x,z_1,z_2)\left(\left(\frac{3(F'_{z_1}(x,\theta_2))^2}{F^4(x,\theta_2)} - \frac{F''_{z_1z_1}(x,\theta_2)}{F^3(x,\theta_2)}\right)z_1^2 +\right.$$
$$+\frac{\sigma_1(\sigma_1-1)(1+\theta_3)^{\sigma_1-2}}{2F^2(x,0)}\,z_2^2 - \frac{2\sigma_1F'_{z_1}(x,0)}{F^3(x,0)}\,z_1z_2 +$$
$$+\sigma_1\left(\frac{3(F'_{z_1}(x,\theta_2))^2}{F^4(x,\theta_2)} - \frac{F''_{z_1z_1}(x,\theta_2)}{F^3(x,\theta_2)}\right)z_1^2z_2 -$$
$$-\frac{\sigma_1(\sigma_1-1)(1+\theta_3)^{\sigma_1-2}F'_{z_1}(x,0)}{F^3(x,0)}z_1z_2^2 +$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,\sigma_1(\sigma_1-1)(1+\theta_3)^{\sigma_1-2}\left(\frac{3(F'_{z_1}(x,\theta_2))^2}{F^4(x,\theta_2)} - \frac{F''_{z_1z_1}(x,\theta_2)}{F^3(x,\theta_2)}\right)z_1^2z_2^2\right) + \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\,z_2^2,$$

$$\theta_i \in [-1/2, 1/2], \quad i = 1,2,3.$$

Здесь согласно (2), (15), (22), (23) $\lim_{x\to+\infty} R_{1i}(x,z_1,z_2) = 0$, $i = 1,2$, равномерно по $(z_1,z_2) \in D_1 \times D_2$ и $\lim_{\substack{|z_i|\to 0\\ i=1,2}} \dfrac{R_{2i}(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0$ равномерно по $x \in [x_0, +\infty[$.

Характеристическое уравнение предельной матрицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\beta\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{2(\lambda_0-1)} \\[2ex] \dfrac{2\beta}{1-\lambda_0} & \dfrac{\beta(\lambda_0+1-\sigma_1)}{1-\lambda_0} \end{pmatrix}$$

при линейной части системы имеет вид

$$\nu^2 - \frac{\beta(\lambda_0+1-\sigma_1)}{1-\lambda_0}\nu + \frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{(1-\lambda_0)^2} = 0.$$

Учитывая, что $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 \neq 1$, $1-\sigma_0-\sigma_1 \neq 0$ и имеет место (12), приходим к выводу об отсутствии у данного уравнения корней с нулевой действительной частью. Используя теорему 2.1 из [10], нетрудно показать, что система дифференциальных уравнений (20) имеет хотя бы одно решение, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Тогда из замен (18) следует, что этому решению соответствует решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее соотношениям

$$\Phi(y(t)) = B\,I(t)(1+\overline{o}(1)), \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\,(1+\overline{o}(1)) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

первое из которых в силу (11) может быть представлено как

$$\frac{|y(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{2}}\operatorname{sign} y(t)}{\sqrt{\varphi_0(y(t))}} = B \quad \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{2}\,I(t)(1+\overline{o}(1)).$$

Более того, найденное решение является $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением. Выполнение условий (5) при $i = 0$ следует из (7), (13), определения и свойств функции Φ, а при $i = 1$ — из (8), (10), (14). Условие (6) следует из (1) с использованием (8), (15).

Теорема доказана.

Замечание 1. Из условий теоремы 1 следует, что уравнение (1) не имеет $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, если

$$Y_0 = 0 \quad \text{и} \quad (1-\sigma_0-\sigma_1)\,I(t) > 0 \quad \text{или} \quad Y_0 \pm\infty \quad \text{и} \quad (1-\sigma_0-\sigma_1)\,I(t) < 0,$$

а также при

$$Y_1 = 0 \quad \text{и} \quad (\lambda_0-1)\pi_\omega(t) > 0 \quad \text{или} \quad Y_1 = \pm\infty \quad \text{и} \quad (\lambda_0-1)\pi_\omega(t) < 0.$$

