

## Диффузия в жидких и твердых растворах ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$

И. Н. Адаменко, А. В. Жуков, К. Э. Немченко

*Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*  
E-mail: berezhnoy@pem.kharkov.ua

Т. Ф. Джордж

*Office of the Chancellor/Department of Chemistry and Physics and Astronomy*  
*University of Wisconsin-Stevens Point, Stevens Point, Wisconsin, 54481-3897, U.S.A.*  
E-mail: tgeorge@uwsp.edu

Статья поступила в редакцию 15 ноября 1996 г.

Решение системы кинетических уравнений позволило получить точное выражение для диффузионного времени, которое зависит от частоты столкновений частиц не только разных, но и одинакового типов. Результат справедлив для частиц с произвольными статистикой и законом дисперсии. Найденные общие соотношения используются при исследовании диффузии в жидких и твердых растворах  ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ . Проанализирован вклад взаимодействия квазичастиц одинакового типа в коэффициенты диффузии и эффективной теплопроводности сверхтекучих растворов. Расчетные значения сопоставляются с экспериментальными данными. Вычислен коэффициент диффузии в твердых растворах  ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ , отличающийся от предшествующих теоретических результатов. Сопоставление найденного коэффициента диффузии с экспериментальными данными позволило определить численное значение ширины энергетической зоны примесных квазичастиц.

Розв'язок системи кінетичних рівнянь дозволив отримати точний вираз для дифузійного часу, який залежить від частоти зіткнень частинок не тільки різних, а й однакового типів. Результат справедливий для частинок з довільними статистикою та законом дисперсії. Отримані загальні співвідношення використовуються для дослідження дифузії у рідких та твердих розчинах  ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ . Проаналізовано внесок взаємодії квазічастинок однакового типу у коефіцієнт дифузії та ефективної теплопровідності надплинних розчинів. Розрахункові значення порівнюються з експериментальними даними. Обчислено коефіцієнт дифузії у твердих розчинах  ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ , який відмінен від попередніх теоретичних результатів. Порівняння одержаного коефіцієнта дифузії з експериментальними даними дозволило визначити чисельне значення ширини енергетичної зони домішкових квазічастинок.

PACS: 51.20.+d, 67.80.Mg

### Введение

Определение коэффициента диффузии является традиционной задачей для смеси классических газов и конденсированных сред, для которых справедливо квазичастичное описание. Для вычисления коэффициента диффузии необходимо решить систему кинетических уравнений. Ввиду математической сложности при решении указанной системы используются различные приближения. В итоге коэффициент диффузии, как правило, зависит только от времен взаимодействия между частицами разных типов и не содержит времен установления равновесия в компонентах раствора. Развита в настоящей работе методика позволяет

получить точное компактное решение поставленной задачи. Полученные при этом выражения для коэффициента диффузии зависят от времен взаимодействия частиц разных и одинакового типов. Учет последних в ряде случаев существенно влияет на коэффициент диффузии. Найденное общее выражение справедливо для частиц с произвольными статистикой и законом дисперсии. Это позволяет использовать полученные результаты как для смесей классических газов, так и для квантовых квазичастичных систем.

В этой работе полученные общие соотношения используются при исследовании диффузии в жидких и твердых растворах изотопов гелия. Тео-

рия квантовой диффузии в кристаллах была построена Андреевым и Лифшицем [1]. Квантовая диффузия в твердых  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$  впервые наблюдалась Есельсоном с сотрудниками [2-4].

### 1. Решение кинетических уравнений

Рассмотрим стационарное неравновесное состояние двух компонентов газовой смеси  $\alpha$  и  $\beta$ , в которой плотности числа квазичастиц являются функциями координаты  $z$ . В частности, для газа тепловых возбуждений, химический потенциал которых равен нулю, такая ситуация реализуется созданием постоянного градиента температуры.

В рассматриваемом состоянии существуют стационарные градиенты парциальных давлений компонентов, которые приводят к потокам квазичастиц

$$j_k = - \sum_{l=\alpha,\beta} \frac{\rho_k}{\rho} d_{kl} \nabla P_l, \quad (k = \alpha, \beta), \quad (1)$$

где

$$j_k = \int \rho_k f_k d\Gamma_k \quad (2)$$

— плотность потока  $k$ -го компонента смеси;

$$P_l = \frac{1}{3} \int \rho_l v_l f_l d\Gamma_l \quad (3)$$

— парциальное давление квазичастиц;

$$\rho_k = - \frac{1}{3} \int \rho_k^2 f'_k d\Gamma_k \quad (4)$$

— плотность  $k$ -го компонента;  $\rho = \rho_\alpha + \rho_\beta$ ;  $f'_k = \partial f_k / \partial \epsilon_k$  — производная от функции распределения по энергии;  $d\Gamma_k$  — элемент фазового объема;  $v_l = \partial \epsilon_l / \partial p_l$  — скорость квазичастицы типа  $l$ . В стационарном состоянии сумма парциальных давлений  $P_\alpha + P_\beta$  предполагается постоянной. Отметим, что выражения (3), (4) являются общими как для газа тепловых возбуждений, так и для квазичастиц с не равным нулю химическим потенциалом. Для квазичастиц с любым законом дисперсии и химическим потенциалом из (3), (4) следуют общепринятые выражения.

Связь между матрицей диффузионных времен  $d_{kl}$  и коэффициентами диффузии  $D$  можно получить, сравнивая (1) с определениями для коэффициентов диффузии. Эти определения различны для разных физических систем и для конкретных случаев будут рассматриваться ниже.

Для всех известных нам физических систем коэффициент диффузии можно записать в виде

$$D = u_D^2 \tau_D, \quad (5)$$

где  $u_D$  — характерная скорость, аналитическое выражение для которой определяется конкретным законом дисперсии частиц смеси и их статистикой, а  $\tau_D$  — характерное диффузионное время. Последнее, как будет показано ниже, можно записать в общем виде для газов с произвольными статистикой, законом дисперсии и химическим потенциалом.

Согласно (1), (2), для получения коэффициентов диффузии необходимо решить систему кинетических уравнений. Последняя в стационарном состоянии записывается в виде

$$v_k \frac{\partial f_k}{\partial r} = \sum_{l=\alpha,\beta} J_{kl}(f_k, f_l), \quad (6)$$

где  $J_{kl}(f_k, f_l)$  — интеграл столкновений, который является функционалом от функций распределений.

Ниже для определенности рассмотрим диффузию в системе с сохраняющимся числом квазичастиц. Обобщение на случай тепловых возбуждений будет сделано в конце этого раздела.

