

Энергетический спектр поверхностных электронов над пленкой раствора ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ с неоднородным распределением изотопов

Е.С. Соколова, С.С. Соколов

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

E-mail: sokolov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 25 июня 2018 г., опубликована онлайн 26 ноября 2018 г.

Теоретически с использованием вариационного метода определен энергетический спектр поверхностных электронов, локализованных над пленкой жидкого раствора ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$, покрывающей твердотельную подложку. Рассмотрены две модели пространственного распределения гелиевых изотопов по высоте пленки. В одной из них считается, что пленка расслоилась, во второй предполагается непрерывное линейное изменение концентрации. Потенциальная энергия электрона определена методом решения уравнения Пуассона для электростатического потенциала и в газовом приближении, причем установлено практическое совпадение результатов обоих методов для расслоившейся пленки. Определена зависимость энергетической щели между основным и первым возбужденным состояниями поверхностных электронов в зависимости от толщины пленки. Проведено сравнение результатов для рассмотренных моделей структуры пленки. Обсуждена возможность использования полученных результатов при экспериментальном исследовании пространственного изотопического распределения в гелиевом растворе методом рассеяния нейтронов.

Ключевые слова: раствор ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$, расслоение растворов, пленки гелия, поверхностные электроны.

1. Введение

Одним из интересных дискуссионных вопросов при обсуждении поверхностных свойств жидкого раствора ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ является характер распределения примесных атомов ${}^3\text{He}$ вблизи поверхности раздела жидкой и паровой фаз. Известно, что атомы ${}^3\text{He}$ аккумулируются вблизи поверхности раствора благодаря наличию примесных андреевских поверхностных уровней [1], образуя поверхностный монослой. В то же время открытым остается вопрос о том, как распределены примесные атомы ниже этого монослоя. Так, высказывается мнение, что при приближении объемной концентрации ${}^3\text{He}$ вблизи поверхности к предельному значению (6,6 % при нулевой температуре) происходит микрорасслоение раствора с возникновением тонкой макроскопической пленки ${}^3\text{He}$, ниже которой в поле сил тяжести располагается массивный раствор ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ [2,3]. Подобное предположение, однако, пока не нашло подтверждения в экспериментах по рассеянию нейтронов [4–6], которые, хотя и свидетельствуют о преимущественном концентрировании ${}^3\text{He}$ вблизи поверхности жидкости, не позволяют с определенностью говорить о возникнове-

нии четкой границы расслоения между расслоившимися жидкими фазами. Более того, анализ результатов экспериментов по рассеянию нейтронов дает основания предполагать, что в ряде случаев концентрация ${}^3\text{He}$ изменяется в глубь жидкой среды непрерывным образом — непрерывное (диффузное) распределение концентрации. В работе авторов [7] обращено внимание на то, что в дополнение к нейтронным экспериментам полезную информацию о характере распределения ${}^3\text{He}$ вблизи поверхности жидкости можно получить, исследуя энергетический спектр поверхностных электронов (ПЭ), локализованных в паровой фазе над свободной поверхностью жидкости. Показано, что этот спектр и энергетическая щель между основным и первым возбужденным состояниями существенно зависят от того, как ${}^3\text{He}$ распределен вблизи поверхности жидкости. Вычисления в [7] проведены как для микрорасслоения, так и для диффузного распределения концентрации легкого изотопа, и энергетическая щель определена в зависимости от параметров этих распределений. Спектроскопические исследования следует считать важным дополнением к нейтронным экспериментам, что должно способство-

вать более определенным заключениям о характере аккумуляции ${}^3\text{He}$ вблизи свободной поверхности раствора ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$.

Ситуация существенно изменяется, если раствор ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ образует не массивную жидкость, а пленку, покрывающую твердотельную подложку, поскольку при толщине пленки $D \leq 10^{-5}$ см влияние сил гравитации становится ничтожным по сравнению с силами Ван дер Ваальса, действующими на жидкий гелий со стороны подложки. В этом случае возникает вопрос о распределении концентрации ${}^3\text{He}$ в поле сил Ван дер Ваальса. К сожалению, к настоящему времени нам неизвестны эксперименты по рассеянию нейтронов в пленке раствора ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$. Тем не менее, как и в случае массивного раствора, представляется, что спектроскопические исследования ПЭ над пленкой могут оказаться существенными и помочь, вместе с результатами нейтронных экспериментов, прояснить ситуацию с распределением ${}^3\text{He}$ в пленке ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$. В настоящей работе вычисляется энергетическая щель между основным и первым возбужденным уровнями ПЭ над пленкой ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$. Исследования проведены, аналогично работе [7], для двух случаев — расслоившейся пленки и пленки, в которой концентрация ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ изменяется непрерывным образом от свободной поверхности к границе гелия и подложки.

Следует отметить, что межэлектронное взаимодействие в слое зарядов влияет на частоту межэлектронных переходов между поверхностными уровнями. Этот интересный вопрос исследовался в [8] теоретически и экспериментально при учете электростатического взаимодействия между ПЭ, образующими треугольную решетку. В работе [9] при теоретическом определении закона дисперсии поперечных плазменных колебаний в слое ПЭ было получено выражение для частоты деполаризационного сдвига, обусловленного электронными корреляциями, к частоте спектроскопического перехода между основным и первым возбужденным состояниями ПЭ. Как следует из результатов [8,9], межэлектронные корреляции мало сказываются на частоте спектроскопических переходов при концентрациях ПЭ $\leq 10^8$ см $^{-2}$. В настоящей работе ограничимся одноэлектронным приближением.

Во втором и третьем разделах работы рассмотрена ситуация расслоившейся пленки, причем во втором разделе методом решения уравнения Пуассона для потенциала поля точечного заряда над поверхностью жидкости установлен вид потенциальной энергии ПЭ над такой пленкой. В третьем разделе потенциальная энергия ПЭ вычислена в газовом приближении для поляризации среды точечным зарядом — как суммарная энергия взаимодействия электрона с атомами жидкости и подложки, и на примере расслоившейся пленки показана практическая эквивалентность вычислений с использованием обоих использованных прибли-

жений. Это дало основание применить газовое приближение для пленки с непрерывным распределением концентрации ${}^3\text{He}$. В четвертом разделе с помощью вариационного метода получены общие выражения для энергии Δ_1 (основного) и Δ_2 (первого возбужденного) состояний. В пятом разделе вычислена энергетическая щель $\Delta_{21} = \Delta_2 - \Delta_1$ для расслоившейся пленки. В шестом разделе аналогичные вычисления выполнены в предположении о непрерывном распределении концентрации ${}^3\text{He}$, также проводится сопоставление полученных величин Δ_{21} с соответствующими значениями в пределе расслоившейся пленки. В Заключении подводятся итоги работы.

2. Потенциальная энергия электрона над расслоившейся пленкой

Основной проблемой при квантовомеханическом рассмотрении энергетических состояний электрона, расположенного над поверхностью жидкости в паровой фазе I в точке с координатами $\{\mathbf{r}, z\}$, $z > 0$, является определение потенциальной энергии ПЭ за счет поляризационного взаимодействия с расположенным под ним полупространством. Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор в плоскости границы жидкость–пар, координата z соответствует направлению, нормальному к этой плоскости. Рассматриваем ситуацию расслоившейся пленки толщиной $D = d_1 + d_2$ (рис. 1), где d_1 и d_2 — толщины жидких фаз II и III, обогащенной ${}^3\text{He}$ и представляющей собой раствор ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ соответственно. Ниже фазы III расположена твердотельная подложка IV. Фазы имеют диэлектрические постоянные I (фаза I), ϵ_1 (II), ϵ_2 (III) и ϵ_s (IV) соответственно.

