УДК 517.911, 517.977

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Т. А. Комлева

Одес. гос. академия строительства и архитектуры
Украина, 65029, Одесса, ул. Дидрихсона, 4
e-mail: t-komleva@ukr.net

Л. И. Плотникова

Одес. нац. политехн. ун-т
Украина, 65044, Одесса, просп. Шевченко, 1

А. В. Плотников, Н. В. Скрипник

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: a-plotnikov@ukr.net
talie@ukr.net

We consider applicability of the complete averaging scheme to control problems with the terminal quality criterion in the case where the behavior of the system is described by a controlled fuzzy differential equation.

Розглядається можливість застосування повної схеми усереднення для задач керування з термінальним критерієм якості, коли поведінка системи описується керованим нечітким диференціальним рівнянням.

Работа L. A. Zadeh [1] в 1965 г. положила начало развитию теории нечетких множеств. В 1987 г. O. Kaleva в работе [2] ввел понятие нечеткого дифференциального уравнения, где использовал подход M. L. Puri и D. A. Ralescu [3] H-дифференцируемости нечетких отображений и доказал теорему существования и единственности решения для такого типа уравнений при условии липшицевости правой части. В дальнейшем в работах O. Kaleva [4–6], S. Seikkala [7, 8], C. X. Wu, S. J. Song [9], J. Y. Park, H. K. Han [10, 11] и А. В. Плотников, Н. В. Скрипник [12] были получены аналогичные результаты при более общих условиях на правую часть уравнения, а также рассмотрены и другие свойства решений [13–21].

Данная работа продолжает исследования, начатые в [22–26]. В ней рассмотрена возможность применения схемы полного усреднения для задач с нечетким критерием качества, когда поведение объекта описывается нечетким управляемым дифференциальным уравнением.

Пусть $\operatorname{conv}(R^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(F,G) = \max\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}\|f-g\|t, \sup_{g\in G}\inf_{f\in F}\|f-g\|\},$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма в пространстве R^n.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $x : R^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x полунепрерывно сверху, т. е. для любых $y' \in R^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y',\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|y - y'\| < \delta$ выполняется условие $x(y) < x(y') + \varepsilon$;

2) x нормально, т. е. существует $y_0 \in R^n$ такое, что $x(y_0) = 1$;

3) x нечетко выпукло, т. е. для любых $y', y'' \in R^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство $x(\lambda y' + (1-\lambda)y'') \geq \min\{x(y'), x(y'')\}$;

4) замыкание множества $\{y \in R^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является отображение $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in R^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. *α-Срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in E^n$ при $0 < \alpha \leq 1$ назовем множество $\{y \in R^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in E^n$ назовем замыкание множества $\{y \in R^n : x(y) > 0\}$.*

Теорема 1 [27]. *Если $x \in E^n$, то:*

1) $[x]^\alpha \in \mathrm{conv}\,(R^n)$ для всех $0 \leq \alpha \leq 1$;

2) $[x]^{\alpha_2} \subset [x]^{\alpha_1}$ для всех $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;

3) если $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ — неубывающая последовательность, сходящаяся к $\alpha > 0$, то $[x]^\alpha = \bigcap\limits_{k\geq 1} [x]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ — семейство подмножеств R^n, удовлетворяющих условиям 1–3, то существует отображение $x \in E^n$ такое, что $[x]^\alpha = A^\alpha$ для $0 < \alpha \leq 1$ и $[x]^0 = \overline{\bigcup\limits_{0<\alpha\leq 1} A^\alpha}$.

Определим в пространстве E^n метрику $D : E^n \times E^n \to [0, +\infty)$, положив

$$D(x,z) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} h([x]^\alpha, [z]^\alpha).$$

Пусть I — промежуток в R.

Определение 2 [10]. *Отображение $f : I \to E^n$ называется сильно измеримым на I, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ измеримо.*

Определение 3 [10]. *Отображение $f : I \to E^n$ называется интегрально ограниченным на I, если существует интегрируемая по Лебегу функция $k(t)$ такая, что $\|y\| \leq k(t)$ для всех $y \in f_0(t)$.*

Определение 4 [10]. *Интегралом от отображения $f : I \to E^n$ по множеству I называется элемент $g \in E^n$ такой, что $[g]^\alpha = \int_I f_\alpha(t)dt$ для всех $0 < \alpha \leq 1$, где интеграл от многозначного отображения $f_\alpha(t)$ понимается в смысле Ауманна [28].*

Теорема 2 [10]. *Если отображение $f : I \to E^n$ сильно измеримо и интегрально ограничено, то f интегрируемо на I.*

Теорема 3 [10]. *Пусть отображения $f, g : I \to E^n$ интегрируемы на I и $\lambda \in R$. Тогда:*

1) $\int_I (f(t) + g(t))dt = \int_I f(t)dt + \int_I g(t)dt$;

2) $\int_I \lambda f(t)dt = \lambda \int_I f(t)dt$;

3) $D\left(\int_I f(t)dt, \int_I g(t)dt\right) \le \int_I D(f(t), g(t))dt.$

Определение 5 [10]. *Отображение* $f : I \to E^n$ *называется слабо непрерывным в точке* $t_0 \in I$, *если для любого фиксированного* $\alpha \in [0,1]$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon,\alpha) > 0$ *такое, что* $h(f_\alpha(t), f_\alpha(t_0)) < \varepsilon$ *для всех* $t \in I$ *таких, что* $|t - t_0| < \delta(\varepsilon,\alpha)$.