Решение системы (6) ищем в виде

$$f_k = f_{0k} + \delta f_k, \quad (7)$$

где  $f_{0k}$  — локально равновесная функция распределения  $k$ -го компонента, химический потенциал которого  $\mu_k$  является функцией координаты  $z$ , а  $\delta f_k$  — малая добавка. Последнюю запишем в виде

$$\delta f_k = - f'_{0k} g_k. \quad (8)$$

Линеаризуя систему уравнений (6), получаем систему линейных интегральных уравнений относительно искомых  $g_k$ :

$$v_k \frac{\nabla P_k}{n_k} = J_{kk} g_k + J_{kl} (g_k + g_l), \quad (9)$$

$$k, l = \alpha, \beta; \quad k \neq l.$$

Здесь  $n_k$  — плотность числа  $k$ -х частиц;  $J_{kl}$  — линеаризованные операторы столкновений частиц одного компонента ( $k = l$ ) и разных компонентов ( $k \neq l$ ). Действие этих операторов на произвольную функцию импульса  $\psi(p_{k,l})$  определяется конкретным видом интеграла столкновений. Для бинарного интеграла столкновений с плотностью вероятности перехода  $w_{kl}(p_k, p_l | p'_k, p'_l)$  имеем

при  $k \neq l$

$$J_{kl} \psi(p_{k,l}) = \int \omega_{kl}(p_k, p_l | p'_k, p'_l) f_{0l}(p_l) \{1 \pm f_{0k}(p_k)\}^{-1} \times \\ \times \{1 \pm f_{0k}(p'_k)\} \{1 \pm f_{0l}(p'_l)\} \{ \psi(p'_{k,l}) - \psi(p_{k,l}) \} d\Gamma_l d\Gamma'_k d\Gamma'_l;$$

при  $k = l$

$$J_{kk} \psi(p_k) = \int \omega_{kk}(p_k, p | p'_k, p') f_{0k}(p) \{1 \pm f_{0k}(p_k)\}^{-1} \times \\ \times \{1 \pm f_{0k}(p'_k)\} \{1 \pm f_{0k}(p')\} \{ \psi(p'_k) + \psi(p') - \psi(p_k) - \psi(p) \} d\Gamma d\Gamma'_k d\Gamma'.$$

Знаки плюс и минус относятся соответственно к бозонам и фермионам. Градиент парциального давления для квазичастиц с не равным нулю химическим потенциалом, согласно (3), равен

$$\nabla P_k = n_k \nabla \mu_k |_{T, \mu_i} \quad (10)$$

Систему (9) удобно записать в компактной матричной форме

$$\sum_{k=\alpha, \beta} |\varphi_k\rangle \frac{\partial P_k}{\partial z} = \hat{J} |g\rangle, \quad (11)$$

где

$$|\varphi_\alpha\rangle = \begin{vmatrix} v_{\alpha z} n_\alpha^{-1} \\ 0 \end{vmatrix} \rangle; \quad |\varphi_\beta\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ v_{\beta z} n_\beta^{-1} \end{vmatrix} \rangle; \\ g = \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \end{vmatrix} \rangle \quad (12)$$

— двумерные кет-векторы;

$$\hat{J} = \hat{S} + \hat{I} \quad (13)$$

— операторная матрица, которую удобно представить в виде суммы матрицы

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & J_{\beta\beta} \end{pmatrix} \quad (14)$$

операторов столкновений частиц одинакового типа и матрицы

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} J_{\alpha\beta} & J_{\alpha\beta} \\ J_{\beta\alpha} & J_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \quad (15)$$

операторов столкновений частиц разных типов.

Скалярное произведение произвольных двумерных бра- $\langle \psi | = \langle \psi_\alpha(p_\alpha); \psi_\beta(p_\beta) |$  и кет  $| \chi \rangle$ -векторов определяется следующим образом:

$$\langle \psi | \chi \rangle = \sum_{k=\alpha, \beta} \langle \psi_k | \chi_k \rangle_1 = - \sum_{k=\alpha, \beta} \int \psi_k^* \chi_k f'_{0k} d\Gamma_k, \quad (16)$$

где индекс «1» у вектора указывает на его однокомпонентность.

Система (11) является системой неоднородных линейных интегральных уравнений. Искомое решение  $|g\rangle$  должно быть ортогональным решению системы соответствующих однородных уравнений:

$$\hat{J} | \varphi_1 \rangle = 0. \quad (17)$$

Решение системы (17), нормированное на единицу, записывается в виде

$$| \varphi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \begin{vmatrix} p_{\alpha z} \\ p_{\beta z} \end{vmatrix} \rangle. \quad (18)$$

Вектор  $| \varphi_1 \rangle$  отвечает импульсу двухкомпонентной системы квазичастиц. Физический смысл решения (18) сводится к сохранению полного импульса двухкомпонентной системы квазичастиц при столкновениях. Отметим, что решением уравнения (17) являются и другие векторы, отвечающие законам сохранения: числа частиц (при не равном нулю химическом потенциале), энергии,  $x$ - и  $y$ -компонент импульса. Однако эти векторы можно не учитывать, поскольку, согласно (11), искомое решение  $|g\rangle$  содержит только  $z$ -компоненты вектора  $p$ .

Формальное решение системы (11) удобно записать так, чтобы условие ортогональности

$$\langle g | \varphi_1 \rangle = 0 \quad (19)$$

содержалось в записи решения. Для этого введем оператор-проектор  $\mathcal{P}_n$  на подпространство, ортогональное вектору  $| \varphi_1 \rangle$ ,

$$\mathcal{P}_n = 1 - \mathcal{P}_c, \quad \text{где } \mathcal{P}_c = | \varphi_1 \rangle \langle \varphi_1 |. \quad (20)$$

В итоге формальное решение уравнения (11) можно записать в виде

$$|g\rangle = \mathcal{P}_n (\hat{J}^{-1}) \mathcal{P}_n \sum_{k=\alpha,\beta} |\Phi_k\rangle \frac{\partial P_k}{\partial z}. \quad (21)$$

Подставим решение (21) в выражение для плотности потока (2) и учтем соотношения (7), (8). Сопоставляя полученный результат с определением (1), для матрицы диффузионных времен получаем

$$d_{\alpha\alpha} = \frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha} \tau_D; \quad d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha} = -\tau_D; \quad d_{\beta\beta} = \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta} \tau_D, \quad (22)$$

где

$$\tau_D = -\langle \Phi_2 | \hat{J}^{-1} | \Phi_2 \rangle \quad (23)$$

— характерное диффузионное время, а

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\rho_\alpha \rho_\beta}} \begin{pmatrix} \rho_\beta & \rho_{\alpha z} \\ -\rho_\alpha & \rho_{\beta z} \end{pmatrix} \quad (24)$$

— диффузионный вектор, ортогональный вектору  $|\Phi_1\rangle$ .

Для определенности все вычисления были проделаны для квазичастиц с химическим потенциалом  $\mu$  не равным нулю. Аналогичные вычисления диффузионной части потока (1) для квазичастиц с любым химическим потенциалом ( $\mu = 0, \mu \neq 0$ ) дает те же результаты (22)–(24). Таким образом, формулы (1), (22)–(24) для диффузионной части потока справедливы для квазичастиц любой статистики с любым химическим потенциалом.

## 2. Точное и предельные выражения для диффузионного времени

Для получения точного выражения для матричного элемента (23) введем полную систему ортонормированных двумерных векторов  $|\Phi_n\rangle$  (здесь  $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Первым из них возьмем вектор (18), вторым — (24). Остальные векторы строятся путем стандартной процедуры (см., например, [5]) с учетом определения скалярного произведения (16). В построенной таким образом полной системе векторов точное выражение для

$$\tau_D = -\left\langle \left( \hat{I} + \hat{S} \right)^{-1} \right\rangle_{22} \quad (25)$$

можно привести к виду

$$\tau_D = -\left\langle I_{22} - \sum_{n,n'=3}^{\infty} I_{2n} (\tilde{I} + \tilde{S})^{-1} \right\rangle_{nn'} I_{n'2} \right\rangle^{-1}. \quad (26)$$

Здесь квадратные матрицы  $\tilde{I}$  и  $\tilde{S}$  содержат матричные элементы

$$(\tilde{I})_{nn'} = I_{nn'}; \quad (\tilde{S})_{nn'} = S_{nn'}. \quad (27)$$

где

$$I_{nn'} = \langle \Phi_n | \hat{I} | \Phi_{n'} \rangle; \quad S_{nn'} = \langle \Phi_n | \hat{S} | \Phi_{n'} \rangle. \quad (28)$$

При получении (26) было учтено соотношение (17).