Замечание 2. Достаточные условия теоремы 1 не охватывают случай, когда $\lambda_0 = \sigma_1 - -1$ и $\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1) < 0$. Накладывая дополнительные ограничения на функции p, φ_0, ψ и используя теорему 2.2 из [10], можно и в этом случае доказать существование хотя бы одного $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения уравнения (1), для которого при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические соотношения

$$\frac{|y(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{2}} \operatorname{sign} y(t)}{\sqrt{\varphi_0(y(t))}} = \frac{B(1-\sigma_0-\sigma_1)}{2}\, I(t) \left(1 + o\left(\frac{1}{\ln|\pi_\omega(t)|}\right)\right),$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)} \left(1 + o\left(\frac{1}{\ln|\pi_\omega(t)|}\right)\right).$$

Теперь перейдем к изучению поведения $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений при $t \uparrow \omega$, если $\lambda_0 = 1$. Прежде всего установим знак производной $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решений в окрестности ω, а также выясним вид односторонней окрестности Δ_{Y_1}. Для этого рассмотрим справедливое для любого $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решения равенство

$$\left(\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y'(t)}{\varphi_0(y(t))}\right)' = \frac{(1-\sigma_1)|y'(t)|^{-\sigma_1}y''(t)}{\varphi_0(y(t))} - \frac{y'(t)\operatorname{sign} y'(t)|y'(t)|^{1-\sigma_1}\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0^2(y(t))}.$$

Отсюда с учетом (5), (6) и $\lambda_0 = 1$ имеем

$$\left(\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y'(t)}{\varphi_0(y(t))}\right)' = \frac{|y'(t)|^{-\sigma_1}y''(t)}{\varphi_0(y(t))}\left(1-\sigma_1 - \frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))}(1+\bar{o}(1))\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Из (1) в силу последнего представления, а также (2), (3) находим

$$\left(\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y'(t)}{\varphi_0(y(t))}\right)' = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)p(t)(1+\bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение на $[t_0, t]$, получаем

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_1}}{\varphi_0(y(t))} \sim \alpha_0\gamma_1(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{24}$$

где

$$I_1(t) = \int_{A_1}^{t} p(s)\,ds, \quad A_1 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(s)ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(s)ds < +\infty, \end{cases} \tag{25}$$

$$\gamma_1 = \text{const}, \quad \gamma_1 I_1(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[.$$

Далее, используя (24), с помощью постоянной y_1, для которой выполнено неравенство $\gamma_1 y_1 > 0$, конкретизируем вид односторонней окрестности Δ_{Y_1} :

$$\Delta_{Y_1} = \begin{cases} [y_1, 0[, & \text{если} \quad \gamma_1 < 0, \\ ]0, y_1], & \text{если} \quad \gamma_1 > 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad Y_1 = 0,$$
$$\Delta_{Y_1} = \begin{cases}]-\infty, y_1], & \text{если} \quad \gamma_1 < 0, \\ [y_1, +\infty[, & \text{если} \quad \gamma_1 > 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad Y_1 = \pm\infty. \tag{26}$$

Нам наряду с (25) понадобятся следующие обозначения:

$$I_2(t)=\int\limits_{A_2}^{t}|I_1(s)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\,ds,\quad A_2=\begin{cases} b, & \text{если} \quad \int\limits_b^{\omega}|I_1(s)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}ds=+\infty,\\ \omega, & \text{если} \quad \int\limits_b^{\omega}|I_1(s)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}ds<+\infty,\end{cases}\qquad b\in]a,\omega[,\quad \sigma_1\neq 1,$$

$$K=\gamma_1|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}},\quad M=\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}.$$

Теорема 2. *Пусть $\sigma_1\neq 1$ и Δ_{Y_0}, Δ_{Y_1} выбраны, как в (7) и (26). Для существования $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решений уравнения (1) необходимо, а если выполнено одно из следующих двух условий:*

$$\sigma_1\neq 2;\quad \sigma_1=2 \quad \textit{и} \quad \sigma_0<-1, \tag{27}$$

то и достаточно, чтобы

$$Y_i=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad MI_2(t)<0,\\ \pm\infty & \textit{при} \quad MI_2(t)>0,\end{cases}\qquad i=0,1,\quad t\in]b,\omega[, \tag{28}$$

$$(1-\sigma_1)I_1(t)I_2(t)>0,\quad t\in]b,\omega[, \tag{29}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p(t)\,I_2(t)}{I_1(t)|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=1-\sigma_1. \tag{30}$$

