5. *Конет І. М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
6. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
7. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2001. – 336 с.
8. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.

Кам'янець-Подільський державний університет *Надійшло до редакції 26.10.2006*

УДК 517.535.4

К. Г. Малютин, В. А. Герасименко

Обобщенные представления субгармонических функций в полуплоскости

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

We obtain the presentation of subharmonic functions of finite gamma-growth in a half-plane. This presentation is a generalization of the known integral formulas for the subharmonic functions of finite order.

В теории аналитических и субгармонических функций многие важные результаты получаются с помощью различных представлений этих функций. Наиболее известная их них — формула Пуассона–Иенсена, на которую опирается значительная часть теории субгармонических функций. К ним также относятся формулы Неванлинны, Симидзу–Альфорса, Карлемана, Левина, которые приведены в [1]. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, созданная А. Ф. Гришиным [2], в значительной мере опирается на открытые им интегральные формулы. Из представления Гришина ясно видно, что субгармоническая функция конечного порядка в верхней полуплоскости определяется своей полной мерой с точностью до гармонического полинома, обращающегося в нуль на вещественной оси, аналогично тому, как целая функция конечного порядка определяется своими корнями с точностью до функции вида $\exp\{P(z)\}$, где $P(z)$ — полином.

В настоящей работе приведены представления субгармонических функций в полуплоскости более общего роста $\gamma(r)$, чем конечный порядок. Вышеупомянутое представление Гришина получается как частный случай при $\gamma(r) = r^\rho$, где $\rho > 0$ — фиксированное число.

Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ верхнюю полуплоскость комплексного переменного z. Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый, а через $B(a,r)$ — замкнутый круг радиуса r с центром в точке a; через Ω_+ — пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+\colon \Omega_+ = \Omega \bigcap \mathbb{C}_+$. Если $0 < r_1 < r_2$, то $D_+(r_1,r_2) = \overline{C_+(0,r_2) \setminus C_+(0,r_1)}$ означает замкнутое полукольцо.

Субгармоническая в $\mathbb{C}_+$ функция v называется истинно субгармонической, если $\limsup\limits_{z\to t} v(z) \leqslant 0$ для любого вещественного числа $t \in \mathbb{R}$. Класс истинно субгармонических функций обозначим через JS. Класс истинно дельта-субгармонических функций $J\delta$ определяется как разность $J\delta = JS - JS$.

Пусть $v \in JS$, $\lambda = \lambda(v)$ — ее полная мера (см. [2] или [3]). Мера λ обладает следующими свойствами:

1) λ — конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$;

2) λ — неотрицательная мера;

3) λ равна нулю в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z\colon \operatorname{Im} z < 0\}$.

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1–3, то существует функция $v \in JS$, с полной мерой, равной λ. Совокупность условий 1–3 в дальнейшем будем обозначать через $\{\mathrm{G}^+\}$.

В дальнейшем через $A, B, \ldots$ будем обозначать постоянные, причем различные постоянные могут обозначаться одной буквой.

Для заданной меры λ обозначим через $\lambda(t) = \lambda(B(0,t))$. Пусть $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ — полная мера функции v, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложение меры λ. Введем следующие характеристики функции v:

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int\limits_0^{\pi} v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi\, d\varphi, \qquad N(r,v,r_0) := \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt,$$

$$T(r,v,v_0) := m(r,v) + N(r,v,r_0) + m(r_0,-v), \qquad r > r_0,$$

где r_0 — произвольное, как правило, фиксированное, положительное число (при желании можно считать $r_0 = 1$), которое в обозначениях (если это не вызывает недоразумений) будем опускать (например, вместо $T(r,v,v_0)$ будем писать $T(r,v)$ и т. д.).

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $[0,+\infty)$, называется функцией роста.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция роста γ удовлетворяет условию:

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\gamma(r)}{r} > 0. \tag{1}$$

Условие (1) выполняется для функции $\gamma(r) = r^{\rho}$ при $\rho \geqslant 1$. Однако оно не выполняется для r^{ρ} при $0 < \rho < 1$. Если (1) не выполняется, то мы определяем $N(r,v) := N(r,v,r/2)$, $T(r,v) := T(r,v,r/2)$, и все дальнейшие утверждения при этом имеют место.