Заряд в точке $\{\mathbf{r}, z\}$ создает электростатическое поле в точке $\{\mathbf{r}', z'\}$, потенциал которого в виде ряда Фурье запишем в виде

$$\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z, z') = \sum_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}}(z, z') \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')], \quad (1)$$

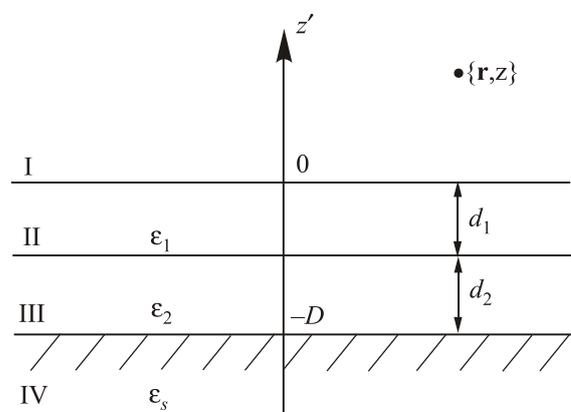


Рис. 1. Схематическое изображение расслоившейся пленки гелия на твердой подложке.

причем должно удовлетворяться уравнение Пуассона $\Delta\phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z') = 0$ при наличии соответствующих граничных условий для $z' = 0, -d_1$ и $-D$.

Наибольшее значение имеет потенциал поля в паровой фазе I, который представим в виде

$$\phi_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z') = \phi_1^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z') + \phi_1^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z'),$$

где

$$\phi_1^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z') = \frac{e}{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 + (z-z')^2}}$$

есть потенциал поля точечного заряда в вакууме, а $\phi_1^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z')$ — добавка, обусловленная поляризацией электроном окружающей среды. Потенциалом $\phi_1^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z')$ определяется сила изображения, действующая на электрон, расположенный в точке $\{\mathbf{r}, z\}$:

$$\mathbf{F}_{im} = -e\nabla_{\mathbf{r}', z'}\phi_1^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z')\Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}, z'=z}.$$

Ниже приведем выражения для полученного нами при решении уравнения Пуассона фурье-образа потенциала $\phi_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z')$ и его координатного представления (соответствующие выражения для сред II, III и IV вынесены в Приложение):

$$\phi_{\mathbf{q}}^{(I)} = \left(\phi_{\mathbf{q}}^{(I)}\right)_1 + \left(\phi_{\mathbf{q}}^{(I)}\right)_2; \quad (2)$$

$$\left(\phi_{\mathbf{q}}^{(I)}\right)_1 = v_{\mathbf{q}} \exp[-q|z-z'|];$$

$$\left(\phi_{\mathbf{q}}^{(I)}\right)_2 = -v_{\mathbf{q}} \frac{\Phi_1(q)}{\Delta(q)} \exp[-q(z+z)]; \quad z' > 0,$$

где $v_{\mathbf{q}} = 2\pi e/(Sq)$, e — заряд электрона и S — площадь поверхности, занимаемой электронным слоем. Функции, входящие в (2), имеют вид

$$\Phi_1(q) = (\epsilon_1 - 1)\Phi_{12}^{(1)}(q) + (\epsilon_1 + 1)\Phi_{12}^{(2)}(q) \exp(-2qd_1);$$

$$\Delta(q) = (\epsilon_1 + 1)\Phi_{12}^{(1)}(q) + (\epsilon_1 - 1)\Phi_{12}^{(2)}(q) \exp(-2qd_1);$$

$$\Phi_{12}^{(1)}(q) = (\epsilon_s + \epsilon_2)(\epsilon_2 + \epsilon_1) + (\epsilon_s - \epsilon_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1) \exp(-2qd_2);$$

$$\Phi_{12}^{(2)}(q) = (\epsilon_s + \epsilon_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1) + (\epsilon_s - \epsilon_2)(\epsilon_2 + \epsilon_1) \exp(-2qd_2).$$

В важном случае, когда вещество подложки — металл, соответствующее выражение для фурье-образа потенциала получается предельным переходом $\epsilon_s \rightarrow \infty$:

$$\phi_{\mathbf{q}}^{(I)} = v_{\mathbf{q}} \left\{ \exp[-q|z-z'|] - \frac{\epsilon_1(\epsilon_1 - \text{cth} qd_1) + \epsilon_2 \text{cth} qd_2 (\epsilon_1 \text{cth} qd_1 - 1)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \text{cth} qd_1) + \epsilon_2 \text{cth} qd_2 (\epsilon_1 \text{cth} qd_1 + 1)} \exp[-q(z+z')] \right\}. \quad (3)$$

Выражения (2) и (3) важны в проблеме вычисления закона дисперсии плазменных мод в слое ПЭ над поверхностью расслоившейся пленки, поскольку закон дисперсии этих колебания зависит от фурье-образа потенциальной энергии $V_{\mathbf{q}} = e\phi_{\mathbf{q}}^{(I)}$ парного взаимодействия поверхностных электронов, расположенных в среде I [9–13].

Координатная зависимость потенциала $\phi_1^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z')$, вычисленная при подстановке (2) в (1), имеет вид

$$\phi_1^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z') = e \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{(k_1)!(k_2)!(k_3)!} \tau_{21}^{k_1+k_2} \tau_{10}^{k_1+k_3} \tau_{s2}^{k_2+k_3} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\tau_{10}}{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 + \beta^2(z+z')}} + \frac{\tau_{21}}{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 + \beta^2(z+z'+2d_1)}} + \frac{\tau_{10}\tau_{21}\tau_{s2}}{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 + \beta^2(z+z'+2d_2)}} + \frac{\tau_{s2}}{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 + \beta^2(z+z'+2d_1+2d_2)}} \right\}. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$\beta(\zeta) = \zeta + 2d_1(k_1 + k_3) + 2d_2(k_2 + k_3);$$

$$\tau_{j'j} = \frac{\epsilon_{j'} - \epsilon_j}{\epsilon_{j'} + \epsilon_j}; \quad \tau_{j'0} = \frac{\epsilon_{j'} - 1}{\epsilon_{j'} + 1}.$$

При суммировании во внутренней сумме в (4) для каждого n берутся все возможные комбинации индексов k_1, k_2 и k_3 , которые удовлетворяют условию $k_1 + k_2 + k_3 = n$.

Выражения (3), (4) и (П1)–(П6) содержат в качестве предельных случаев выражения для потенциалов электростатического поля ПЭ над полубесконечной средой и над однородной пленкой. Предел ПЭ над полубесконеч-

ной средой достигается, если $d_1 \rightarrow \infty$ (рис. 2(а)) или $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_s = \epsilon_{im}$ (рис. 2(б)), а случай однородной пленки реализуется в предельных случаях, иллюстрированных рис. 2(в)–2(е) (см. Приложение).

Вычисляя силу изображения, действующую на ПЭ в направлении, нормальном свободной поверхности пленки (плоскость $z = 0$) и равную

$$F_{im}^{(z)} = -e\partial\phi_1^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z, z')/\partial z' \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}, z'=z} = -\partial U_{im}/\partial z,$$

приходим к следующему выражению для потенциальной энергии ПЭ, обусловленной поляризацией им ниже лежащей среды:

$$U_{\text{im}} = \frac{e^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{(k_1)!(k_2)!(k_3)!} \tau_{21}^{k_1+k_2} \tau_{10}^{k_1+k_3} \tau_{s2}^{k_2+k_3} \left\{ \frac{\tau_{10}}{\beta(2z)} + \frac{\tau_{21}}{\beta(2z+2d_1)} + \frac{\tau_{21}\tau_{10}\tau_{s2}}{\beta(2z+2d_2)} + \frac{\tau_{s2}}{\beta(2z+2d_1+2d_2)} \right\}. \quad (5)$$

В предельных случаях (см. рис. 2) выражение (5) переходит в известные выражения для потенциальной энергии сил изображения над жидким полупространством $z < 0$ или над пленкой гелия, находящейся при $-D < z < 0$ и имеющей диэлектрическую постоянную ϵ_j и расположенной над твердой или жидкой подложкой при $z < -D$ с диэлектрической постоянной ϵ_{sub} [14–17]. Соответствующие выражения приведены в Приложении.