Для каждого $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решения справедливы при $t\uparrow\omega$ асимптотические соотношения

$$\frac{y(t)}{(\varphi_0(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\sim\frac{K}{M}\,I_2(t), \tag{31}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}\sim M\frac{|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}{I_2(t)}. \tag{32}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_0}$ — некоторое $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решение уравнения (1) ($\sigma_1\neq 1$). Поскольку $\lambda_0=1$, для этого решения в силу (7) $\alpha_0\,y_0>0$ и

$$\frac{y''}{y'}\sim\frac{y'}{y}\quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{33}$$

Из (24) вытекает представление

$$\frac{y'(t)}{(\varphi_0(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \sim K\,|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{34}$$

откуда следует (31). Действительно, согласно равенству

$$\left(\frac{y(t)}{(\varphi_0(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\right)' = \frac{y'(t)}{(\varphi_0(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} - \frac{1}{1-\sigma_1}\frac{y(t)\varphi_0'(y(t))y'(t)}{(\varphi_0(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}+1}} =$$

$$= \frac{y'(t)}{(\varphi_0(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\left(1 - \frac{1}{1-\sigma_1}\frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))}\right)$$

имеет место соотношение

$$\frac{y(t)}{(\varphi_0(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{K}{M}I_2(t)(1+\bar{o}(1)) + C_3 \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

из которого следует (31). Используя (4), (31), получаем (28) при $i = 0$, а для $i = 1$ (28) следует из (32), (33). Условия (31) и (34) влекут (32). Неравенство (29) следует из (24) и (31), а предельное равенство (30) получаем из (1), (24), (31).

Достаточность. Пусть $\lambda_0 = 1$, выполнены условия (27)–(30), Δ_{Y_0} и Δ_{Y_1} выбраны как в (7) и (26). Покажем, что уравнение (1) имеет хотя бы одно $P(Y_0, Y_1, 1)$-решение, удовлетворяющее при $t \uparrow \omega$ асимптотическим представлениям (31), (32).

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi_1(y) = \int\limits_{y_0^*}^{y} \frac{dz}{(\varphi_0(z))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}},$$

где

$$y_0^* = Y_0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0 \quad \text{и} \quad M > 0 \quad \text{или} \quad Y_0 \pm\infty \quad \text{и} \quad M < 0,$$

$$y_0^* = y_0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0 \quad \text{и} \quad M < 0 \quad \text{или} \quad Y_0 \pm\infty \quad \text{и} \quad M > 0.$$

Используя правило Лопиталя, легко убедиться в том, что

$$\Phi_1(y) \sim M\,\frac{y}{(\varphi_0(y))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \quad y \in \Delta_{Y_0}.$$

Обратная функция Φ_1^{-1} к Φ_1 существует и определена

$$\text{при} \quad y_0^* = Y_0 \quad \text{на промежутке} \quad \begin{cases} [c_{\varphi_0}, 0[, & \text{если} \quad \alpha_0 = -1, \\ ]0, c_{\varphi_0}], & \text{если} \quad \alpha_0 = 1, \end{cases}$$

$$\text{при}\quad y_0^* = y_0 \quad \text{на промежутке}\quad \begin{cases}]-\infty, 0], & \text{если}\quad \alpha_0 = -1, \\ [0, +\infty[, & \text{если}\quad \alpha_0 = 1, \end{cases}$$

где $c_{\varphi_0} = \displaystyle\int_{y_0^*}^{y_0} \frac{dz}{(\varphi_0(z))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}$.

Применяя преобразование

$$\Phi_1(y) = K\, I_2(t)(1 + z_1(x)), \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = M \frac{|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}{I_2(t)}\,(1 + z_2(x)),$$
$$x = \beta \ln |I_2(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при}\quad A_2 = \omega, \\ -1 & \text{при}\quad A_2 = b, \end{cases} \tag{35}$$

к уравнению (1), получаем систему дифференциальных уравнений

$$z_1' = \beta \left(-1 - z_1 + \frac{M}{K}\, F(x, z_1)(1 + z_2) \right),$$
$$z_2' = \beta \left(\left(1 - \frac{G(x)}{1 - \sigma_1} \right) (1 + z_2) - M(1 + z_2)^2 + \frac{|1 + z_2|^{\sigma_1}\, L(x, z_1, z_2)}{|F(x, z_1)|^{1-\sigma_1}} \right), \tag{36}$$