Функция $v \in J\delta$ называется функцией конечного γ-типа, если существуют постоянные A и $B > 0$ такие, что

$$T(r,v) \leqslant A\frac{\gamma(Br)}{r}$$

для всех $r > r_0$.

Класс данных δ-субгармонических функций конечного γ-типа обозначим через $J\delta(\gamma(r))$. Через $JS(\gamma(r))$ обозначим класс истинно субгармонических функций конечного γ-типа.

Положительная мера λ имеет конечную γ-плотность, если при некоторых положительных A и B выполняется неравенство

$$N(r,\lambda) := \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^3}\, dt \leqslant \frac{A}{r}\gamma(Br) \tag{2}$$

для всех $r > r_0$ (если условие (1) не выполняется, то полагаем $r_0 = r/2$). Из (2) следует (см. [3, лемма 2]), что

$$\lambda(r) \leqslant rA\gamma(Br), \qquad r \geqslant r_0, \tag{3}$$

т. е. λ является мерой конечного γ-типа.

Коэффициенты Фурье функции $v \in J\delta$ определяются формулой [4]

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi v(re^{i\theta})\sin k\theta\, d\theta, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть λ — мера, удовлетворяющая условиям $\{\mathrm{G}^+\}$, γ — некоторая функция роста. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S_+(r; k, \lambda) = \frac{1}{\pi k}\iint\limits_{D_+(r_0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im}\zeta}\, d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}}\iint\limits_{\overline{C_+(0,r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k\, d\lambda(\zeta),$$

где $\zeta = \tau e^{i\varphi}$, $r_0 > 0$ — фиксированное число,

$$S_+(r_1, r_2; k, \lambda) = S_+(r_2; k, \lambda) - S_+(r_1; k, \lambda), \qquad r_1 \leqslant r_2,$$

$$S'_+(r; k, \lambda) = \frac{1}{\pi k r^k}\iint_{\overline{C_+(0,r)}} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k\, d\lambda(\zeta),$$

при этом символ λ, если это не вызывает недоразумений, будем опускать.

Мера λ называется γ-сбалансированной, если существуют положительные постоянные A, B, при которых

$$S_+(r_1, r_2; k, \lambda) \leqslant \frac{A\gamma(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\gamma(Br_2)}{r_2^k} \tag{4}$$

для всех $r_2 > r_1 > 0$ и $k = 2, 3, \ldots$.

Мера λ называется γ-допустимой, если она γ-сбалансированна и имеет конечную γ-плотность.

Мера λ называется γ-взвешенной, если существуют последовательность вещественных чисел $\alpha = \{\alpha_k\}$ и положительные постоянные A, B, при которых для всех $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|\alpha_k + S_+(r; k, \lambda)| \leqslant \frac{A\gamma(Br)}{r^k}. \tag{5}$$

Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}$ — некоторая последовательность вещественных чисел. Функции

$$c_k(r; \lambda, \alpha) = r^k\{\alpha_k + S_+(r; k)\} - S'_+(r; k), \qquad k \in \mathbb{N},$$

называются коэффициентами Фурье пары (λ, α).

Пара (λ, α) называется γ-допустимой, если мера λ имеет конечную γ-плотность и существуют положительные постоянные A, B, при которых

$$|c_k(r; \lambda, \alpha)| \leqslant A\gamma(Br), \qquad r > 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть λ — мера, $R{>}0$ — фиксированное число. R-остатком меры λ называется мера λ_R такая, что λ_R равна нулю в круге $B(0,R)$ и $\lambda_R(\Omega) = \lambda(\Omega \setminus B(0,R))$.

Пусть $\mathbf{R}$ — непустое множество положительных чисел. Семейство остатков $\{\lambda_R\colon R \in \mathbf{R}\}$ называется полным, если множество $\mathbf{R}$ неограниченно.