Матрицы (27) бесконечномерны и не диагональны. Поэтому точное решение (26) не позволяет получить явное аналитическое выражение для  $\tau_D$ . Однако решение (26) дает возможность исследовать различные предельные случаи, найти минимальное  $\tau_{D\min}$  и максимальное  $\tau_{D\max}$  значения  $\tau_D$ , получить корректные интерполяционные формулы, производить расчеты на вычислительных машинах для конкретных физических систем.

Так, в случае быстрого установления равновесия между частицами одинакового типа, когда выполняются неравенства

$$S_{nn'} \gg I_{nn'}, \quad (29)$$

из соотношения (26) имеем

$$\tau_D \equiv \tau_{D\min} = -\frac{1}{I_{22}} = \left( \tau_{\alpha\beta}^{(0)-1} + \tau_{\beta\alpha}^{(0)-1} \right)^{-1}, \quad (30)$$

где

$$\tau_{kl}^{(0)} = -\langle J_{kl} \rangle_k^{-1}; \quad k, l = \alpha, \beta; \quad k \neq l \quad (31)$$

Здесь и далее нормированное среднее произвольного оператора  $R$  обозначается

$$\langle R \rangle_k = \frac{1}{\rho_k} \langle p_{kz} | R | p_{kz} \rangle_1, \quad k = \alpha, \beta.$$

Согласно закону сохранения импульса, при столкновениях

$$\tau_{\alpha\beta}^{(0)-1} = \frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha} \tau_{\beta\alpha}^{(0)-1}. \quad (32)$$

Исходя из эрмитовости и отрицательной определенности операторов  $S$  и  $I$  можно показать, что

$$\tau_D \geq \tau_{D\min}. \quad (33)$$

В обратном предельном случае медленного установления равновесия между частицами одинакового типа ( $S_{nn'} \rightarrow 0$ )  $\tau_D$  достигает своего максимального значения

$$\tau_{D\max} = \langle \varphi_2 | \hat{I}^{-1} | \varphi_2 \rangle. \quad (34)$$

В случае, когда плотность  $\alpha$ -го компонента относительно мала ( $\rho_\alpha \ll \rho_\beta$ ) и время взаимодействия частиц  $\alpha$  между собой велико ( $J_{\alpha\alpha} \rightarrow 0$ ), из (26) получаем

$$\tau_D \Big|_{0, \infty} = \tau_{\alpha\beta}^{(\infty)}, \quad (35)$$

где

$$\tau_{\alpha\beta}^{(\infty)} = - \langle J_{\alpha\beta}^{-1} \rangle_\alpha. \quad (36)$$

Отметим, что в (31) усредняется частота, а в (36) — время. При этом, согласно неравенству Коши — Буняковского, при любой импульсной зависимости  $J_{\alpha\beta}$  время, определяемое (31), всегда меньше времени (36). В случае, если  $J_{\alpha\beta}$  не зависит от импульса  $p_\alpha$ , то  $\tau_{\alpha\beta}^{(\infty)} = \tau_{\alpha\beta}^{(0)}$ , а  $\tau_D = \tau_{D\min}$ . Если же оператор  $J_{\alpha\beta}$  зависит от  $p_\alpha$ , то установление равновесия между частицами разных типов зависит от того, насколько быстро устанавливается равновесие между частицами одинакового типа. Здесь ситуация аналогична той, которая существует в фонов-примесной системе сверхтекучих растворов изотопов гелия [6] и в фоновых системах твердых тел [7].

В этих системах реализуется двухэтапный механизм релаксации между частицами разных типов. На первом этапе с частицами  $\beta$  взаимодействуют в основном только те частицы  $\alpha$ , для импульсов которых  $J_{\alpha\beta}$  максимален. На втором этапе установление равновесия в смеси определяется взаимодействием частиц  $\alpha$  между собой. Это связано с тем, что тем частицам  $\alpha$ , для которых  $J_{\alpha\beta}$  минимален, выгоднее провзаимодействовать не с частицами  $\beta$ , а с теми частицами  $\alpha$ , которые уже пришли в равновесие с компонентом  $\beta$ .

Для конкретных систем вычисление  $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$ , как правило, не представляет труда. Что же касается вычисления  $\tau_{\alpha\beta}^{(\infty)}$ , то здесь необходимо находить оператор, обратный интегральному оператору  $J_{\alpha\beta}$ , что удается сделать только с использованием ряда приближений. Так, в случае газа Лоренца [8], когда частицы  $\beta$  неподвижны и рассеяние частиц  $\alpha$  является упругим, действие оператора  $J_{\alpha\beta}$  сводится к умножению на выражение

$$J_{\alpha\beta} = - |v_\alpha| \sigma_t n_\beta, \quad (37)$$

где  $\sigma_t$  — транспортное сечение рассеяния частицы  $\alpha$  на частице  $\beta$ . Приближение (37) делает дальнейшее вычисление тривиальным.

### 3. Приближение времени релаксации

Точное выражение (26) позволяет предложить модельную запись оператора  $J$ , которая приводит к интерполяционной формуле для диффузионного времени (23), содержащей результаты всех известных нам предельных случаев.

Для интегралов столкновений частиц одинакового типа  $J_{kk}$  предлагается следующая модель корректного  $\tau$ -приближения с учетом импульсной зависимости времени взаимодействия  $t_{kk} = t_{kk}(p_k)$  частиц типа  $k$  между собой:

$$J_{kk} = - t_{kk}^{-1} + t_{kk}^{-1} \rho_k^{-1/2} | p_{kz} \rangle_1 \tau_{kk}^{(0)} \langle p_{kz} | \rho_k^{-1/2} t_{kk}^{-1}, \quad (38)$$

где

$$\tau_{kk}^{(0)-1} = \langle t_{kk}^{-1} \rangle_k. \quad (39)$$

Корректность  $\tau$ -приближения (38) обеспечивает выполнение закона сохранения импульса при столкновениях, согласно которому

$$J_{kk} | p_{kz} \rangle_1 = 0.$$

В соотношении (38) содержится только  $z$ -компонента импульса, поскольку, согласно (11), искомого решение  $|g\rangle$  содержит только  $z$ -компоненту вектора  $p$ .

Диагональные элементы в матрице (15) можно заменить на соответствующие частоты столкновений частиц  $k$  с  $l$ :

$$J_{kl} = - t_{kl}^{-1}(p_k); \quad k, l = \alpha, \beta; \quad k \neq l. \quad (40)$$

Функции  $t_{kk}^{-1}(p_k)$  и  $t_{kl}^{-1}(p_k)$  задаются соответственно операторами  $J_{kk}$  и  $J_{kl}$ . Наиболее удобным является следующее определение частоты столкновений при  $k \neq l$  и  $k = l$ :

$$t_{kl}^{-1}(p_k) = \frac{v_{kl}(p_k)}{\langle v_{kl} \rangle_k} \tau_{kl}^{(0)-1}, \quad (41)$$

где  $v_{kl}(p_k)$  — транспортная частота столкновений, которая стандартным образом записывается исходя из интеграла столкновений. Так, для бинарного взаимодействия

$$v_{kl}(p_k) = \int \left( 1 - \frac{p_k p'_k}{p_k p'_k} \right) w_{kl} f_{0l}(p_l) \left[ 1 \pm f_{0k}(p_k) \right]^{-1} \times \\ \times \left[ 1 \pm f_{0k}(p'_k) \right] \left[ 1 \pm f_{0l}(p'_l) \right] d\Gamma'_k d\Gamma'_l d\Gamma'_l. \quad (42)$$

Отметим, что только при таком выборе частоты столкновений (41) приближение времени релаксации правильно описывает все предельные случаи (30), (34), (35) и (37), следующие из общего решения (26).