в которой

$$F(x, z_1) = \frac{Y(t(x), z_1)}{(\varphi_0(Y(t(x), z_1)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\, I_2(t(x))}, \quad G(x) = \frac{p(t(x))\, I_2(t(x))}{I_1(t(x))\, |I_1(t(x))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}},$$

$$L(x, z_1, z_2) = \frac{\operatorname{sign}(1 - \sigma_1)}{M\, |M|^{-\sigma_1}}\, G(x) \psi \left(t(x), Y(t(x), z_1), Y^{(1)}(t(x), z_1, z_2) \right),$$

$$Y(t, z_1) = \Phi_1^{-1}(K I_2(t)(1 + z_1)), \quad Y^{(1)}(t, z_1, z_2) = M Y(t, z_1)\, \frac{|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}{I_2(t)}\,(1 + z_2),$$

а функция $t : [c, +\infty[\to [a, \omega[$ $(c = \beta \ln |I_2(a)|)$ обратная к $x = \beta \ln |I_2(t)|$.

Очевидно, что для фиксированного θ в силу (2), вида I_2, Φ_1 и $\lim\limits_{t\uparrow\omega} Y(t(x), \theta) = Y_0$ верно соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{|Y(t(x), \theta)|^{\frac{1-\sigma_1}{2}} \operatorname{sign} Y(t, \theta)}{(\varphi_0(Y(t, \theta)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\, I(t)} = (1 + \theta)\, \frac{K}{M}. \tag{37}$$

С учетом (28), (29) выберем $x_0 \geq c$ настолько большим, чтобы $Y(t(x), z_1) \in \Delta_{Y_0}$, $Y^{(1)}(t(x), z_1, z_2) \in \Delta_{Y_1}$ при $x > x_0$ и $|z_i| \leq \dfrac{1}{2}$, $i = 1, 2$.

Систему (36) рассмотрим на множестве $[x_0, +\infty[\times D_1 \times D_2$, где $x_0 = \beta \ln |I_2(t)|$, $D_i = \left\{ z_i : |z_i| \leq \dfrac{1}{2} \right\}$, $i = 1, 2$. Отметим, что на множестве $[x_0, +\infty[\times D_1$ функция F отлична от нуля, непрерывна и имеет частные производные до второго порядка включительно.

Поскольку

$$F'_{z_1}(x,z_1) = K\left(1-\frac{1}{1-\sigma_1}\,\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))}\right),$$

$$F''_{z_1z_1}(x,z_1) = -\frac{K^2}{(1-\sigma_1)F(x,z_1)}\,\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))}\times$$

$$\times\left(1+\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0''(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}-\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))}\right),$$

приходим к выводу, что в силу (2), (37)

$$F''_{z_1z_1}(x,z_1) \quad \text{ограничена на} \quad [x_0,+\infty[\times D_1\times D_2 \tag{38}$$

и при $x\to+\infty$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered} F'_{z_1}(x,z_1)\to\frac{K}{M} \quad \text{равномерно по} \quad z_1,\ |z_1|\le\frac{1}{2}, \\ F(x,\theta)\to\frac{K(1+\theta)}{M} \quad \left(\text{для любого фиксированного} \quad \theta\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right). \end{gathered} \tag{39}$$

Разложим функцию $\dfrac{1}{|F(x,z_1)|^{1-\sigma_1}}$ при каждом фиксированном $x\in[x_0,+\infty[$ в окрестности $z_1=0$, а функцию $|1+z_2|^{\sigma_1}$ в окрестности $z_2=0$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа и запишем систему (36) в виде

$$z_1' = \beta\left(-1-z_1+R_{11}(x,z_1,z_2)+R_{21}(x,z_1,z_2)\right),$$

$$z_2' = \beta\left(-Mz_1+(\sigma_1-2)\,Mz_2+R_{12}(x,z_1,z_2)+R_{22}(x,z_1,z_2)\right),$$