Если в (5) ограничиться членами с $n = 0$ и $n = 1$, то получаем упрощенное выражение, с высокой точностью совпадающее с (5), если $\tau_{10}, \tau_{21} \ll 1$:

$$U_{\text{im}}^*(z) \approx -\frac{\Lambda_0(\epsilon_1)}{z} - \frac{\Lambda_1(\epsilon_2, \epsilon_1)}{z+d_1} - \frac{\Lambda_2(\epsilon_s, \epsilon_2, \epsilon_1)}{z+D}, \quad (6)$$

$$\Lambda_0(\epsilon_j) = \frac{e^2}{4} \tau_{j0}, \quad \Lambda_1(\epsilon_{j'}, \epsilon_j) = \frac{e^2 \epsilon_j}{(\epsilon_j + 1)^2} \tau_{j'j},$$

$$\Lambda_2(\epsilon_s, \epsilon_2, \epsilon_1) = \frac{e^2}{4} (1 - \tau_{10}^2 - \tau_{21}^2 - \tau_{10}^2 \tau_{21}^2) \tau_{s2}.$$

$$U_g(z) = -\frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{r}' \left\{ \kappa_1 n_1 \int_{-d_1}^0 \frac{dz'}{[\mathbf{r} - \mathbf{r}'^2 + (z - z')^2]^2} + \kappa_2 n_2 \int_{-D}^{-d_1} \frac{dz'}{[\mathbf{r} - \mathbf{r}'^2 + (z - z')^2]^2} + \kappa_s n_s \int_{-\infty}^{-D} \frac{dz'}{[\mathbf{r} - \mathbf{r}'^2 + (z - z')^2]^2} \right\}, \quad (8)$$

где κ_j и n_j — атомные поляризации и средние объемные концентрации сред II, III и IV ($j = 1, 2, s$) соответственно, причем $\kappa_1 = \kappa_2$, поскольку атомные поляризации одинаковы у обоих изотопов гелия.

Если использовать равенства [17] $\frac{\kappa_1 n_1 e^2}{2} = \frac{\Lambda_0(\epsilon_1)}{\pi}$ и $\frac{(\kappa_2 n_2 - \kappa_1 n_1) e^2}{2} = \frac{\Lambda_1(\epsilon_2, \epsilon_1)}{\pi}$, а также, по аналогии с ними, $\frac{(\kappa_s n_s - \kappa_2 n_2) e^2}{2} = \frac{\Lambda_1(\epsilon_s, \epsilon_2)}{\pi}$, энергию ПЭ за счет взаимодействия с веществами пленки и подложки запишем в виде

$$U_g(z) = -\frac{\Lambda_0(\epsilon_1)}{z} - \frac{\Lambda_1(\epsilon_2, \epsilon_1)}{z+d_1} - \frac{\Lambda_1(\epsilon_s, \epsilon_2)}{z+D}. \quad (9)$$

Из сравнения (9) с (6) и (7) заключаем, что $U_g(z) = U_{\text{im}}^*(z) \approx U_{\text{im}}(z)$, то есть энергия ПЭ, вычисленная в

Условия $\tau_{10}, \tau_{21} \ll 1$ выполняются, так как диэлектрические постоянные $\epsilon_1 = 1 + \delta_1$ и $\epsilon_2 = 1 + \delta_2$ ($\delta_1 \approx 0,0428 \ll 1$; $\delta_2 \approx 0,0572 \ll 1$) очень близки к единице. Следует также отметить, что при этом $\epsilon_j / (\epsilon_j + 1)^2 \approx 0,25(1 - \delta_j^2/4)$ совпадает с $1/4$ с точностью до членов, квадратичных по δ_j . В результате получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\epsilon_s, \epsilon_2, \epsilon_1) &= \frac{e^2}{4} (1 - \tau_{10}^2 - \tau_{21}^2 - \tau_{10}^2 \tau_{21}^2) \tau_{s2} = \\ &= \frac{e^2}{4} \tau_{s2} \approx \frac{e^2 \epsilon_2}{(\epsilon_2 + 1)^2} \tau_{s2} = \Lambda_1(\epsilon_s, \epsilon_2). \end{aligned} \quad (7)$$

3. Потенциальная энергия поверхностных электронов в газовом приближении

В газовом приближении поляризации среды потенциальную энергию электрона в точке $\{\mathbf{r}, z\}$ над расслоившейся пленкой (рис. 1) запишем как суммарную энергию взаимодействий электрона с частицами среды [17]:

газовом приближении, практически совпадает с энергией поляризационного взаимодействия (5) со средой $z < 0$, полученной при вычислении сил изображения, действующих на электрон.

Аналогично тому, как это было сделано в работе [7], используем газовое приближение и в случае диффузного распределения концентрации легкого изотопа в пленке гелия. Используем простую модель линейного изменения концентрации гелия в пленке:

$$n(z') = n_1 - \frac{(n_2 - n_1)z'}{D} = \begin{cases} n_1, & z' = 0 \\ n_2, & z' = -D \end{cases}. \quad (10)$$

В то же время для подложки $n(z') = n_s = \text{const}$ при $z' < -D$. С учетом (10) получаем

$$U_g^{(\text{diff})}(z) = -\frac{\kappa_{1,2} e^2}{2} \int d^2 \mathbf{r}' \int_{-D}^0 \frac{n(z') dz'}{[\mathbf{r} - \mathbf{r}'^2 + (z - z')^2]^2} -$$

$$-\frac{\kappa_s n_s e^2}{2} \int d^2 \mathbf{r}' \int_{-\infty}^{-D} \frac{dz'}{[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 + (z-z')^2]^2} =$$

$$= -\frac{\Lambda_0(\varepsilon_1)}{z} - \frac{\Lambda_1(\varepsilon_2, \varepsilon_1)}{D} \ln\left(1 + \frac{D}{z}\right) - \frac{\Lambda_1(\varepsilon_s, \varepsilon_2)}{z+D}, \quad (11)$$

что отличается от (8) видом второго члена.

Если толщина пленки бесконечна, $D \rightarrow \infty$, то (11) переходит в $U_{\text{diff}}(z) \approx -\Lambda_0(\varepsilon_1)/z$. В пределе $D \rightarrow 0$ из (1) получаем

$$U_{\text{diff}}(z) \approx -\frac{\Lambda_0(\varepsilon_1) + \Lambda_1(\varepsilon_2, \varepsilon_1) + \Lambda_1(\varepsilon_s, \varepsilon_2)}{z}$$

$$\approx -\frac{\Lambda_1(\varepsilon_s, \varepsilon_2)}{z} \approx \frac{\Lambda_1(\varepsilon_s, \varepsilon_1)}{z} \approx \frac{e^2}{4z} \left(\frac{\varepsilon_s - 1}{\varepsilon_s + 1} \right),$$

что соответствует электрону, находящемуся в паровой фазе над бесконечным полупространством $z < 0$, имеющим диэлектрическую постоянную ε_s .

4. Пробные волновые функции и энергии состояний поверхностных электронов

После того, как вид потенциальной энергии ПЭ, обусловленной его взаимодействием с пленкой гелия и подложкой, установлен, энергии основного $j = 1$ и первого возбужденного $j = 2$ состояний для расслоившейся пленки запишем в виде

$$\Delta_j = \langle j | -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + eE_{\perp} z + U_{\text{im}}(z) | j \rangle. \quad (12)$$

В случае диффузного распределения концентрации вместо $U_{\text{im}}(z)$ в (12) следует подставить $U_{\text{diff}}(z)$. При записи (13) учтено, что в потенциальную энергию ПЭ вносит свой вклад прижимающее электрическое поле E_{\perp} , направленное перпендикулярно плоскости $z = 0$ фазовой границы жидкость-пар.