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} -t_{\alpha\beta}^{-1} & t_{\alpha\beta}^{-1} | p_{\alpha z} \rangle_1 \rho_{\alpha}^{-1} \tau_{\alpha\beta}^{(0)} \langle p_{\beta z} | t_{\beta\alpha}^{-1} \\ t_{\beta\alpha}^{-1} | p_{\beta z} \rangle_1 \rho_{\beta}^{-1} \tau_{\beta\alpha}^{(0)} \langle p_{\alpha z} | t_{\alpha\beta}^{-1} & -t_{\beta\alpha}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Отметим, что выражения (38) и (44) для операторной матрицы (13) удовлетворяют закону сохранения полного импульса (17) при столкновениях квазичастиц смеси.

Модельная запись (38), (44) операторной матрицы (13) позволяет исходя из определения (23) получить диффузионное время  $\tau_D$  как функцию времен взаимодействия квазичастиц смеси. Производя вычисления, аналогичные приведенным в [9], получаем

$$\tau_D = \tau_{D\min} + \frac{\rho_{\beta}}{\rho} \left( \tau_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}^{(0)} \right) + \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \left( \tau_{\beta\alpha} - \tau_{\beta\alpha}^{(0)} \right), \quad (45)$$

где

$$\tau_{kl} = \langle R_k \rangle_k + \langle R_k t_{kk}^{-1} \rangle_k^2 \langle R_k t_{kk}^{-1} t_{kl}^{-1} \rangle_k^{-1}; \quad (46)$$

$$R_k = \left( t_{kk}^{-1} + t_{kl}^{-1} \right)^{-1}.$$

Время  $\tau_{kl}$  в отличие от  $\tau_{kl}^{(0)}$  зависит от частоты взаимодействия  $t_{kk}^{-1}$  частиц  $k$  между собой. Согласно (45), такая зависимость может только увеличить диффузионное время  $\tau_D$ . Это становится очевидным, если соотношение (46) записать в виде

$$\tau_{kl} = \tau_{kl}^{(0)} + \langle (1 - \tau_{kl}^{(0)} t_{kl}^{-1})^2 R_k \rangle_k + \\ + \langle (1 - \tau_{kl}^{(0)} t_{kl}^{-1}) R_k t_{kk}^{-1} \rangle_k^2 \langle R_k t_{kk}^{-1} t_{kl}^{-1} \rangle_k^{-1}. \quad (47)$$

Из результата (45) следуют все рассмотренные выше предельные случаи (30), (34) и (35). Если

Недиагональные операторы матрицы (15), действуя на функции импульсов частиц одного типа, дают функции импульсов частиц другого типа. Это обстоятельство, в отличие от соотношения (40), не позволяет заменить недиагональные операторы матрицы (15) на операторы умножения.

Здесь предлагается следующее модельное выражение для недиагональных операторов столкновений

$$J_{kl} = t_{kl}^{-1}(p_k) | p_{kz} \rangle_1 \rho_k^{-1} \tau_{kl}^{(0)} \langle p_{lz} | t_{lk}^{-1}(p_l). \quad (43)$$

Соотношения (40) и (43) для операторной матрицы (15) дают

время  $t_{\alpha\beta}$  не зависит от импульса, соотношение (45), как и (26), дает  $\tau_D = \tau_{D\min}$ .

В пределе малой плотности одного из компонентов (например,  $\rho_{\alpha} \ll \rho_{\beta}$ ) из (45) получим формулу, отвечающую приближению [7]:

$$\tau_D = \langle R_{\alpha} \rangle_{\alpha} + \langle R_{\alpha} t_{\alpha\alpha}^{-1} \rangle_{\alpha}^2 \langle R_{\alpha} t_{\alpha\alpha}^{-1} t_{\alpha\beta}^{-1} \rangle_{\alpha}^{-1}. \quad (48)$$

Если  $t_{\alpha\alpha}$  не зависит от импульса, а  $t_{\beta\beta} \rightarrow 0$ , то из формулы (45) получаем результат работы [6]:

$$\tau_D = \frac{\langle R_{\alpha} \rangle_{\alpha}}{\langle R_{\alpha} t_{\alpha\beta}^{-1} \rangle_{\alpha}}. \quad (49)$$

Таким образом, формула (45) обобщает результаты работ [6,7] и во всех предельных случаях дает выражения, следующие из точного решения (26).

#### 4. Диффузия и эффективная теплопроводность сверхтекучих растворов $^3\text{He}-^4\text{He}$

Согласно теории Ландау и Померанчука [10], кинетические свойства сверхтекучих растворов  $^3\text{He}-^4\text{He}$  определяются трехкомпонентным газом слабозаимодействующих квазичастиц: фононов, ротонов (тепловые возбуждения) и примесонов (квазичастиц  $^3\text{He}$  в растворе).

Основы кинетической теории растворов были заложены Халатниковым и Жарковым [11] в 1957 г. К моменту построения теории [11] отсутствовал необходимый набор экспериментальных данных о сверхтекучих растворах  $^3\text{He}-^4\text{He}$ , а ряд

существовавших, как потом оказалось, не соответствовал действительности. Так например, ошибочными были первые данные об эффективной массе ротона и предположение о нераспадности фононного спектра растворов. В связи с этим в теории [11] отсутствовало, в частности, время трехчастичных фононных процессов, обеспечивающих быструю продольную релаксацию в фононной системе, а коэффициент диффузии раствора находился в приближении (37) газа Лоренца. Неподвижными при этом предполагались ротонны. Между тем из последующих экспериментов, описанных в [12], по исследованию ротонного спектра следовало, что средняя тепловая скорость ротоннов даже больше тепловой скорости примесоннов. В связи с этим в первой теории [11], построенной по аналогии с кинетикой разреженных газов, согласие расчетных значений с наблюдаемыми достигалось путем введения подгоночных параметров. Здесь следует особо отметить, что основные положения теории [11] и целый ряд ее результатов не вызывают сомнений и сегодня. Они послужили базой для последующих теоретических работ.

Так, в [13] Беймом с сотрудниками была развита кинетическая теория растворов  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  в области низких температур, где вкладом ротоннов можно пренебречь. Указанная теория не учитывала взаимодействие фононов друг с другом, в связи с чем ее результаты описывали экспериментальные данные только для достаточно концентрированных растворов.

Последующие экспериментальные и теоретические исследования [6, 14-16] позволили достаточно точно описать кинетические явления в фонон-примесонной системе сверхтекучих растворов  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ . Дальнейшее развитие кинетическая теория растворов получила в работах [9, 17], где были исследованы релаксационные процессы в трехкомпонентном газе квазичастиц (фононов, ротоннов, примесоннов).

Целью настоящего раздела является получение коэффициентов диффузии и эффективной теплопроводности сверхтекучих растворов  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  исходя из общих соотношений (1), (22) и (45); сопоставление расчетных значений с наблюдаемыми во всей области температур, для которой имеются экспериментальные данные; анализ вкладов взаимодействий квазичастиц одинакового типа в коэффициенты диффузии сверхтекучих растворов  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ .

Для дальнейших исследований удобно выделить три температурные области, которые отличаются характером физических процессов, определяющих диффузию в растворе. В области низких

температур ( $T < 0,6$  К), когда вкладом ротоннов можно пренебречь, теплопроводность растворов определяется диффузией в фонон-примесонной системе. В соответствии с результатом работы [1] в рассматриваемой области температур для эффективного коэффициента теплопроводности имеем

$$\kappa_{\text{eff}} = D_{\text{iph}} \left( S_{\text{ph}} \frac{\rho_{\text{ph}} + \rho_i}{\rho_{\text{ph}}} \right)^2 \frac{1}{n_i} + \kappa_i. \quad (50)$$

Здесь  $D_{\text{iph}}$  — коэффициент диффузии примесоннов в газе фононов;  $S_{\text{ph}}$  — энтропия фононного газа;  $\rho_{\text{ph}}$  и  $\rho_i$  — плотности фононного и примесонного газов соответственно, определяемые соотношением (4);  $n_i$  — плотность атомов  ${}^3\text{He}$  в растворе;  $\kappa_i$  — коэффициент теплопроводности газа примесоннов. Выражение для  $D_{\text{iph}}$  следует из соотношений (1), (22) и определения (см., например, [18, 19]) коэффициентов диффузии в сверхтекучем растворе:

$$D_{\text{iph}} = \frac{2}{3} \frac{1}{m_i} \frac{\langle \epsilon_i | 1 \rangle_1}{\langle 1 | 1 \rangle_1} \frac{\rho_{\text{ph}}}{\rho_{\text{ph}} + \rho_i} \tau_D^{(\text{phi})}, \quad (51)$$

где  $\epsilon_i = p_i^2 / 2m_i$  — кинетическая энергия примесона, а  $\tau_D^{(\text{phi})}$  дается соотношением (45), в котором индексы  $\alpha$  и  $\beta$  следует соответственно заменить на индексы  $i$  (примесон) и  $\text{ph}$  (фонон). Для невырожденных растворов имеем

$$\frac{2}{3} \frac{\langle \epsilon_i | 1 \rangle_1}{\langle 1 | 1 \rangle_1} = T.$$

Обсудим соотношение между временами, входящими в (45). Время фонон-примесонного взаимодействия, согласно [13, 20], описывается выражением

$$t_{\text{phi}} = 13,6 n_4 / c x p_{\text{ph}}^4, \quad (52)$$

где  $x = n_i / (n_i + n_4)$  — концентрация раствора, а  $c$  и  $p_{\text{ph}}$  — скорость и импульс фонона соответственно. Существенная зависимость времени (52) от импульса фонона приводит к необходимости учета времен взаимодействия квазичастиц одинакового типа. Время взаимодействия примесон — примесон  $t_{ii} \sim x^{-1}$  и, согласно [21], много меньше  $\tau_{D\text{min}}^{(\text{iph})}$ . В связи с этим релаксацию в системе примесоннов можно считать мгновенной и опустить второе слагаемое в выражении (45). Распадный фононный спектр разрешает трехчастичные фононные процессы, которые обеспечивают относительно быстрое установление равновесия для фононов, движущихся в заданном направлении, с временем [21]

$$t_{\text{ph ph}} = 15 \rho_4 c^4 / \pi^3 (u_1 + 1)^2 T^4 \rho_{\text{ph}}, \quad (53)$$

где  $\rho_4$  — плотность  $^4\text{He}$  в растворе, а  $u_1 = \rho_4 \partial c / \partial \rho_4$ .

Соотношение между временами (52) и (53) определяется концентрацией раствора и температурой. На рис. 1 приведены рассчитанные по формуле (50) и измеренные в [22] значения эффективного коэффициента теплопроводности раствора с  $x = 1,39 \cdot 10^{-4}$ . Вкладом  $\kappa_i$  для такого раствора можно пренебречь. При этом  $\tau_D^{(\text{iph})}$  оказалось фактически совпадающим с  $\tau_{D\text{min}}^{(\text{iph})}$ , что свидетельствует о быстрой релаксации в фоновой системе такого раствора. По мере повышения концентрации время (52) уменьшается и учет конечности времени (53) становится существенным.

На рис. 2 приведены наблюдаемые и расчетные значения коэффициента эффективной теплопроводности для растворов с разной концентрацией. Как видно из рис. 2, в рассматриваемой области температур ( $T < 0,6$  К) по мере повышения концентрации значения  $\kappa_{\text{eff}}$  с  $\tau_D^{(\text{iph})} = \tau_{D\text{min}}^{(\text{iph})}$  (пунктирные кривые) начинают отличаться от значений, полученных по формуле (45), учитывающих конечность времени релаксации в фоновой системе (сплошные кривые). При этом сплошные кривые лучше согласуются с экспериментальными данными. Отметим, что для рассмотренной области температур приведенные результаты согласуются с расчетами и выводами работ [6,15,16].

В области промежуточных температур ( $0,7 \text{ К} < T < 1 \text{ К}$ ), когда мал вклад примесонов, эффективная теплопроводность в основном определяется диффузией в газе тепловых возбуждений. Процессы диффузии в двухкомпонентном фонон-ротонном газе впервые исследовались в ра-

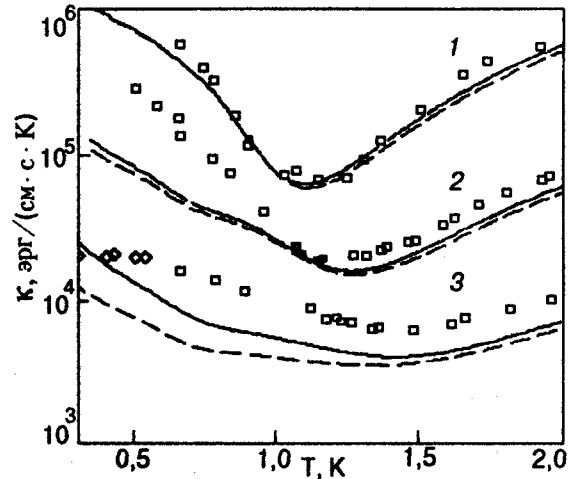


Рис. 2. Температурная зависимость коэффициента эффективной теплопроводности растворов с различными концентрациями  $x$ :  $1,39 \cdot 10^{-4}$  (1);  $1,32 \cdot 10^{-3}$  (2);  $1,36 \cdot 10^{-2}$  (3). Результаты расчета с учетом вкладов всех типов квазичастиц изображены сплошными и пунктирными кривыми. Последние отвечают расчету в приближении мгновенной релаксации в компонентах растворов;  $\square$  — экспериментальные данные [22];  $\diamond$  — [23].

боте [24]. В дальнейшем в [19] было показано, что этот процесс приводит к переносу тепла в меру различия законов дисперсии фононов и ротонов. Расчет по формулам (1), (22) и (45), аналогичный выполненному в [19], дает

$$\kappa_{\text{eff}}^{(\text{rph})} = \frac{1}{T} \frac{\rho_{\text{ph}} \rho_r}{\rho_{\text{ph}} + \rho_r} \left[ \frac{S_{\text{ph}} T}{\rho_{\text{ph}}} - \frac{S_r T}{\rho_r} \right]^2 \tau_D^{(\text{rph})}. \quad (54)$$

Здесь  $S_r$  и  $\rho_r$  — энтропия и плотность ротонного газа соответственно, а  $\tau_D^{(\text{rph})}$  дается соотношением (45), в котором индексы  $\alpha$  и  $\beta$  следует заменить соответственно на индексы  $r$  (ротон) и  $\text{ph}$  (фонон). Выражение (54) переходит в результат работы [19], если в (45) времена  $t_{\text{ph ph}}$  и  $t_{rr}$  устремить к нулю.