Пусть γ — функция роста, а мера λ удовлетворяет условиям $\{G^+\}$. Семейство остатков $\{\lambda_R\}$ называется равномерно γ-сбалансированным, если неравенство (4) выполняется для всех λ_R из этого семейства при одних и тех же постоянных A и B.

Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины

$$\beta[\gamma] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}, \qquad \alpha[\gamma] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}.$$

Порядком и нижним порядком функции $v \in J\delta$ называются величины $\beta[rT(r,v)]$ и $\alpha[rT(r,v)]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет одному из условий:*

1) функция $\ln\gamma(r)$ выпукла относительно $\ln r$;

2) $\alpha[\gamma] = \infty$.

Тогда каждая γ-сбалансированная мера λ имеет полное семейство равномерно γ-сбалансированных остатков. Причем в случае 1 можно взять $\{\lambda_R\} = \{\lambda_R\colon R \geqslant R_0 > 0\}$, где R_0 — фиксированное число.

Следующие две леммы необходимы при доказательстве теоремы 2, однако имеют и самостоятельное значение.

Лемма 1. *Пусть λ — γ-допустимая мера, функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет одному из условий 1 или 2 теоремы 1. Тогда существует полное, равномерно γ-сбалансированное семейство остатков $\{\lambda_R\colon R \in \mathbf{R}\}$ меры λ, а также семейство $\{\alpha(R)\}$, $\alpha(R) = \{\alpha_k(R)\}_{k=1}^{\infty}$, — последовательностей вещественных чисел такие, что*

$$c_k(r;\lambda_R,\alpha(R)) \leqslant A\gamma(Br), \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{6}$$

для всех $r>0$ при некоторых положительных A и B. Кроме того,

$$\lim_{\mathbf{R}\ni R\to\infty} c_k(r;\lambda_R,\alpha(R)) = 0, \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

для всех $r>0$. Если функция $\ln\gamma(r)$ выпукла относительно $\ln r$, то можно взять $\mathbf{R} = \{R\colon R\geqslant R_0\}$ при некотором $R_0>0$.

Лемма 2. *Пусть $\mathbf{R}$ — неограниченное множество положительных чисел, а $\{v_R\colon R \in \mathbf{R}\}$ — семейство функций класса $J\delta$, полная мера которых в круге $C(0,R)$ равна нулю и*

$$|c_k(r;v_R)| \leqslant A\gamma(Br), \qquad k\in\mathbb{N}, \qquad R\in\mathbf{R},$$

для всех $r>0$ при некоторых положительных A и B, а также

$$\lim_{\mathbf{R}\ni R\to\infty} c_k(r;v_R) = 0, \qquad k\in\mathbb{N}, \qquad r>0,$$

Тогда

$$\lim_{\mathbf{R}\ni R\to\infty} v_R = 0$$

равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет одному из условий 1 или 2 теоремы 1. Тогда для любой функции $v \in JS(\gamma(r))$ существует неограниченное множество $\mathbf{R}$ положительных чисел и семейство $\{u_R \colon R \in \mathbf{R}\}$ функций истинно субгармонических в $\mathbb{C}_+$, положительные постоянные A и B такие, что:*

1) полные меры функций u_R в круге $C(0,R)$ совпадают с полной мерой функции v;

2) $v - u_R \rightrightarrows 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$ когда $R \to \infty$, $R \in \mathbf{R}$;

3)

$$T(r,F) \leqslant A\frac{\gamma(Br)}{r} \tag{8}$$

для всех $r > 0$, где F — любая из функций v, u_R или $v - u_R$. Если $\gamma(r)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 1, то можно взять $\mathbf{R} = \{R \colon R \geqslant R_0\}$ при некотором $R_0 > 0$.

Используя теорему 2, мы получаем представление Гришина субгармонических функций конечного порядка в полуплоскости. Это представление получается здесь не самым простым и кратким путем по сравнению с известными [2]. Однако оно указывает на то, что понятие обобщенного представления является обобщением классических понятий, в частности, представления аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции конечного порядка в виде произведения канонических множителей и интеграла по вещественной оси [5, теорема 3.2].