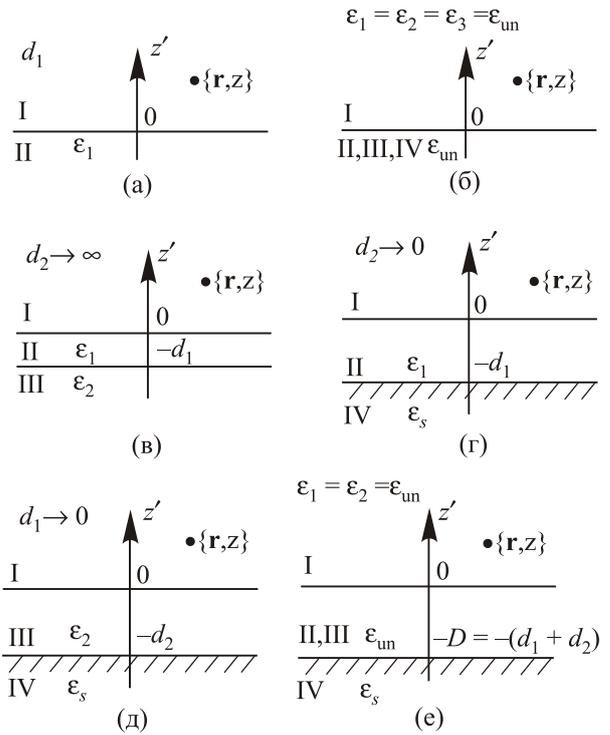


Рис. 2. Различные предельные случаи для расслоившейся пленки.

Для вычисления Δ_1 и Δ_2 используем вариационное приближение и выбираем пробные волновые функции в виде [7,9,18–20]

$$|1\rangle = 2\gamma_1^{3/2} z \exp(-\gamma_1 z), \quad (13)$$

$$|2\rangle = \frac{2\sqrt{3}\gamma_2^{5/2} z}{(\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{\gamma_{12}}{3} z\right) \exp(-\gamma_2 z), \quad (14)$$

зависящие от вариационных параметров γ_1 и γ_2 . Здесь $\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2$.

Подставляя (13) и (14) в (12), получаем

$$\Delta_1 = \frac{\hbar^2 \gamma_1^2}{2m} + \frac{3eE_{\perp}}{2\gamma_1} + \Delta_1^{(\text{film})}, \quad (15)$$

$$\Delta_2 = \frac{\hbar^2 \gamma_2^2}{6m} \left(\frac{\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 + 7\gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2} \right) + \frac{eE_{\perp}}{2\gamma_2} \left(\frac{5\gamma_1^2 - 2\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2} \right) + \Delta_2^{(\text{film})}. \quad (16)$$

Выражения для энергий $\Delta_1^{(\text{film})}$ и $\Delta_2^{(\text{film})}$ заметно отличаются в зависимости от того, какая энергия, $U_{\text{im}}(z)$ или $U_{\text{diff}}(z)$ использована для их вычисления.

В случае расслоившейся пленки

$$\Delta_1^{(\text{film})} = -\frac{e^2}{4} \gamma_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{(k_1)!(k_2)!(k_3)!} \tau_{21}^{k_1+k_2} \tau_{10}^{k_1+k_3} \tau_{s2}^{k_2+k_3} \left[\tau_{10} F_1(\gamma_1 \xi) + \right.$$

$$\left. + \tau_{21} F_1(\gamma_1 \xi + 2\gamma_1 d_1) + \tau_{10} \tau_{21} \tau_{s2} F_1(\gamma_1 \xi + 2\gamma_1 d_2) + \tau_{s2} F_1(\gamma_1 \xi + 2\gamma_1 D) \right], \quad (17)$$

$$\Delta_2^{(\text{film})} = -\frac{e^2}{8}\gamma_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{(k_1)!(k_2)!(k_3)!} \tau_{21}^{k_1+k_2} \tau_{10}^{k_1+k_3} \tau_{s2}^{k_2+k_3} [\tau_{10} F_2(\gamma_2 \xi) + \tau_{21} F_2(\gamma_2 \xi + 2\gamma_2 d_1) + \tau_{10} \tau_{21} \tau_{s2} F_2(\gamma_2 \xi + 2\gamma_2 d_2) + \tau_{s2} F_2(\gamma_2 \xi + 2\gamma_2 D)]. \quad (18)$$

Если вместо энергии $U_{\text{im}}(z)$ использовать фактически совпадающие с ней $U_{\text{im}}^*(z) = U_g(z)$, выражения (17) и (18) упрощаются, превращаясь в

$$\Delta_1^{(\text{film})} = -[\Lambda_0(\varepsilon_1) + \Lambda_1(\varepsilon_2, \varepsilon_1) F_1(2\gamma_1 d_1) + \Lambda_1(\varepsilon_s, \varepsilon_2) F_1(2\gamma_1 D)] \gamma_1, \quad (19)$$

$$\Delta_2^{(\text{film})} = -\left[\Lambda_0(\varepsilon_1) \left(\frac{\gamma_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 + 3\gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2} \right) + \Lambda_1(\varepsilon_2, \varepsilon_1) F_2(2\gamma_2 d_1) + \Lambda_1(\varepsilon_s, \varepsilon_2) F_2(2\gamma_2 D) \right] \frac{\gamma_2}{2}. \quad (20)$$

Здесь введены обозначения:

$$F_1(x) = 1 - x - x^2 \exp(x) \text{Ei}(-x), \quad F_2(x) = \frac{1}{(\gamma_1^2 - \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2)} \left[\gamma_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 - 3\gamma_2^2 - \frac{\gamma_{12}^2}{3} x + \frac{1}{6} (6\gamma_2 + \gamma_{12} x)^2 F_1(x) \right],$$

$\text{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция. В предельных случаях (рис. 2) выражения (15)–(20) переходят в соответствующие выражения для энергий основного и первого возбужденного состояний над объемным гелием или однородной пленкой.

Для непрерывного распределения концентрации (9) выражения (15) и (16) сохраняются, однако теперь

$$\Delta_{1(\text{diff})}^{(\text{film})} = -\Lambda_0(\varepsilon_1) \gamma_1 - [\Lambda_1(\varepsilon_s, \varepsilon_1) - \Lambda_1(\varepsilon_2, \varepsilon_1)] \gamma_1 F_1(2\gamma_1 D) - \frac{\Lambda_1(\varepsilon_2, \varepsilon_1)}{D} f_1(2\gamma_1 D), \quad (21)$$

$$\Delta_{2(\text{diff})}^{(\text{film})} = -\left\{ \Lambda_0(\varepsilon_1) \left(\frac{\gamma_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 + 3\gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2} \right) + [\Lambda_1(\varepsilon_s, \varepsilon_1) - \Lambda_1(\varepsilon_2, \varepsilon_1)] F_2(2\gamma_2 D) + \frac{6\Lambda_1(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \gamma_2}{D(\gamma_1^2 - \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2)} \left[f_1(2\gamma_2 D) - \frac{\gamma_{12}}{\gamma_2} f_2(2\gamma_2 D) + \frac{\gamma_{12}^2}{3\gamma_2^2} f_3(2\gamma_2 D) \right] \right\} \frac{\gamma_2}{2}, \quad (22)$$

где

$$f_1(x) = \gamma_C + \ln x - \frac{x}{2} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right) \exp(x) \text{Ei}(-x),$$

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{x}{6} \left[1 + x + x^2 \exp(x) \text{Ei}(-x) \right],$$

$$f_3(x) = \frac{1}{3} \left\{ f_2(x) - \frac{x}{8} \left[1 + x - x^2 - x^3 \exp(x) \text{Ei}(-x) \right] \right\},$$

$\gamma_C = 0,5772156649\dots\dots$ — постоянная Эйлера.

В пределе $D \rightarrow \infty$ энергии $\Delta_{1(\text{diff})}^{(\text{film})}$ и $\Delta_{2(\text{diff})}^{(\text{film})}$ переходят в

$$\Delta_{1(\text{diff})}^{(\text{film})} \approx -\Lambda_0(\varepsilon_1) \gamma_1,$$

$$\Delta_{2(\text{diff})}^{(\text{film})} \approx -\frac{\Lambda_0(\varepsilon_1) \gamma_2}{2} \left(\frac{\gamma_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 + 3\gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2} \right), \quad (23)$$

что приводит (15) и (16) к виду, соответствующему энергии состояний ПЭ над однородной жидкостью с

диэлектрической постоянной ε_1 [18–20]. Тот же результат сохраняется и в противоположном пределе $D \rightarrow 0$, однако теперь в (23) следует заменить $\Lambda_0(\varepsilon_1)$ на $\Lambda_0(\varepsilon_1) + \Lambda_1(\varepsilon_s, \varepsilon_1)$, что практически совпадает с $\Lambda_0(\varepsilon_s)$ как для твердого неона, так и подложек с диэлектрической постоянной, заметно превышающей единицу. Данный результат означает, что при диффузном распределении концентрации (10) в пределе нулевого D энергии (15) и (16) переходят в энергии состояний ПЭ над полубесконечной средой, имеющей диэлектрическую проницаемость твердой подложки.