Частота фонон-ротонных столкновений  $t_{\text{phr}}^{-1}$ , согласно [18], аналогично (52) существенно зависит от импульса фононов

$$t_{\text{phr}}^{-1} \sim p_{\text{ph}}^4.$$

Однако в рассматриваемой области температур определяемое соотношением (53) характерное время фонон-фононного взаимодействия существенно меньше времени фонон-ротонного взаимодействия, поэтому вкладом второго слагаемого в (45) можно пренебречь.

Частота ротон-фононного рассеяния  $t_{\text{rph}}^{-1}$ , согласно [18], предполагается не зависящей от импульса ротонов, что позволяет опустить и последнее слагаемое в (45). В результате диффузионное

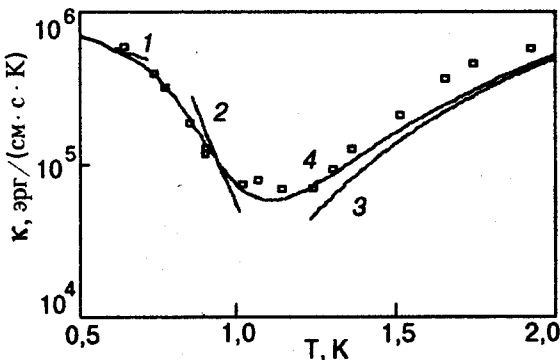


Рис. 1. Температурная зависимость коэффициента эффективной теплопроводности раствора с концентрацией  $x = 1,39 \cdot 10^{-4}$ . Вклады в эффективную теплопроводность диффузии в примесон-фононной (1); ротон-фононной (2) и примесон-ротонной (3) системах. Кривая 4 — расчет коэффициента эффективной теплопроводности с учетом вкладов всех квазичастиц,  $\square$  — экспериментальные данные [22].



фонон-ротонное время  $\tau_D^{(phr)}$  определяется своим минимальным значением

$$\tau_D^{(phr)} = \tau_{Dmin}^{(phr)} = \left( \tau_{phr}^{(0)-1} + \tau_{rph}^{(0)-1} \right)^{-1}. \quad (55)$$

На рис. 1 кривая 2 представляет собой результат расчета по формуле (54) и показывает существование достаточно широкой области температур, в которой необходим учет  $\kappa_D^{(ph)}$ . Причем  $\kappa_D^{(ph)}$  в этой области полностью определяет эффективный коэффициент теплопроводности. Это доказывает необходимость учета процессов диффузии между тепловыми возбуждениями при исследовании теплопроводности конденсированных сред.

При достаточно высоких температурах ( $T > 1$  К) кинетические свойства сверхтекучих растворов в основном определяются ротонами и примесонами. Согласно [18], в рассматриваемой области температур для эффективного коэффициента теплопроводности имеем

$$\kappa_{eff} = D_{ir} \left( S_r \frac{\rho_r + \rho_i}{\rho_r} \right)^2 \frac{1}{n_i} + \kappa_i + \kappa_r, \quad (56)$$

где  $\kappa_r$  — коэффициент теплопроводности ротонного газа. Исходя из соотношений (1), (22) и определения (см., например, [19]) коэффициентов диффузии в сверхтекучем растворе для коэффициента диффузии примесона в ротонном газе имеем

$$D_{ir} = \frac{\rho_r}{\rho_i + \rho_r} \frac{T}{m_i} \tau_D^{(ir)}, \quad (57)$$

где время  $\tau_D^{(ir)}$  дается соотношением (45), в котором индексы  $\alpha$  и  $\beta$  следует заменить соответственно на индексы  $i$  и  $r$ .

Соотношение (57) переходит в результат работы [19], если в выражении (45) времени  $t_{ii}$  и  $t_{rr}$  устремить к нулю.

Частота примесон-ротонных столкновений, согласно результатам работы [25] и определения (41), записывается в виде

$$t_{ir}^{-1}(p_i) = A^2 n_r \left( \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mu v_r^2}{2T}\right) dv_r \right)^{-1} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mu v_r^2}{2T}\right) \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \sin^2\theta \left( \frac{\mu}{2} (v_r - v_i)^2 + \frac{p_i^2}{2m_i} \sin^2\theta \right)^{1/2} d \cos \theta dv_r, \quad (58)$$

где  $A$  — амплитуда примесон-ротонного рассеяния.

В рассматриваемой области температур и концентраций выполняются предельные соотношения для времен релаксаций, которые определяются отсутствием равновесия в газе примесонов [ $\tau_{ii} \gg t_{ir}$ ] и быстрой релаксации в газе ротоннов [ $\tau_{rr} \ll t_{ri}$ ]. При этих условиях общее выражение (45) дает

$$\tau_D^{(ir)} = \tau_{Dmax}^{(ir)} = \langle t_{ir} \rangle_i. \quad (59)$$

Результаты вычисления по формуле (57) эффективной теплопроводности для растворов с  $x = 1,39 \cdot 10^{-4}$  приведены на рис. 1 (кривая 3). Здесь вкладом второго и третьего слагаемых в (56) можно пренебречь. Учет конечности времен  $t_{ii}$  и  $t_{rr}$  увеличивает расчетные значения на величину порядка 10%, улучшая тем самым согласие теории с экспериментом. Отметим, что относительно малое отличие  $\tau_{min}^{(ir)}$  от  $\tau_{max}^{(ir)}$  связано со слабой зависимостью частоты (58) от импульса. На рис. 2 пунктирные кривые соответствуют рас-

чету с  $\tau_D = \tau_{Dmin}$ , а сплошные — с  $\tau_D$ , вычисленным по формуле (45).

Для сверхтекучих растворов  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  представляли бы несомненный интерес измерения коэффициента диффузии при разных концентрациях вплоть до самых высоких, когда время  $\tau_{ii}$  становится сравнимым с  $\tau_{ir}$ . Сопоставление таких экспериментальных данных с приведенными здесь результатами позволило бы найти зависимость  $\tau_{ir}$  от скорости релаксации в газе примесонов.

## 5. Диффузия в твердых растворах ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$

Феноменологическая теория квантовой диффузии атомов примесей  ${}^3\text{He}$  в твердых растворах изотопов гелия была впервые предложена Андреевым и Лифшицем [1]. В этой работе атомы примесей рассматривались как делокализованные квазичастицы, практически свободно движущиеся через кристалл. Тем самым в [1] была предсказана квантовая диффузия примесонов в твердых растворах  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ . Дальнейшие теоретические исследования проводились в работах [26-30], в

которых особое внимание уделялось исследованию фонов-примесонного взаимодействия. Это взаимодействие приводит к сильной температурной зависимости ( $T^{-9}$ ) коэффициента диффузии. Впервые такая зависимость наблюдалась в работах [2-4], что позволило провести количественное сравнение с теорией.

Целью настоящего раздела является вычисление коэффициента диффузии в твердых растворах исходя из общей методики, изложенной в разд. 1. Полученные при этом выражения для коэффициента диффузии по форме записи отличаются от результатов предшествующих работ и содержат параметры, которые могут быть найдены из других экспериментов. Предложенная в разд. 1-3 методика позволяет сопоставить параметры, определенные из разных экспериментов.

Рассмотрим стационарное неравновесное состояние твердого раствора  $^3\text{He}-^4\text{He}$ , в котором числа примесоннов в единице объема с разными проекциями спинов  $n_{\uparrow}$  и  $n_{\downarrow}$  являются функциями координаты  $z$ . При этом суммарная плотность  $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$  и температура являются постоянными.

