Физика низких температур, 1997, т. 23, № 10, с. 1060–1066

Гидродинамическая асимптотика функций Грина слабоанизотропного многоподрешеточного магнетика

А. А. Исаев

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1
E-mail: kfti@rocket.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 21 февраля 1997 г.

Получена гидродинамическая асимптотика функций Грина слабоанизотропного многоподрешеточного магнетика, параметрами сокращенного описания которого являются плотность суммарного спина и матрица поворота в спиновом пространстве. Найдены спектры спиновых волн в системе и определено число голдстоуновских и активационных ветвей.

Одержано гідродинамічну асимптотику функцій Гріна слабкоанізотропного багатопідграткового магнетика, параметрами скороченого опису якого є густина сумарного спіну і матриця повороту в спіновому просторі. Знайдено спектри спінових хвиль у системі та визначено число голдстоунівських та активаційних гілок.

PACS: **75.10.–b**, 75.30.Gw, 75.30.Ds

1. Введение. Динамические уравнения при наличии внешнего поля

Метод двухвременных температурных функций Грина нашел широкое применение при определении спектров коллективных колебаний и кинетических коэффициентов, а также для нахождения отклика системы на внешнее поле [1,2]. В настоящей работе мы получим гидродинамические асимптотики функций Грина слабоанизотропного многоподрешеточного магнетика и на их основе определим спектры спиновых волн, которые могут распространяться в системе. Как известно, высокочастотные процессы в многоподрешеточном магнетике могут быть описаны на основе уравнения Ландау—Лифшица [3] для подрешеточных спинов. Однако на гидродинамическом этапе эволюции такое описание уже неприменимо [4], поскольку подрешеточные спины ввиду сильного межподрешеточного обменного взаимодействия перестают быть приближенными интегралами движения. Как показано в [5], при временах $t \gg \tau_r$ (τ_r — время релаксации) благодаря обменному взаимодействию формируются жесткие комплексы спинов, ориентация которых задается матрицей поворота $a_{\alpha\beta}(x)$. Таким образом, низкочастотная динамика многоподрешеточного магнетика описывается плотностью суммарного спина $s_\alpha(x)$ и матрицей поворота $a_{\alpha\beta}(x)$. Именно для этих величин должны быть сформулированы гидродинамические уравнения.

Формально матрица поворота $a_{\alpha\beta}$ вводится рассмотрением локального спинового поворота U_φ на угол $\varphi_\alpha(x)$:

$$U^+_\varphi \hat{s}_\alpha(x) U_\varphi = a_{\alpha\beta}(\varphi)\hat{s}_\beta(x),$$

$$U_\varphi = \exp\left(-i\int d^3x \varphi_\alpha(x)\hat{s}_\alpha(x)\right).$$

Исходя из коммутационных соотношений для операторов компонент плотности спина $\hat{s}_\alpha(x)$

$$\left[\hat{s}_\alpha(x),\, \hat{s}_\beta(x')\right] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \hat{s}_\gamma(x)\, \delta(x - x')$$

можно найти связь между матрицей $a_{\alpha\beta}$ и углами поворота φ_α (экспоненциальная параметризация):

$$a(\varphi) = \exp(-\epsilon\varphi)\ , \quad (\epsilon\varphi)_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi_\gamma\ . \qquad (1)$$

С матрицей поворота сопоставляются правая $\underline{\omega}_{\alpha k}$ и левая $\omega_{\alpha k}$ дифференциальные формы Картана

$$\underline{\omega}_{\alpha k}(a) = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, a_{\beta\lambda}\nabla_k a_{\gamma\lambda}\ , \qquad \omega_{\alpha k}(a) = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, a_{\lambda\gamma}\nabla_k a_{\lambda\beta}\ , \tag{2}$$

причем, как легко проверить, $\underline{\omega}_k(a) = a\omega_k(a)$. Из определений форм Картана следуют тождества Маурера—Картана

$$\nabla_k\underline{\omega}_{\alpha i} - \nabla_i\underline{\omega}_{\alpha k} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\underline{\omega}_{\beta k}\underline{\omega}_{\gamma i}\ , \qquad \nabla_k\omega_{\alpha i} - \nabla_i\omega_{\alpha k} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_{\beta k}\omega_{\gamma i}\ . \tag{3}$$

В общем случае плотность энергии системы является произвольным функционалом переменных $s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$: $\varepsilon(x) = \varepsilon(x;\, s_\alpha(x'),\, a_{\alpha\beta}(x'))$, который в пренебрежении слабыми релятивистскими взаимодействиями обладает свойством инвариантности относительно однородных спиновых вращений $s \to s' = cs$, $a \to a' = s\tilde{c}$ (c — матрица поворота). В локальном пределе, когда пространственные неоднородности малы, это свойство приводит к тому, что $\varepsilon(x)$ является функцией только переменных $\underline{s} \equiv as$, $\underline{\omega}_k = a\omega_k$:

$$\varepsilon(s,\, a,\, \omega_k) = \varepsilon(as,\, a\omega_k\ ,\, 1) \equiv \varepsilon(\underline{s},\, \underline{\omega}_k)\ .$$