5. Энергетическая щель Δ_{21} для расслоившейся пленки

В этом разделе приведены результаты численного вычисления энергетической щели $\Delta_{21} = \Delta_2 - \Delta_1$, где Δ_1 и Δ_2 заданы в (17) и (18) или, что равнозначно, (19) и (20) соответственно. Параметры γ_1 и γ_2 определялись численно при решении уравнений $\partial \Delta_1 / \partial \gamma_1 = 0$ и $\partial \Delta_2 / \partial \gamma_2 = 0$. Вычисления проведены для двух веществ подложки–твердого неона с диэлектрической постоян-

ной, достаточно близкой к единице ($\epsilon_s \approx 1,24$), и стекла с диэлектрической постоянной, заметно превышающей единицу, $\epsilon_s \approx 7,3$. В ходе вычислений мы считали толщину d_1 верхней фазы заданной и определяли Δ_{21} как функцию полной толщины пленки $D = d_1 + d_2$, начиная с $d_2 = d_1/5$. Результаты вычислений для твердого неона приведены на рис. 3(а) и для стекла на рис. 3(б). Обращает на себя внимание уменьшение Δ_{21} с увеличением D .

При веществе подложки твердом Не имеем подложку со слабой поляризацией. В этом случае при общей толщине пленки $D = 10^{-5} - 10^{-4}$ см, когда $d_2 \gg d_1$ при выбранном $d_1 = 5 \cdot 10^{-7}$ см, влияние подложки на величину Δ_{21} незначительно, и энергетическая щель при $E_{\perp} = 0$ должна стремиться к своему значению $\Delta_{21} \approx 5,7$ К над объемным гелием с диэлектрической постоянной ϵ_2 . Вычисленное значение Δ_{21} при $D = 10^{-5} - 10^{-4}$ см на рис. 3(а) близко к указанному значению, будучи немного меньше, $\Delta_{21} \approx 4,7$ К. Вычисления дают практически то

же значение энергетической щели для тех же D и при $d = 10^{-6}$ см. То, что полученное значение энергетической щели $\Delta_{21} < 5,7$ К, обусловлено наличием тонкого слоя толщиной d_1 фазы с диэлектрической постоянной $\epsilon_1 < \epsilon_2$ над почти массивной жидкостью толщиной d_2 . В результате величина Δ_{21} меньше значения этой величины над однородной жидкостью с диэлектрической постоянной ϵ_2 . С другой стороны, при уменьшении D влияние гелия на энергетический спектр ПЭ уменьшается, и величина Δ_{21} возрастает, определяясь, при нулевом прижимающем поле, главным образом, поляризационным взаимодействием электрона с веществом подложки. Так, для ПЭ над твердым неоном без гелиевого покрытия величина энергетической щели в пределе $E_{\perp} = 0$ значительно больше, чем над гелием, достигая $\Delta_{21}(0) \approx 85$ К при $D = 0$. Однако наличие прослойки гелия толщиной $D \approx d_1$ над массивным твердым неоном приводит к тому, что рассчитанная величина Δ_{21} при $D = 5 \cdot 10^{-7}$ см оказывается меньше $\Delta_{21}(0)$, но превосходит значение энергетической щели над объемным жидким гелием. Поведение $\Delta_{21}(D)$ для расслоившейся

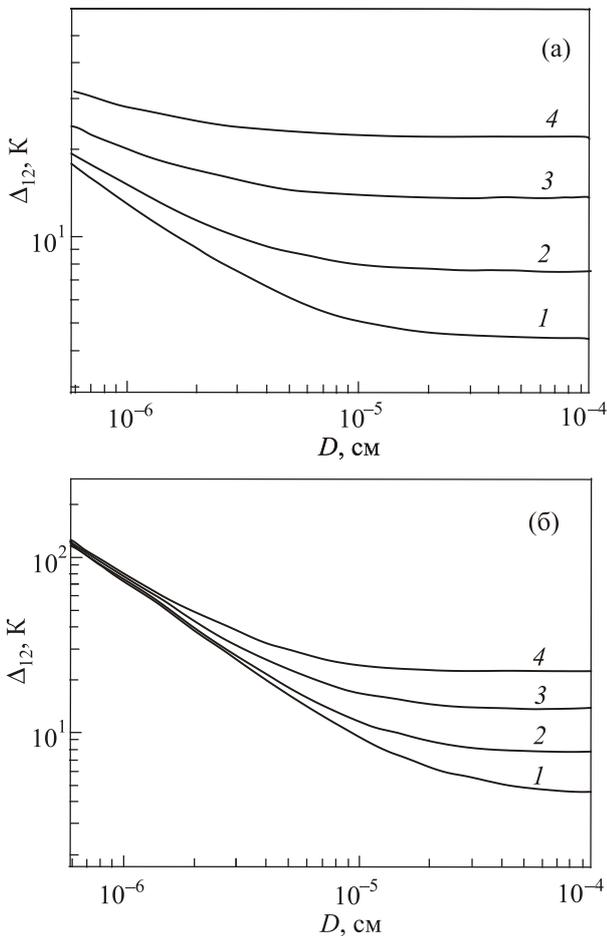


Рис. 3. Энергетическая щель Δ_{21} как функция толщины расслоившейся пленки D при толщине верхней жидкой фазы $d_1 = 5 \cdot 10^{-7}$ см. Вещество подложки — твердый неон (а) и стекло (б). Кривые нумерованы в порядке возрастания прижимающего электрического поля: $E_{\perp} = 0$ (1), 100 (2), 400 (3) и 1000 В/см (4).

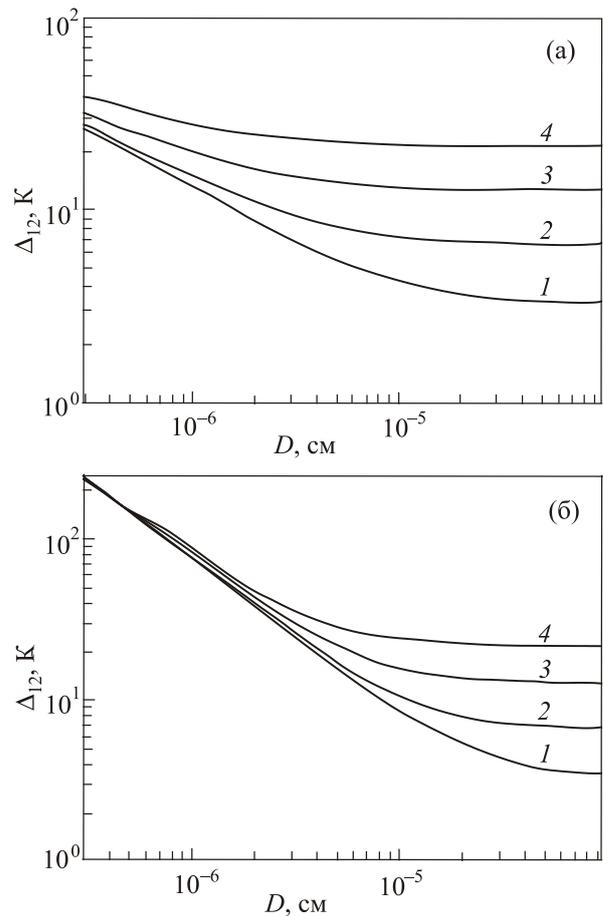


Рис. 4. Энергетическая щель Δ_{21} как функция толщины пленки D при диффузном распределении концентрации (10). Вещество подложки — твердый неон (а) и стекло (б). Кривые нумерованы в порядке возрастания прижимающего электрического поля: $E_{\perp} = 0$ (1), 100 (2), 400 (3) и 1000 В/см (4).