Коэффициент диффузии примесоннов  $D_s$  с заданной проекцией спина  $\uparrow$  в соответствии с определением [12] дается соотношением

$$u_{\uparrow} = -D_s \frac{\nabla n_{\uparrow}}{n_{\uparrow}}, \quad (60)$$

где

$$u_{\uparrow} = j_{\uparrow} \rho_{\uparrow}^{-1} \quad (61)$$

— средняя скорость диффузионного потока примесоннов со спином  $\uparrow$ ;  $j_{\uparrow}$  — плотность диффузионного потока, функциональная зависимость которой от  $f_{\uparrow}$  дается выражением (2) с  $k = \uparrow$ , а  $\rho_{\uparrow}$  — нормальная плотность примесоннов со спином  $\uparrow$ , которая дается общим выражением (4). Связь  $D_s$  с матрицей диффузионных времен определяется соотношением (1), в котором индексы  $\alpha$  и  $\beta$  следует заменить на индексы  $\uparrow$  и  $\downarrow$  и учесть, что  $\nabla n_{\uparrow} = -\nabla n_{\downarrow}$ .

При постоянной температуре и отсутствии зависимости взаимодействий квазичастиц от направления спина фоновая система находится в состоянии равновесия. Поэтому для получения коэффициента  $D_s$  как функции примесон-примесонных и примесон-фононных частот необходимо решать систему только двух кинетических уравнений. Эта система получается из уравнений (11) введением в правые части равенств (11) слагаемых, описывающих столкновения примесоннов с равновесными фононами. В результате решения полученной системы

уравнений по схеме, изложенной в разд. 1 и 2, для коэффициента диффузии примесона со спином  $\uparrow$  имеем

$$D_s = \frac{2}{3} \frac{\langle \epsilon_i | 1 \rangle_{\uparrow}}{\langle 1 | 1 \rangle_{\uparrow}} \frac{1}{m_i} \tau_s. \quad (62)$$

Здесь  $\epsilon_i = p_i^2 / 2m_i$  — кинетическая энергия примесона, а  $\tau_s$  определяется соотношением (25), в котором

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} J_{\uparrow\downarrow} + J_{\uparrow\text{ph}} & J_{\downarrow\text{ph}} \\ J_{\uparrow\text{ph}} & J_{\downarrow\uparrow} + J_{\downarrow\text{ph}} \end{pmatrix}; \quad (63)$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} J_{\uparrow\uparrow} & 0 \\ 0 & J_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Учитывая, что фононы одинаково взаимодействуют с примесонами, имеющими различные проекции спина, и предполагая слабую импульсную зависимость частоты столкновений примесоннов друг с другом, для  $\tau_s$  имеем

$$\tau_s = \left( \tau_{ii}^{-1} + \tau_{\text{iph}}^{(0)-1} \right)^{-1}, \quad (65)$$

где

$$\tau_{ii}^{-1} = -\langle J_{\uparrow\downarrow} \rangle_{\uparrow} - \langle J_{\downarrow\uparrow} \rangle_{\downarrow}. \quad (66)$$

— частота столкновений примесоннов друг с другом;

$$\tau_{\text{iph}}^{(0)-1} = -\langle J_{\uparrow\text{ph}} \rangle_{\uparrow} = -\langle J_{\downarrow\text{ph}} \rangle_{\downarrow}. \quad (67)$$

— частота столкновений примесоннов с фононами.

Для слабых растворов в области относительно высоких температур частотой столкновений примесоннов  $\tau_{ii}^{-1}$  в (65) можно пренебречь. Тогда  $D_s$  в основном определяется диффузией примесоннов в газе фононов с коэффициентом

$$D_{\text{iph}}^{(s)} = \frac{2}{3} \frac{\langle \epsilon_i | 1 \rangle_{\uparrow}}{\langle 1 | 1 \rangle_{\uparrow}} \frac{1}{m_i} \tau_{\text{iph}}^{(0)}. \quad (68)$$

При вычислении скалярных произведений, входящих в (62) и (68), интегралы берутся в пределах ширины зоны примесона  $\Delta \ll T$ . В итоге соотношение (68) дает

$$D_{\text{iph}}^{(s)} = \frac{2}{3} \frac{\Delta}{m_i} \tau_{\text{iph}}^{(0)}. \quad (69)$$

Результат (69) отличается от коэффициента диффузии (51) в фонов-примесонной системе жидких растворов  $^3\text{He}-^4\text{He}$ .

Во-первых, конечная ширина энергетической зоны примесонов в твердом растворе приводит к замене  $T$  на  $\Delta$  при  $\Delta \ll T$ .

Во-вторых, в (51) содержится множитель  $\rho_{ph} / (\rho_{ph} + \rho_i)$ , который существенно определяет зависимость  $D_{iph}$  от температуры. Такой множитель обусловлен диссипативным потоком фононов, направленным навстречу диффузионному потоку примесонов так, что суммарный импульс равен нулю.

В-третьих, в отличие от  $\tau_{iph}^{(0)}$  в (69) время  $\tau_D^{(iph)}$  (45) зависит от частоты столкновений частиц одинакового типа ( $t_{ii}$  и  $t_{ph\ ph}$ ). Впервые различие вкладов примесон-фононного взаимодействия в коэффициенты массовой и спиновой диффузии жидких растворов  $^3\text{He}-^4\text{He}$  было описано в [19].

Обсудим температурную зависимость коэффициента  $D_{iph}^{(s)}$ . Для этого, используя закон сохранения импульса, запишем  $\tau_{iph}^{(0)}$  в виде

$$\tau_{iph}^{(0)} = \tau_{phi}^{(0)} \rho_i / \rho_{ph} \quad (70)$$

Здесь, согласно общему выражению (4),

$$\rho_i = \frac{2}{5} \frac{\Delta}{T} n_i m_i, \quad (71)$$

$$\rho_{ph} = \frac{2\pi^2 T^4}{15 u^3}, \quad (72)$$

где  $u$  — усредненная скорость продольного и поперечного звуков в твердом гелии. Подстановка (70), (71) в (69) дает

$$D_{iph}^{(s)} = \frac{4}{25} \frac{\Delta^2}{T} \frac{n_i}{\rho_{ph}} \tau_{phi}^{(0)}. \quad (73)$$

Время  $\tau_{phi}^{(0)}$  имеет характерную для рэлеевского рассеяния зависимость  $T^{-4}$ , а  $\rho_{ph}$ , согласно (72), пропорционально  $T^4$ . В итоге, согласно (73),  $D_{iph}^{(s)} \sim T^{-9}$ .

Такая сильная температурная зависимость впервые была получена в [1] исходя из феноменологических соображений. Согласно (69), температурная зависимость  $D_{iph}^{(s)}$  определяется только  $\tau_{iph}^{(0)}$ . При этом из (70)–(73) следует, что восемь степеней температуры связаны с фононами (нормальная плотность фононов  $\rho_{ph} \sim T^4$ , частота столкновений фононов с примесонами  $\tau_{phi}^{(0)-1} \sim T^4$ ), а одна — с нормальной плотностью примесонов (71).

Выражения (69), (73) по форме записи отличаются от результатов, приведенных в [1, 26–30]. Соотношение (73) содержит параметры, которые можно определить из эксперимента.

Так, время  $\tau_{phi}^{(0)}$ , входящее в (73), можно найти из данных по теплопроводности твердых раство-

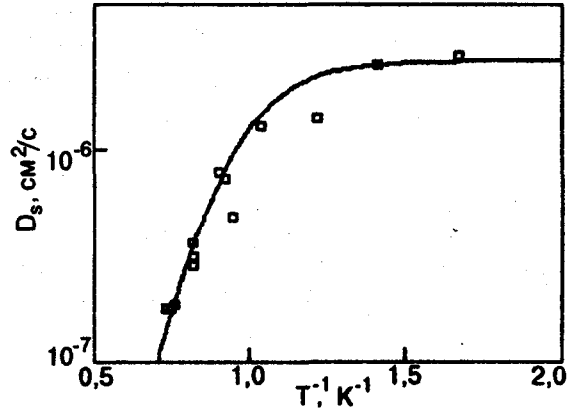


Рис. 3. Зависимость коэффициента диффузии  $D_s$  от обратной температуры для раствора с концентрацией  $x = 6 \cdot 10^{-5}$ :  $\square$  — экспериментальные данные [2–4]; кривая — расчет исходя из соотношений (72)–(77).