Теорема 3 (Гришин). *Пусть $v(z)$ — истинно субгармоническая функция конечного порядка $\beta > 0$, $p = [\beta]$. Пусть λ — полная мера функции $v(z)$, λ_1 — ограничение меры λ на круг $B(0,1)$, $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$. Тогда существуют вещественные числа $\{d_k\}_{k=1}^{p}$ такие, что справедливо равенство*

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\iint K(z,\zeta)\,d\lambda_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\iint K_p(z,\zeta)\,d\lambda_2(\zeta) + \sum_{k=1}^{p} d_k \operatorname{Im} z^k, \tag{9}$$

если $\beta \geqslant 1$, а при $\beta < 1$,

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\iint K(z,\zeta)d\lambda(\zeta) + d_1 \operatorname{Im} z, \qquad d_1 \leqslant 0, \tag{10}$$

где

$$K_p(z,\zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}} + \sum_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k}\left(\frac{1}{\zeta^k} - \frac{1}{\overline{\zeta}^k}\right)\right], \qquad p = 1, 2, \ldots;$$

$$K(z,\zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right|.$$

Здесь мы рассматривали однозначную ветвь функции $\ln z$ в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси.

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – Москва: Наука, 1972. – 592 с.
2. *Гришин А. Ф.* Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1994. – **1**, № 2. – С. 193–215.
3. *Малютин К. Г.* Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости // Мат. сб. – 2001. – **192**, № 6. – С. 51–70.

4. *Малютин К. Г.* Ряды Фурье и δ-субгармонические функции // Тр. Ин-та прикладной математики и механики АН УССР. – 1988. – Т. 3. – С. 146–157.
5. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – Москва: Наука, 1986. – 240 с.

Сумской национальный аграрный университет *Поступило в редакцию 25.10.2006*

УДК 517.956.2

А. А. Мурач

Эллиптические по Петровскому системы дифференциальных уравнений в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

We study a system of differential equations that is elliptic in the sense of Petrovskii on a closed compact smooth manifold. We prove that the operator generated by the system is a Fredholm one in a refined bilateral scale of functional Hilbert spaces. Elements of this scale are the isotropic spaces of Hörmander–Volevich–Paneyakh. An elliptic system with parameter is investigated as well.

В работе изучаются эллиптические матричные дифференциальные операторы на гладком замкнутом (компактном) многообразии. Известно [1, с. 52], что эти операторы имеют конечный индекс в шкале соболевских пространств. Цель работы — уточнить этот результат применительно к более тонкой двусторонней шкале гильбертовых функциональных пространств. Элементами этой шкалы являются изотропные пространства Хермандера–Волевича–Панеяха [2, с. 54; 3, с. 14], параметризуемые с помощью двух параметров: числового и функционального. Последний является медленно меняющейся на $+\infty$ функцией одной переменной. Эта двусторонняя шкала исследовалась ранее в [4, 5] и названа там уточненной. Она содержит в себе соболевскую шкалу и позволяет значительно точнее охарактеризовать гладкость распределения по свойствам его преобразования Фурье.

Мы предполагаем, что матричный дифференциальный оператор является эллиптическим по И. Г. Петровскому [6, с. 328]. Нами установлено, что исследуемый оператор ограничен и фредгольмов (т. е. имеет конечный индекс) в уточненной двусторонней шкале пространств и порождает в ней семейство изоморфизмов. Получена априорная оценка и исследована локальная гладкость решений эллиптической системы. Изучен также эллиптический матричный оператор с параметром. Скалярный случай рассмотрен ранее в работах [5, 7–10] как для многообразий с краем, так и без края.

1. Постановка задачи. Пусть Γ — бесконечно гладкое замкнутое многообразие размерности $n \geqslant 1$, на котором задан матричный дифференциальный оператор

$$A = (A_{j,k})_{j,k=1}^{p}.$$