где

$$R_{11}(x,z_1,z_2) = \frac{M}{K}\,F(x,0)-1+z_1\left(\frac{M}{K}\,F'(x,0)-1\right)+z_2\left(\frac{M}{K}\,F(x,0)-1\right),$$

$$R_{21}(x,z_1,z_2) = \frac{Mz_1}{K}\left(F'(x,0)z_2+\frac{1}{2}F''_{z_1z_1}(x,\theta_1)z_1(1+z_2)\right),$$

$$R_{12}(x,z_1,z_2) = 1-M-\frac{G(x)}{1-\sigma_1}+\frac{L(x,z_1,z_2)}{|F(x,0)|^{1-\sigma_1}}-L(x,z_1,z_2)\frac{F'_{z_1}(x,0)\operatorname{sign}F(x,0)}{|F(x,0)|^{2-\sigma_1}}z_1+$$

$$+\,Mz_1+\left(\frac{\sigma_1L(x,z_1,z_2)}{|F(x,0)|^{1-\sigma_1}}-\sigma_1M+1-\frac{G(x)}{1-\sigma_1}\right)z_2,$$

$$R_{22}(x,z_1,z_2) = L(x,z_1,z_2)\left(\sigma_1 z_2 + \frac{\sigma_1(\sigma_1-1)}{2}(1+\theta_2)^{\sigma_1-2}z_2^2\right)\times$$
$$\times\left(\frac{(\sigma_1-1)F'_{z_1}(x,0)\operatorname{sign}F(x,0)}{|F(x,0)|^{2-\sigma_1}}z_1 + \frac{(\sigma_1-1)}{2}\left(\frac{F''_{z_1z_1}(x,\theta_3)\operatorname{sign}F(x,\theta_3)}{|F(x,\theta_3)|^{2-\sigma_1}}z_1 +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(\sigma_1-2)(F'_{z_1}(x,\theta_3))^2}{|F(x,\theta_3)|^{3-\sigma_1}}\right)z_1^2 - \frac{\sigma_1(\sigma_1-1)F'_{z_1}(x,0)\operatorname{sign}F(x,0)}{|F(x,0)|^{2-\sigma_1}}z_1z_2\right) - Mz_2^2,$$

$$|\theta_i| < \frac{1}{2}, \quad i = 1,2,3.$$

Согласно (27) характеристическое уравнение $\nu^2 - \beta M(\sigma_1-2)\nu + M = 0$ предельной матрицы коэффициентов при линейной части последней системы

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta M & \beta M(\sigma_1-2) \end{pmatrix}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью.

Кроме того, соотношения (38), (39) вместе с (30) влекут выполнение

$$\lim_{x\to+\infty} R_{1i}(x,z_1,z_2) = 0, \quad i=1,2, \quad \text{равномерно по} \quad z_i, |z_i| \le \frac{1}{2}, \quad i = 1,2,$$

и

$$\lim_{\substack{|z_i|\to 0\\ i=1,2,}} \frac{R_{2i}(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0,+\infty[.$$

Поэтому (см. [10]) система дифференциальных уравнений (36) имеет хотя бы одно решение, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$, которому в силу замен (35) и свойств функции Φ_1 соответствует решение уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ представления (31) и (32). Условия (30) – (32) гарантируют выполнение условий (5), а также (6), в котором $\lambda_0 = 1$. Таким образом, найденное решение уравнения (1) является $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решением.

Теорема доказана.

Замечание 3. Из условия (28) и выбора Δ_{Y_i}, $i = 0,1$, следует, что уравнение (1) не имеет $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решений, если $Y_0 = Y_1 = 0$ и $MI_2(t) > 0$ или $Y_0 = Y_1 = \pm\infty$ и $MI_2(t) < 0$.

Замечание 4. Если $p \in \mathbf{C^1}([a,\omega[;]0,+\infty[)$ и существует $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{p'(t)\,I_1(t)}{p^2(t)}$, то из (30) при $\sigma_1 \ne 1$ следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p'(t)\,I_1(t)}{p^2(t)} = 1. \tag{40}$$

В связи с этим естественным дополнением к теореме 2 является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\sigma_1 = 1$, Δ_{Y_0}, Δ_{Y_1} *выбраны, как в (7) и (26),* $p \in \mathbf{C^1}([a,\omega[;]0,+\infty[)$ *и выполнено условие (40). Для существования* $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$*-решений уравнения (1) необходимо, а если* $\sigma_0 \neq -1$, *то и достаточно, чтобы*