пленки над подложкой из стекла (рис. 3(б)) качественно такое же, как на рис. 3(а), а количественное различие вблизи $D \sim d_1$ обусловлено тем, что в случае стекла $\Delta_{21}(0) > 4000$ К, что намного больше, чем для подложки из твердого неона.

При увеличении прижимающего электрического поля, которое приводит к «раздвиганию» энергетических уровней ПЭ [16–20], энергетическая щель при заданном D увеличивается по сравнению со своим значением для $E_{\perp} = 0$, сохраняя те же тенденции в зависимости от D , что и при нулевом E_{\perp} . Причем предельные значения энергетической щели для $D = 10^{-5}$ – 10^{-4} см при $E_{\perp} \geq 100$ В/см оказываются очень близкими к соответствующим значениям Δ_{21} , рассчитанным для $D \rightarrow \infty$ для обоих рассмотренных веществ подложки.

На рис. 3(б) видно, что при $D \sim d_1$ значения Δ_{21} для всех прижимающих полей почти сливаются. Это объясняется тем, что для подложки из стекла при малых толщинах слоя гелия основной вклад в энергию электрона вносит его поляризационное взаимодействие с веществом подложки, причем вклад этого взаимодействия, пропорциональный $\Lambda_1(\epsilon_s, \epsilon_2)$ в (15) и (16), оказывается намного больше соответствующего вклада прижимающего электрического поля в этих выражениях. В этих условиях зависимость Δ_{21} от E_{\perp} становится пренебрежимо малой и незаметной на рис. 3(б).

6. Энергетическая щель при непрерывном распределении концентрации легкого изотопа

В случае распределения концентрации (10) вычисления энергий Δ_1 и Δ_2 , а также энергетической щели Δ_{21} проводились с использованием той же процедуры, что в предыдущем разделе, но по выражениям (21), (22). Результаты приведены на рис. 4(а) (подложка — твердый неон) и рис. 4(б) (подложка из стекла) для тех же значений прижимающего поля, что и на рис. 3. На рис. 4 видно, что энергетическая щель уменьшается с увеличением толщины пленки D . С увеличением D до значений $D \sim 10^{-5}$ – 10^{-4} см, когда фактически реализуется ситуация ПЭ над объемной жидкостью, а влияние поляризации подложки на энергии состояний ПЭ пренебрежимо мало, для обеих подложек значения Δ_{21} при заданном E_{\perp} практически совпадают с соответствующими значениями для ПЭ над жидким ${}^3\text{He}$ с диэлектрической постоянной ϵ_1 .

При уменьшении D до значений меньше 10^{-6} см наблюдается резкое возрастание величины Δ_{21} . Причины такого поведения энергетической щели те же, что были изложены в предыдущем разделе в случае расслоившейся пленки при малой общей толщине пленки. В случае расслоившейся пленки мы строили зависимость $\Delta_{21}(D) = \Delta_{21}(d_1 + d_2)$ при фиксированном d_1 . При этом общая толщина пленки не могла быть меньше d_1 , так что наличие слоя гелия с этой толщиной с ди-

электрической постоянной ϵ_1 уменьшало величину Δ_{21} по сравнению с ее значением над массивной подложкой из неона или стекла. Сейчас же, когда расслоения нет, значения $\Delta_{21}(D)$ при $D \rightarrow 0$ стремятся к приведенным в предыдущем разделе величинам $\Delta_{21}(0)$ при нулевом прижимающем поле и больших значениях конечного E_{\perp} , оказываясь выше, чем соответствующие значения на рис. 3 в пределе малых D .

На рис. 3 и 4 видно, что поведение энергетической щели как функции полной толщины пленки качественно схожи, хотя значения $\Delta_{21}(D)$ при достаточно больших D несколько меньше для диффузного распределения концентрации. Более детальное сравнение результатов для $\Delta_{21}(D)$, полученных в двух рассмотренных моделях (рис. 1 и уравнение (10)) пленки ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$, проведено на рис. 5 и 6, причем на рис. 5(б) и 6(б) приведены результаты при малых значениях D .

Сравнение проведено для подложки из твердого неона при $E_{\perp} = 0$ и $E_{\perp} = 100$ В/см, для больших E_{\perp} зависимости $\Delta_{21}(D)$ качественно те же. Соответствующие

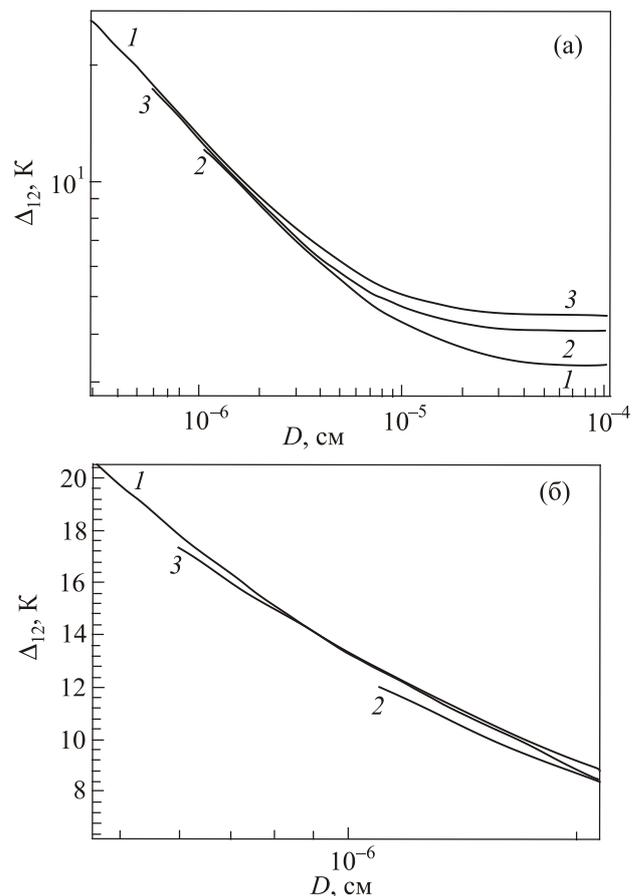


Рис. 5. Величина энергетической щели Δ_{21} в зависимости от толщины пленки D для непрерывного распределения концентрации изотопов (1) и расслоившейся пленки с $d_1 = 10^{-6}$ см (2) и $d_1 = 5 \cdot 10^{-7}$ см (3). Вещество подложки — твердый неон, $E_{\perp} = 0$. Зависимость во всей исследованной области толщин пленки (а) и при малых D (б).

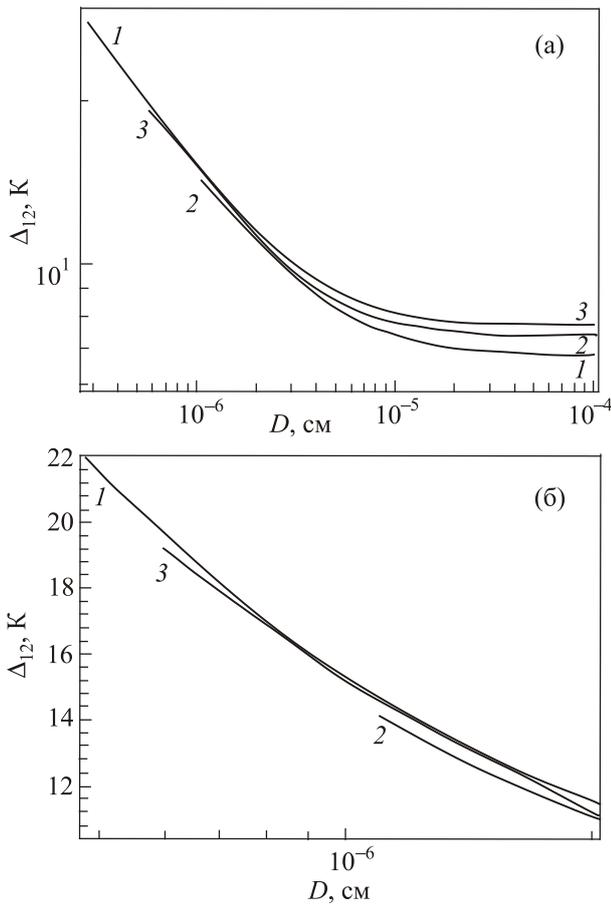


Рис. 6. То же, что на рис. 5, но для $E_{\perp} = 100$ В/см.