Определение 6 [30]. *Отображение* $f : I \to E^n$ *называется дифференцируемым в точке* $t_0 \in I$, *если для всех* $\alpha \in [0,1]$ *многозначное отображение* $f_\alpha(t)$ *дифференцируемо по Хукухаре [29] в точке* t_0, *его производная равна* $Df_\alpha(t_0)$ *и семейство множеств* $\{Df_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ *определяет отображение* $f'(t_0) \in E^n$.

Если отображение $f : I \to E^n$ *дифференцируемо в точке* $t_0 \in I$, *то* $f'(t_0)$ *называют нечеткой производной* $f(t)$ *в точке* t_0.

Замечание 1. В работах [30–33] введены также другие определения нечеткой производной, рассмотрена связь между ними и изучены ее свойства.

Определение 7 [9]. *Говорят, что отображение* $f : I \times E^n \to E^n$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* x, *если существует постоянная* λ *такая, что для любых* $x, y \in E^n$ *выполняется неравенство*

$$D(f(t,x), f(t,y)) \le \lambda D(x,y).$$

Под нечетким дифференциальным уравнением будем понимать уравнение вида

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in I$ — время, $t_0 \in I$, $x \in E^n$ — фазовый вектор, $f : I \times E^n \to E^n$ — нечеткое отображение.

Определение 8 [10]. *Отображение* $x : I_0 \to E^n$, $I_0 \subset I$, *называется решением задачи (1), если оно слабо непрерывно на* I_0, $t_0 \in I_0$ *и для всех* $t \in I_0$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{2}$$

В работах [2–8, 10, 16–18, 20, 21, 27, 29 33] доказаны различные теоремы существования решений такого типа уравнений и изучены их свойства для случая, когда правая часть уравнений является непрерывной по (t, x). Аналогично тому, как это было сделано для дифференциальных уравнений с производной Хукухары [34], можно ослабить это требование:

Теорема 4 [12]. *Пусть в области* $Q = \{(t,x) : t_0 \le t \le t_0 + a,\ D(x, x_0) \le b\}$ *отображение* $f : Q \to E^n$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(\cdot, x)$ *сильно измеримо по* t *при любом фиксированном* x;

2) $f(t, \cdot)$ *слабо непрерывно по* x *при почти всех* t;

3) существует суммируемая функция $m(t)$ *такая, что для почти всех* (t, x) *выполняется неравенство* $D(f(t,x), \hat{0}) \le m(t)$.

Тогда на отрезке $[t_0, t_0 + d]$ *существует решение задачи (1), где* $d > 0$ *такое, что* $d \le a$, $\varphi(t_0 + d) \le b$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)\, ds$.

Теорема 5 [12]. *Пусть в области* Q *отображение* $f(t, x)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* x *с постоянной* $\lambda > 0$. *Тогда уравнение (1) имеет единственное решение.*

Пусть движение объекта управления описывается нечеткой системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \varepsilon[f(t, x) + g(t, u)], \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $t \in I = [0, L\varepsilon^{-1}]$, $L > 0$ — время; $x \in E^n$ — фазовый вектор; $u(t) \in U \in \operatorname{conv}(R^k)$ — вектор управления; $f : I \times E^n \to E^n$, $g : I \times R^k \to E^n$ — нечеткие отображения.

Определение 9. *Суммируемую на отрезке* I *функцию* $u(\cdot)$ *такую, что* $u(t) \in U$ *для всех* $t \in I$, *будем называть допустимым управлением.*

Множество всех допустимых управлений обозначим через $\Theta(I)$.

Системе (3) поставим в соответствие усредненную систему

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \varepsilon[\overline{f}(\overline{x}) + w], \quad \overline{x}(0) = x_0, \tag{4}$$

где

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t, x)dt, \quad w \in W = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t, U)\, dt. \tag{5}$$

Таким образом, неавтономной системе уравнений движения объекта управления приведенная выше схема усреднения ставит в соответствие автономную систему уравнений движения с некоторым новым нечетким управлением w.

Рассмотрим задачу оптимального управления с нечетким критерием качества

$$J(u) = \Phi(x(L\varepsilon^{-1}, u)), \tag{6}$$

где $\Phi : E^n \to E^1$.