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad \sigma_0 I_1(t) > 0, \\ \pm\infty & \textit{при} \quad \sigma_0 I_1(t) < 0, \end{cases} \qquad i = 0, 1, \quad t \in]a, \omega[, \tag{41}$$

$$\alpha_0 \sigma_0 \gamma_1 I_1(t) < 0, \quad t \in]a, \omega[. \tag{42}$$

Для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$\frac{1}{\varphi_0(y(t))} \sim -\alpha_0 \sigma_0 \gamma_1 \, I_1(t), \tag{43}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)\varphi_0(y(t))} \sim \alpha_0 \gamma_1 p(t). \tag{44}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ — некоторое $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решение уравнения (1), где $\sigma_1 = 1$. Поскольку $\lambda_0 = 1$, из (1) с учетом (3), (33) получаем представление $\dfrac{y'(t)}{y(t)} \sim \alpha_0 \gamma_1 p(t) \varphi_0(y(t)) \quad$ при $\quad t \uparrow \omega$, откуда следует (44).

Введем функцию

$$\Phi_1(y) = \int\limits_{y_0^*}^{y} \frac{dz}{z\varphi_0(z)},$$

где

$$y_0^* = Y_0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_0 < 0 \quad \text{или} \quad Y_0 \pm \infty \quad \text{и} \quad \sigma_0 > 0,$$

$$y_0^* = y_0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_0 > 0 \quad \text{или} \quad Y_0 \pm \infty \quad \text{и} \quad \sigma_0 < 0.$$

Очевидна эквивалентность

$$\Phi_1(y) \sim -\frac{1}{\sigma_0 \varphi_0(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \quad y \in \Delta_{Y_0}.$$

Поэтому из (44) вытекает соотношение $\Phi_1(y(t)) \sim \alpha_0 \gamma_1 I_1(t) \quad$ при $\quad t \uparrow \omega$, а следовательно, выполнены условия (42), (43). Учитывая (4) и (43), получаем (41) при $i = 0$, а из условий (33), (43), (44) вытекает (41) для $i = 1$.

Достаточность. Пусть выполнены условия (40)–(42), $\sigma_1 = 1$, $\sigma_0 \neq -1$, Δ_{Y_0}, Δ_{Y_1} выбраны, как в (7) и (25). Покажем, что уравнение (1) имеет хотя бы одно $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решение, для которого при $t \uparrow \omega$ верны представления (43), (44).

Применяя к уравнению (1) преобразование

$$\Phi_1(y(t)) = \alpha_0 \gamma_1 \, I_1(t)(1 + z_1(x)), \quad \frac{y'(t)}{y(t)\varphi_0(y(t))} = \alpha_0 \gamma_1 p(t)(1 + z_2(x)), \tag{45}$$

где

$$x = \beta \ln |I_1(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad A_1 = \omega, \\ -1 & \text{при} \quad A_1 = a, \end{cases}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= \beta(-z_1 + z_2), \\ z_2' &= \beta \left(\frac{1+\sigma_0}{\sigma_0} z_2 + R_{12}(x, z_1, z_2) + R_{22}(x, z_1, z_2) \right), \end{aligned} \tag{46}$$

в которой

$$R_{12}(x, z_1, z_2) = \alpha_0 \gamma_1 \varphi_0(Y(t(x), z_1)) I_1(t(x)) \Bigg(\psi(t(x), Y(t(x), z_1), Y^{(1)}(t(x), z_1, z_2)) - 1 -$$

$$- \frac{Y(t(x), z_1)\varphi_0'(Y(t(x), z_1))}{\varphi_0(Y(t(x), z_1))} \Bigg) - \frac{I_1(t(x))p'(t(x))}{p^2(t(x))} +$$

$$+ z_2 \Bigg(\alpha_0 \gamma_1 \varphi_0(Y(t(x), z_1)) I_1(t(x)) \Bigg(\psi(t(x), Y(t(x), z_1), Y^{(1)}(t(x), z_1, z_2)) -$$

$$- 2\left(1 + \frac{Y(t(x), z_1)\varphi_0'(Y(t(x), z_1))}{\varphi_0(Y(t(x), z_1))} \right) \Bigg) - \frac{I_1(t(x))p'(t(x))}{p^2(t(x))} - \frac{1+\sigma_0}{\sigma_0} \Bigg),$$

$$R_{22}(x, z_1, z_2) = -\left(\alpha_0 \gamma_1 \varphi_0(Y(t(x), z_1)) I_1(t(x)) \left(1 + \frac{Y(t(x), z_1)\varphi_0'(Y(t(x), z_1))}{\varphi_0(Y(t(x), z_1))} \right) - \frac{1+\sigma_0}{\sigma_0} \right) z_2^2,$$

$$Y(t, z_1) = \Phi_1^{-1}(\alpha_0 \gamma_1 I_1(t)(1 + z_1)), \quad Y^{(1)}(t, z_1, z_2) = \alpha_0 \gamma_1 \quad Y(t, z_1)\varphi_0(Y(t, z_1))(1 + z_2),$$