щие зависимости для подложки из стекла оказываются очень близкими и практически сливаются. Интересной особенностью рис. 5 и 6 является пересечение кривых $\Delta_{21}(D)$, рассчитанных в разделах 5 и 6 соответственно. Это является следствием уже обсуждавшихся особенностей поведения $\Delta_{21}(D)$ при больших и малых D : если в пределе $D \rightarrow 0$ величина $\Delta_{21}(D)$ больше в модели (10), то, напротив, при $D \rightarrow \infty$ $\Delta_{21}(D)$ оказывается больше для расслоившейся пленки на рис. 2(в) (предельный случай рис. 1 при $D \rightarrow \infty$, но при фиксированном d_1). Из сравнения зависимостей, полученных в обеих рассмотренных моделях пленки раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$, можно сделать вывод, что, хотя зависимости $\Delta_{21}(D)$ отличаются в этих моделях, различие оказывается достаточно малым и наиболее проявляется при толщинах пленки $D > 10^{-6}$ см в пределе малых прижимающих полей.

7. Заключение

В настоящей работе теоретически определен спектр электрона, локализованного над свободной поверхностью пленки раствора жидкого раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$, покрывающей твердотельную подложку. Рассмотрены две возможные ситуации — расслоившейся пленки и пленки с непрерывным (диффузным) распределением концентрации изотопов.

Потенциальная энергия электрона над расслоившейся пленкой раствора определена при решении уравнения Пуассона для электростатического поля, создаваемого зарядом. Кроме того, потенциальная энергия вычислена в газовом приближении и показано, что оба метода дают результаты, совпадающие с высокой точностью. Это позволило обобщить газовое приближение и на вычисление потенциальной энергии в случае, когда концентрация изотопов в зависимости от толщины пленки изменяется непрерывным образом. Энергии основного и первого возбужденного состояний поверхностного электрона вычислены с использованием вариационного метода, что позволило определить величину энергетической щели между состояниями в зависимости от толщины пленки для обеих рассмотренных моделей строения пленки. Сравнение зависимостей энергетической щели от толщины пленки показывает, что они отличаются для двух рассмотренных моделей пленки. Это, в принципе, позволяет предложить спектроскопические исследования поверхностных электронов над пленкой раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ в качестве инструмента для получения сведений о характере распределения концентрации изотопов гелия в пленке, в дополнение к нейтронографическим исследованиям в пленке. В то же время следует отметить, что различие между зависимостями $\Delta_{21}(D)$ в рассмотренных моделях пленки раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ выражено значительно слабее, чем для электронов над объемным раствором [7], и в случае пленки проявляется только для $D > 10^{-6}$ см в рассмотренной линейной модели (10). Между тем сама адекватность этой модели пока не подтверждена независимыми нейтронными экспериментами.

Таким образом, из сравнения результатов [7] и настоящей работы, можно сделать вывод о том, что спектроскопические эксперименты для поверхностных электронов являются в случае электронов над жидким объемным изотопическим раствором гелия более информативными для определения характера распределения ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, чем эксперименты с пленкой раствора на твердой подложке.

Авторы выражают благодарность Ю.П. Монархе и В.Е. Сивоконю за обсуждение результатов работы.

Приложение

Фурье-образы потенциалов электростатического поля, создаваемого ПЭ, расположенным в точке $\{\mathbf{r}, z\}$, в средах II, III и IV имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{q}}^{(\text{II})} = & \frac{2\nu_{\mathbf{q}}}{\Delta(q)} \Phi_{12}^{(1)}(q) \exp[-q|z-z'|] - \\ & - \Phi_{12}^{(2)}(q) \exp[-2qd_1 - q(z+z')], \quad -d_1 < z' < 0; \quad (\text{П1}) \end{aligned}$$

$$\varphi_{\mathbf{q}}^{(\text{III})} = \frac{4\varepsilon_1 v_{\mathbf{q}}}{\Delta(q)} \{(\varepsilon_s + \varepsilon_2) \exp[-q|z - z'] - \varphi_{\mathbf{q}}^{(\text{IV})} = \frac{8\varepsilon_1 \varepsilon_2 v_{\mathbf{q}}}{\Delta(q)} \exp[-q|z - z']\}, \quad z' < -D. \quad (\text{П3})$$

$$-(\varepsilon_s - \varepsilon_2) \exp[-2qD - q(z + z')]\} \quad -D < z' < -d_1; \quad (\text{П2}) \quad \text{Координатные зависимости потенциалов вычисляются по (1):}$$

$$\varphi_{\text{II}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z, z') = \frac{2e}{(\varepsilon_1 + 1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{(k_1)!(k_2)!(k_3)!} \tau_{21}^{k_1+k_2} \tau_{10}^{k_1+k_3} \tau_{s2}^{k_2+k_3} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \beta^2 (|z - z'|)}} + \frac{\tau_{21} \tau_{s2}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \beta^2 (|z - z'| + 2d_2)}} - \frac{\tau_{21}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \beta^2 (z + z' + 2d_1)}} - \frac{\tau_{s2}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \beta^2 (z + z' + 2d_1 + 2d_2)}} \right\}, \quad (\text{П4})$$

$$\varphi_{\text{III}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z, z') = \frac{4\varepsilon_1 e}{(\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{(k_1)!(k_2)!(k_3)!} \tau_{21}^{k_1+k_2} \tau_{10}^{k_1+k_3} \tau_{s2}^{k_2+k_3} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \beta^2 (|z - z'|)}} - \frac{\tau_{s2}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \beta^2 (z + z' + 2D)}} \right\}, \quad (\text{П5})$$

$$\varphi_{\text{IV}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z, z') = \frac{8\varepsilon_1 \varepsilon_2 e}{(\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_s + \varepsilon_2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{(k_1)!(k_2)!(k_3)!} \frac{\tau_{21}^{k_1+k_2} \tau_{10}^{k_1+k_3} \tau_{s2}^{k_2+k_3}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \beta^2 (|z - z'|)}}. \quad (\text{П6})$$

В предельных случаях полубесконечной среды (рис. 2(а) и 2(б)), а также однородной пленки (рис. 2(в)–2(е)) выражения сильно упрощаются: Для полубесконечной среды из (3), (4), (П1)–(П6) получаем

$$\varphi_{\mathbf{q}} = v_{\mathbf{q}} \left\{ \exp[-q|z - z'|] - \tau_{j'0} \exp[-q(z + z')] \right\} \theta(z') + \frac{2v_{\mathbf{q}}}{(\varepsilon_{j'0} + 1)} \exp[-q|z - z'|] \theta(-z'), \quad (\text{П7})$$

$$\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z, z') = e \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2}} - \frac{\tau_{j'0}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z + z')^2}} \right] \theta(z') + \frac{2}{(\varepsilon_{j'} + 1)} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2}} \theta(-z') \right\}, \quad (\text{П8})$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция, а индекс j' принимает значение 1 для ситуации, показанной на рис. 2(а), и $j' = un$ на рис. 2(б).