Определение 10. *Управление* $u_* \in \Theta(I)$ *назовем максиминным (максимаксным) для задачи (3), (4), если для любого управления* $u \in \Theta(I)$ *выполняется неравенство*

$$m[J(u)]^0 \le m[J(u_*)]^0, \quad (M[J(u)]^0 \le M[J(u^*)]^0),$$

где $mA = \min\{a : a \in A, A \in \operatorname{conv}(R)\}$, $MA = \max\{a : a \in A, A \in \operatorname{conv}(R)\}$.

Задаче (3), (6) поставим в соответствие усредненную задачу

$$\overline{J}(w) = \Phi(\overline{x}(L\varepsilon^{-1}, w)) \tag{7}$$

на нечетких траекториях системы (4).

Теорема 6. *Предположим, что правая часть системы (3) в области*

$$Q\{t \in I,\ x \in G(x_0),\ u(t) \in U\},$$

где $G(x_0)$ — некоторая окрестность x_0, удовлетворяет следующим условиям:

1) нечеткое отображение $f(\cdot,\cdot)$ 2π-периодично и сильно измеримо по t при фиксированном x; равномерно ограничено и удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ по x при фиксированном t;

2) нечеткое отображение $g(\cdot,\cdot)$ 2π-периодично и сильно измеримо по t при фиксированном u; равномерно ограничено и удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ по u при фиксированном t.

Кроме того, пусть отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной μ.

Тогда для любого $L > 0$ можно указать такие $C(L) > 0$ и $\varepsilon(L) > 0$, что при $\varepsilon \in$ $\in (0, \varepsilon_0]$ будут выполняться неравенства

$$m[J(u_*)]^0 - m[J(u^1)]^0 \le C\varepsilon, \quad |m[J(u_*)]^0 - m[\overline{J}(w_*)]^0| \le C\varepsilon,$$

где $u_*(\cdot)$ — максиминное управление для задачи (3), (6); $w_*(\cdot)$ — максиминное управление для задачи (4), (7);

$$u^1(t) = \left\{ u_i(t) : \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} g(t, u_i(t))dt = \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} w_*(t)dt, \quad t \in [2\pi i, 2\pi(i+1)),\ i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Замечание 2. Очевидно, что при выполнении условий 1, 2 теоремы и заданных допустимых управлений $u(\cdot)$ и $w(\cdot)$ соответствующие нечеткие дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = \varepsilon[f(t,x) + g(t, u(t))], \quad x(0) = x_0,$$

и

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \varepsilon[\overline{f}(\overline{x}) + w(t)], \quad \overline{x}(0) = x_0,$$

будут иметь единственные решения в силу теорем 4 и 5.

Доказательство. Обозначим через $w^1(\cdot)$ нечеткое управление

$$w^1(t) = \left\{ w_i : \ w_i = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} g(t, u_*(t))dt, \quad t \in [2\pi i, 2\pi(i+1)),\ i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Пусть $x(\cdot, u_*), \overline{x}(\cdot, w_*), x(\cdot, u^1), \overline{x}(\cdot, w^1)$ являются решениями соответствующих уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon[f(t,x) + g(t, u_*(t))], \quad x(0) = x_0, \tag{8}$$

$$\dot{x} = \varepsilon[\overline{f}(x) + w_*(t)], \quad x(0) = x_0, \tag{9}$$

$$\dot{x} = \varepsilon[f(t, x) + g(t, u^1(t))], \quad x(0) = x_0, \tag{10}$$

$$\dot{x} = \varepsilon[\overline{f}(x) + w^1(t)], \quad x(0) = x_0. \tag{11}$$

Тогда по теореме о частичном усреднении нечетких дифференциальных уравнений [12, 13] при $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы оценки

$$D(x(t, u_*), \overline{x}(t, w^1)) \leq C_1\varepsilon, \quad D(x(t, u^1), \overline{x}(t, w_*)) \leq C_1\varepsilon,$$

из которых в силу липшицевости отображения $\Phi(\cdot)$ следует, что

$$D(J(u_*), \overline{J}(w^1)) \leq \mu C_1\varepsilon, \quad D(J(u^1), \overline{J}(w_*)) \leq \mu C_1\varepsilon. \tag{12}$$

Очевидно, что

$$m[J(u_*)]^0 \geq m[J(u^1)]^0, \quad m[\overline{J}(w_*)]^0 \geq m[\overline{J}(w^1)]^0. \tag{13}$$