функция $t : [c, +\infty[\to [a, \omega[$ ($c = \beta \ln |I_1(a)|$) обратная к $x = \beta \ln |I_1(t)|$, а функция Φ_1^{-1} обратная к Φ_1.

С учетом (41), (42) выберем $x_0 \geq b$ настолько большим, чтобы $Y(t(x), z_1) \in \Delta_{Y_0}$, $Y^{(1)}(t(x), z_1, z_2) \in \Delta_{Y_1}$ при $x \geq x_0$ и $|z_i| \leq \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$.

Систему (46) рассмотрим на множестве $[x_0, +\infty[\times D_1 \times D_2$, где $x_0 = \beta \ln |I_1(t_0)|$, $D_i = \left\{ z_i : |z_i| \leq \frac{1}{2} \right\}$, $i = 1, 2$. Здесь согласно (2), (3), (40) $\lim_{x \to +\infty} R_{12}(x, z_1, z_2) = 0$ равномерно по $(z_1, z_2) \in D_1 \times D_2$ и $\lim_{\substack{|z_i| \to 0 \\ i=1,2}} \frac{R_{22}(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0$ равномерно по $x \in [x_0, +\infty[$. Кроме того, в силу $\sigma_0 \neq -1$ уравнение $\nu^2 - \frac{\beta\nu}{\sigma_0} - \frac{1+\sigma_0}{\sigma_0} = 0$ не имеет корней с нулевой действительной частью, следовательно (см. [10]), существует хотя бы одно решение системы дифференциальных уравнений (46), стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Этому решению согласно заменам (45) и свойствам функции Φ_1 соответствует решение уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ представления (43) и (44).

Теорема доказана.

Замечание 5. При $\omega = +\infty$ условие (40) заведомо выполнено, если $p(t) = e^{kt}$, $k = \mathrm{const} \neq 0$, $p(t) = e^{kt}t^{\alpha}$, $k = \mathrm{const} \neq 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ и в других случаях.

Выводы. В данной работе результаты из [2–8] распространены на случай уравнений вида (1), в которых $\psi(t, y, y') \not\equiv 1$. Здесь для такого класса уравнений получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений при $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Кроме того, установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для всех таких решений и их производных первого порядка. Доказанные теоремы дают возможность описать асимптотическое поведение $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений многих классов уравнений, которые не охватываются результатами работ [2–8], в частности некоторых дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$y'' = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y) |y'|^{\sigma_i}}{\sum\limits_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y) |y'|^{\sigma_i}},$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $\sigma_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n+m$, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$, $i = 1, \ldots, n+m$, — непрерывные функции и $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, $i = 1, \ldots, n+m$, — дважды непрерывно дифференцируемые правильно меняющиеся функции при $y \to Y_0$.

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
2. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 430 с.
3. *Костин А. В., Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. — 1976. — **231**, № 5. — С. 1059–1062.
4. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. — 1982. — **106**, № 3. — С. 473–476.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. — 1984. — **115**. — P. 215–236.
6. *Evtukhov V. M., Kirillova L. A.* Asymptotic representations of solutions of nonlinear second order differential equations // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. — 2003. — **30.** — P. 153–158.
7. *Кирилова Л. О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена–Фаулера // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2004. — Вип. 228 — С. 30–35.
8. *Белозерова М. А.* Асимптотическое поведение решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений с нелинейностями, в некотором смысле близкими к степенным // Тез. докл. „Метод функций Ляпунова и его приложения". — Симферополь, 2006. — С. 23.
9. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений : Дис. ... д-ра физ.- мат. наук. — Киев, 1998. — 294 с.
10. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. — С. 433–444.

Получено 29.03.09,
после доработки — 09.05.10