В предельном случае однородной пленки (рис. 2(в)–2(е)) имеем

$$\varphi_{\mathbf{q}} = v_{\mathbf{q}} \left\{ \exp[-q|z - z'|] - \frac{(\varepsilon_f - 1)(\varepsilon_{\text{sub}} + \varepsilon_f) + (\varepsilon_f + 1)(\varepsilon_{\text{sub}} - \varepsilon_f) \exp(-2qd_f)}{(\varepsilon_f + 1)(\varepsilon_{\text{sub}} + \varepsilon_f) + (\varepsilon_f - 1)(\varepsilon_{\text{sub}} - \varepsilon_f) \exp(-2qd_f)} \exp[-q(z + z')] \right\} \theta(z') +$$

$$+ 2v_{\mathbf{q}} \left\{ \frac{(\varepsilon_{\text{sub}} + \varepsilon_f) \exp[-q|z - z'|] - (\varepsilon_{\text{sub}} - \varepsilon_f) \exp[-2qd_f - q(z + z')]}{(\varepsilon_f + 1)(\varepsilon_{\text{sub}} + \varepsilon_f) + (\varepsilon_f - 1)(\varepsilon_{\text{sub}} - \varepsilon_f) \exp(-2qd_f)} \right\} \theta(-z') \theta(z' + d_f) +$$

$$+ 4\varepsilon_1 v_{\mathbf{q}} \left\{ \frac{\exp(-q|z - z'|)}{(\varepsilon_f + 1)(\varepsilon_{\text{sub}} + \varepsilon_f) + (\varepsilon_f - 1)(\varepsilon_{\text{sub}} - \varepsilon_f) \exp(-2qd_f)} \right\} \theta(-z' - d_f), \quad (\text{П9})$$

$$\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z, z') = e \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2}} - \frac{\tau_{f0}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z + z')^2}} - \frac{4\varepsilon_f (\varepsilon_{\text{sub}} - \varepsilon_f)}{(\varepsilon_f + 1)^2 (\varepsilon_{\text{sub}} + \varepsilon_f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\tau_{f0} \tau_{\text{sub},f})^{n-1}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z + z' + 2d_f n)^2}} \right] \theta(z') +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{(\epsilon_f + 1)} \left[\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{\text{sub},f}^n \tau_{f0}^{n-1} \left(\frac{\tau_{f0}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (|z - z'| + 2d_f n)^2}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (|z + z'| + 2d_f n)^2}} \right) \theta(-z') \theta(z + d_f) + \right. \\
 & \left. + \frac{4\epsilon_f}{(\epsilon_f + 1)(\epsilon_{\text{sub}} + \epsilon_f)} \left[\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + (z - z')^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\tau_{f0} \tau_{\text{sub},f})^n}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (|z + z'| + 2d_f n)^2}} \right] \theta(-z - d_f) \right]. \quad (\text{П10})
 \end{aligned}$$

Приведем также предельные выражения для потенциальной энергии ПЭ, обусловленной силами изображения:

$$U_{\text{im}}(z) = -\frac{\Lambda_0(\epsilon_{f'})}{z} \quad (\text{П11})$$

для рис. 2(а) и 2(б) и

$$U_{\text{im}}(z) = -\frac{\Lambda_0(\epsilon_f)}{z} - \Lambda_1(\epsilon_{\text{sub}}, \epsilon_f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\tau_{f0} \tau_{\text{sub},f})^{n-1}}{z + nd_f} \quad (\text{П12})$$

для предельных случаев на рис. 2(в)–2(е). Диэлектрическая постоянная жидкого гелия в пленке ϵ_f и толщина пленки равны ϵ_1 и d_1 на рис. 2(в) и 2(г), ϵ_2 и d_2 на рис. 2(д), ϵ_{un} и D на рис. 2(е) соответственно. Диэлектрическая постоянная ϵ_{sub} равна ϵ_2 на рис. 2(в) и ϵ_s на рис. 2(г)–2(е).

12. S.S. Sokolov and N. Studart, *J. Low Temp. Phys.* **126**, 499 (2002).
13. S.S. Sokolov and N. Studart, *Phys. Rev. B* **68**, 195403 (2003).
14. В.Б. Шикин, Ю.П. Монарха, *ЖЭТФ* **65**, 751 (1973).
15. V.B. Shikin and Yu.P. Monarkha, *J. Low Temp. Phys.* **16**, 193 (1974).
16. В.Б. Шикин, Ю.П. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, Наука, Москва (1989).
17. Y. Monarkha and K. Kono, *Two-dimensional Coulomb liquids and solids*, Berlin, Springer-Verlag (2003).
18. Yu.P. Monarkha, S.S. Sokolov, and V.B. Shikin, *Solid State Commun.* **32**, 611 (1981).
19. С.С. Соколов, *ФНТ* **11**, 875 (1985) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **11**, 481 (1985)].
20. S.S. Sokolov, *ФНТ* **30**, 271 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 199 (2004)].

1. А.Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **50**, 1415 (1966).
2. D.O. Edwards and W.F. Saam, In: *Progress in Low Temp. Phys.*, North-Holland Publ. Comp., VIIA, 302 (1978).
3. W.F. Saam, *Phys. Rev. A* **5**, 335 (1972).
4. O. Kirichek, *J. Phys.: Conference Series* **150**, 032042 (2009).
5. O.I. Kirichek, N.D. Vasilev, T.R. Charlton, C.J. Kinane, R.M. Dalgliesh, A. Ganshin, S. Langridge, and P.V.E. McClintock, *J. Phys.: Conference Series* **400**, 012033 (2012).
6. C.J. Kinane, O. Kirichek, T.R. Charlton, and P.V.E. McClintock, *ФНТ* **42**, 202 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 152 (2016)].
7. Ya.Yu. Bezsmolnyy, E.S. Sokolova, S.S. Sokolov, and N. Studart, *Physica B: Condensed Matter* **507**, 41 (2017).
8. D.K. Lambert and P.L. Richards, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1427 (1980).
9. S.S. Sokolov and N. Studart, *J. Phys.: Condensed Matter* **12**, 9563 (2000).
10. Ю.П. Монарха, *ФНТ* **3**, 1459 (1977) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **3**, 702 (1977)].
11. S.S. Sokolov and N. Studart, *Phys. Rev. B* **57**, 704R (1998).

Енергетичний спектр поверхневих електронів над плівкою розчину $^3\text{He} - ^4\text{He}$ з неоднорідним розподілом ізоотопів

Е.С. Соколова, С.С. Соколов

Теоретично з використанням варіаційного метода визначено енергетичний спектр поверхневих електронів, локалізованих над плівкою рідкого розчину $^3\text{He} - ^4\text{He}$, що покриває твердотільну підкладку. Розглянуто дві моделі просторового розподілу гелієвих ізоотопів за висотою плівки. В одній з них передбачається, що плівка розшарувалась, у другій вважається безперервна лінійна зміна концентрації. Потенційну енергію електрона визначено методом рішення рівняння Пуассона для електростатичного потенціалу та у газовому наближенні, до того ж встановлено практичний збіг результатів обох методів для розшарованої плівки. Визначено залежність енергетичної щільності між основними та першим збудженим станами поверхневих електронів залежно від товщини плівки. Проведено порівняння результатів для розглянутих моделей структури плівки. Обговорено можливість використання отриманих

результатів при експериментальному дослідженні просторового ізотопічного розподілу в гелієвому розчині методом розсіювання нейтронів.

Ключові слова: розчин ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$, розшарування розчинів, плівка гелію, поверхневі електрони.

Energy spectrum of surface electrons over the ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ solution film with inhomogeneous isotope distribution

E.S. Sokolova and S.S. Sokolov

Theoretically, using the variational approximation, the energy spectrum of surface electrons localized above the film of the liquid solution of ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ covering the solid-state substrate is determined. Two models of the spatial distribution of helium isotopes along the height of the film are considered. In one of them

it is assumed that the film is stratified, in the second one, continuous linear change of concentration is supposed. The potential energy of an electron is determined by the method of solving the Poisson equation for the electrostatic potential and in the gas approximation, and a practical coincidence of the results of both methods for the stratified film is established. The dependence of the energy gap between the ground and first excited states of surface electrons as a function of the thickness of the film is determined. The results for the considered models of the film structure are compared. The possibility of using the obtained results for an experimental study of the spatial isotopic distribution in a helium solution by the neutron scattering method is discussed.

Keywords: solution ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$, stratification of solution, helium film, surface electrons.