Для $J(u_*)$ и $\overline{J}(w_*)$ справедливо одно из следующих неравенств:

$$m[J(u_*)]^0 > m[\overline{J}(w_*)]^0, \tag{14}$$

$$m[J(u_*)]^0 \leq m[\overline{J}(w_*)]^0. \tag{15}$$

В первом случае из (12) – (14) следует

$$m[\overline{J}(w^1)]^0 + \mu C_1\varepsilon \geq m[J(u_*)]^0 > m[\overline{J}(w_*)]^0 \geq m[\overline{J}(w^1)]^0,$$

т. е.

$$|m[J(u_*)]^0 - m[\overline{J}(w_*)]^0| \leq \mu C_1\varepsilon. \tag{16}$$

Во втором случае из (12), (13), (15) имеем

$$m[J(u^1)]^0 + \mu C_1\varepsilon \geq m[\overline{J}(w_*)]^0 \geq m[J(u_*)]^0 \geq m[J(u^1)]^0,$$

т. е. выполняется неравенство (16). Полагая $C = \mu C_1$, из (16) получаем второе неравенство из утверждения теоремы.

Аналогично можно доказать и первое неравенство.

Теорема доказана.

Замечание 3. Теорему, аналогичную предыдущей, можно доказать и для максимаксных управлений.

Замечание 4. Если максиминные управления являются также и максимаксными и наоборот, то утверждение теоремы 6 можно записать в следующем виде:

$$h([J(u^1)]^0, [J(u_*)]^0) \leq C\varepsilon, \quad h([J(u_*)]^0, [\overline{J}(w_*)]^0) \leq C\varepsilon.$$

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Inf. Control. — 1965. — № 8. — P. 338–353.
2. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 301–317.
3. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1983. — № 91. — P. 552–558.
4. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1990. — № 35. — P. 389–396.
5. *Kaleva O.* The Peano theorem for fuzzy differential equations revisited // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — № 98. — P. 147–148.
6. *Kaleva O.* Notes on fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. — 2006. — № 64. — P. 895–900.
7. *Vorobiev D., Seikkala S.* Towards the theory of fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 2002. — № 125. —P. 231–237.
8. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — № 24. — P. 319–330.
9. *Song S. J., Wu C. X.* Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — № 110. — P. 55–67.
10. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. — 1999. — **22**, № 2. — P. 271–279.
11. *Park J. Y., Han H. K.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — № 110. — P. 69–77.
12. *Плотников А.В., Скрипник Н.В.* Дифференциальные уравнения с «четкой» и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 2009. — 192 с.
13. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Плотникова Л. И.* Усреднение нечетких дифференциальных уравнений // Труды Одес. политехн. ун-та. — 2007. — Вып. 1(27). — С. 185–190.
14. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Ω-пространство и его связь с теорией нечетких множеств // Труды Одес. политехн. ин-та. — 2007. — Вып. 2 (28). — С. 182–191.
15. *Grana Bhaskar T., Lakshmikantham V., Devi Vasundhara J.* Revisiting fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. — 2004. — № 58. — P. 351–358.
16. *Kloeden P. E.* Remarks on Peano-like theorems for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1991. — № 44. — P. 161–163.
17. *Lakshmikantham V., Leela S.* Fuzzy differential systems and the new concept of stability // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2001. — **1**, № 2. — P. 111–119.
18. *Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of set differential equations in metric spaces. — Cambridge Sci. Publ., 2006. — 204 p.
19. *Ma M., Friedman M., Kandel A.* Numerical solutions of fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1999. — № 105. — P. 133–138.
20. *Nieto J. J.* The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1999. — № 102. — P. 259–262.
21. *O'Regan D., Lakshmikantham V., Nieto J. J.* Initial and boundary value problems for fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. — 2003. — № 54. — P. 405–415.
22. *Плотников А. В.* Усреднение уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 657–659.
23. *Плотников А. В.* Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 10. — С. 1409–1412.
24. *Плотников А. В.* Усреднение уравнений управляемого движения с многозначным критерием качества // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 4. — С. 505–510.
25. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
26. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.
27. *Negoita C. V., Ralescu D. A.* Application of fuzzy sets to systems analysis. — New York: Wiley, 1975.

28. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — **12**, № 1. — P. 1 – 12.

29. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205 – 223.

30. *Buckley J.J., Feuring Th.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — № 110. — P. 43 – 54.

31. *Friedman M., Ming M., Kandel A.* Fuzzy derivatives and fuzzy Chauchy problems using LP metric // Fuzzy Logic Found. and Industrial Appl. / Ed. Da Ruan. — Dordrecht: Kluwer, 1996. — P. 57 – 72.

32. *Friedman M., Ming M., Kandel A.* On the validity of Peano theorem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1997. — № 86. — P. 331 – 334.

33. *Goetschel R., Voxman W.* Elementary fuzzy calculus // Fuzzy Sets and Systems. — 1986. – № 18. — P. 31 – 43.

34. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con solusioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. — 1969. — **2**, № 4 – 5. — P. 491 – 501.

Получено 21.04.08,
после доработки — 05.11.10