ров  $^3\text{He}-^4\text{He}$  [31]. Вклад фонон-примесонного взаимодействия в эффективную теплопроводность определяется первым слагаемым в правой части равенства (50). При этом, согласно (45), для слабых растворов с  $x \leq 10^{-3}$  в (50) время  $\tau_D = \tau_{phi}^{(0)}$ . В итоге из экспериментов [31] имеем

$$\tau_{phi}^{(0)} = 8,96 \cdot 10^{-11} T^{-4} x^{-1}. \quad (74)$$

Нормальная плотность фононов рассчитывается по скорости продольного и поперечного звуков. Таким образом, правая часть (73) содержит единственный неизвестный параметр  $\Delta$ .

Численное значение для  $\Delta$  можно получить исходя из экспериментальных данных [2–4] для коэффициента примесон-фононной диффузии в растворах с  $x = 6 \cdot 10^{-5}$ . Для этого, учитывая (65), выражение для  $D_s$  запишем в виде

$$D_s = \left( D_{iph}^{(s)-1} + D_{ii}^{-1} \right)^{-1}, \quad (75)$$

где  $D_{ii}$  — не зависящий от температуры вклад примесон-примесонного взаимодействия в спиновую диффузию, который, согласно [12], равен

$$D_{ii} = 2,67 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{с}.$$

На рис. 3 приведены экспериментальные [2] и рассчитанные по формулам (72)–(76) значения коэффициента диффузии. Согласие наблюдаемых и расчетных значений достигается при

$$\Delta = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ К}.$$

Полученная величина уточняет результаты работ [26, 33], где приведен только порядок величины.

### Заключение

Получено точное решение (26) для диффузионного времени, которое определяет коэффициент диффузии в смесях частиц с любой статистикой и законом дисперсии. Из предельных случаев (30), (34) и (35) следует, что коэффициент диффузии может существенно зависеть от взаимодействия частиц одинакового типа. Для двухкомпонентной системы предложено корректное приближение времени релаксации (44), позволившее записать диффузионное время (45) как функцию времен взаимодействия частиц. Полученные общие результаты использованы при исследовании диффузии в сверхтекучих растворах  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ . С учетом собственных времен найден вклад коэффициента диффузии в эффективную теплопроводность во всей области температур, где существуют экспериментальные данные. Проведено сопоставление теории с экспериментом (рис. 1 и 2).

Общие результаты разд. 1–3 позволили вычислить коэффициент диффузии в твердых растворах  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ . Полученное выражение (73) по форме записи отличается от результатов предшествующих теорий и содержит параметры, которые могут быть найдены из других экспериментов. Сопоставление расчетных значений с экспериментальными данными [2–4] позволило определить численное значение энергетической зоны примесона.

Авторы выражают благодарность В. Н. Григорьеву за обсуждение ряда проблем, связанных с диффузией в твердых растворах изотопов гелия.

1. А. Ф. Андреев, И. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **56**, 2057 (1969).
2. В. Н. Григорьев, Б. Н. Есельсон, В. А. Михеев, *Письма в ЖЭТФ* **18**, 289 (1973).
3. V. N. Grigor'ev, B. N. Esel'son, V. A. Mikheev, V. A. Slusarev, M. A. Strzhemechny, and Yu. E. Shulman, *J. Low Temp. Phys.* **13**, 65 (1973).
4. В. Н. Григорьев, Б. Н. Есельсон, В. А. Михеев, *ЖЭТФ* **66**, 321 (1974).
5. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, Москва (1976).
6. И. Н. Адаменко, Э. Я. Рудаковский, В. И. Цыганок, В. К. Чаговец, *Письма в ЖЭТФ* **33**, 404 (1984).
7. J. Callaway, *Phys. Rev.* **113**, 1046 (1959).
8. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
9. И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко, В. И. Цыганок, *ЖЭТФ* **69**, 731 (1989).
10. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, *ДАН СССР* **59**, 669 (1948).
11. И. М. Халатников, В. Н. Жарков, *ЖЭТФ* **32**, 1108 (1957).

12. *Растворы квантовых жидкостей  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$* , Б. Н. Есельсон, В. Н. Григорьев, В. Г. Иванцов, Э. Я. Рудаковский, Д. Г. Саникидзе, И. А. Сербин, Наука, Москва (1973).
13. G. Baym and C. Ebner, *Phys. Rev.* **164**, 235 (1967).
14. Э. Я. Рудаковский, В. К. Чаговец, *ФНТ* **9**, 234 (1983).
15. И. Н. Адаменко, В. И. Цыганок, *ЖЭТФ* **87**, 865 (1984).
16. И. Н. Адаменко, В. И. Цыганок, *ЖЭТФ* **88**, 1641 (1985).
17. I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, and V. I. Tsyganok, *J. Low Temp. Phys.* **81**, 233 (1990).
18. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
19. И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко, *ФНТ* **21**, 498 (1995).
20. G. McHale, M. A. Jones, and R. M. Bowley, *J. Phys.* **C21**, 5757 (1988).
21. И. Н. Адаменко, Э. Я. Рудаковский, *ФНТ* **13**, 3 (1987).
22. Т. П. Плуха, *ЖЭТФ* **40**, 1583 (1961).
23. W. R. Abel and J. C. Whetley, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1231 (1968).
24. Ch. Um, Ch. Jun, H. Shin, and T. F. George, *J. Low Temp. Phys.* **78**, 51 (1990).
25. И. Н. Адаменко, А. В. Жуков, К. Э. Немченко, *ФНТ* **22**, 1100 (1996).
26. И. Пушкарев, *Письма в ЖЭТФ* **19**, 751 (1974).
27. Ю. Каган, Л. А. Максимов, *ЖЭТФ* **65**, 751 (1973).
28. Yu. Kagan and M. I. Klinger, *J. Phys.* **C7**, 279 (1974).
29. В. А. Слюсарев, М. А. Стржеменный, И. А. Бурахович, *ФНТ* **3**, 1229 (1977).
30. В. А. Слюсарев, М. А. Стржеменный, И. А. Бурахович, *ФНТ* **4**, 698 (1978).
31. А. А. Голуб, С. В. Сватко, *ФНТ* **7**, 970 (1981).

### Diffusion in liquid and solid ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ mixtures

I. N. Adamenko, A. V. Zhukov, K. E. Nemchenko, and T. F. George

Proceeding from the system of kinetic equations, the exact expression for diffusion time is obtained. This time turn out to be dependent on the interaction rates of particles both of different and the identical types. The results obtained are valid for particles with arbitrary statistics and the dispersion law. The derived general relations are used to investigate diffusion in liquid and solid  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$  mixtures. The contribution of the interaction between quasiparticles of the types to the coefficients of diffusion and thermal conductivity of superfluid mixtures are analyzed. The calculated values are compared with experimental data. The diffusion coefficient of solid  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$  mixtures is calculated and found to be different from results of previous theories. The comparison of the coefficient of spin diffusion with experimental data allows us to find the width of the energy zone of impurity quasiparticles.