Однако при учете анизотропии зависимость от матрицы поворота сохраняется:

$$\varepsilon = \varepsilon(\underline{s}\ ,\, \underline{\omega}_k\ ,\, a)\ . \tag{4}$$

Для получения уравнений динамики рассматриваемых магнитных систем используем гамильтонов подход, в рамках которого уравнение движения для произвольной физической величины A имеет вид

$$\dot{A} = \left\{A,\, \mathcal{H}\right\}\ , \tag{5}$$

где $\mathcal{H}$ — гамильтониан системы. Скобки Пуассона динамических переменных $s_\alpha(x)$, $a_{\alpha\beta}(x)$ найдены в [6] и определяются формулами

$$\left\{s_\alpha(x),\, s_\beta(x')\right\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, s_\gamma(x)\delta(x - x'),$$
$$\left\{s_\alpha(x),\, a_{\beta\gamma}(x')\right\} = \epsilon_{\alpha\gamma\rho}a_{\beta\rho}(x)\delta(x - x')\ , \tag{6}$$
$$\left\{a_{\alpha\beta}(x),\, a_{\gamma\rho}(x')\right\} = 0\ .$$

В дальнейшем получим функции Грина многоподрешеточного магнетика как отклик системы на внешнее возмущение. С учетом этого запишем гамильтониан $\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H} = \int d^3x(\varepsilon(x) + v(x)) \equiv \mathcal{H}_0 + V\ , \tag{7}$$

$$V = \int d^3x\xi(x,\, t)b(s(x),\, \omega_k(x),\, a(x)) \equiv V(t)\ ,$$

где V — гамильтониан взаимодействия с внешним полем; $\xi(x,\, t)$ — потенциал поля; b — произвольная локальная физическая величина. Предполагаем, что внешнее поле изменяется достаточно медленно, так, что характерная частота его изменения является малой по сравнению с τ_r^{-1} . Поэтому при временах $t \gg \tau_r$ сохраняется возможность описания системы в терминах величин s_α , $a_{\alpha\beta}$.

Используя общее функциональное выражение (7) и систему скобок Пуассона (6), можно найти уравнения движения для динамических переменных многоподрешеточного магнетика. Поскольку в пренебрежении анизотропией плотность энергии ε зависит только от величин $\underline{s}$, $\underline{\omega}$, сформулируем уравнения динамики в терминах переменных $\underline{s}$,$\underline{\omega}$, a (этот выбор переменных удобен для перехода к изотропному случаю). Тогда с учетом (5)–(7) имеем систему динамических уравнений при наличии внешнего поля:

$$\dot{\underline{s}}_\alpha = -\nabla_k\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\underline{s}_\beta\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\gamma} + \underline{\omega}_{\beta k}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\gamma k}} + a_{\beta\mu}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_{\gamma\mu}}\right) + \eta_\alpha\ ,$$

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\rho\gamma}a_{\rho\beta}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\gamma} + \eta_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

где источники η_α , $\eta_{\alpha\beta}$ определяются формулами

$$\eta_\alpha = \xi\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\underline{s}_\beta\,\frac{\partial b}{\partial\underline{s}_\gamma} + \underline{\omega}_{\beta k}\,\frac{\partial b}{\partial\underline{\omega}_{\gamma k}} + a_{\beta\mu}\,\frac{\partial b}{\partial a_{\gamma\mu}}\right) - \nabla_k\left(\xi\,\frac{\partial b}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}}\right), \qquad \eta_{\alpha\beta} = \xi\epsilon_{\alpha\rho\gamma}a_{\rho\beta}\,\frac{\partial b}{\partial\underline{s}_\gamma}\ . \tag{9}$$

Из уравнения движения для матрицы поворота следует уравнение движения для правой формы Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}$:

$$\dot{\underline{\omega}}_{\alpha k} = -\nabla_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \underline{\omega}_{\beta k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma} + \eta_{\alpha k}\,, \qquad (10)$$

$$\eta_{\alpha k} = \xi \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \underline{\omega}_{\beta k} \frac{\partial b}{\partial \underline{s}_\gamma} - \nabla_k \left(\xi \frac{\partial b}{\partial \underline{s}_\alpha}\right).$$

Запишем стационарное решение уравнений (8), (10) в отсутствие внешнего поля. Как следует из (3), (8), (10), для стационарных значений матрицы поворота a^0 и формы Картана $\underline{\omega}_k^0$ имеем

$$a^0(\mathbf{x},\, t) = a(\varphi^0) a(\varphi(\mathbf{x},\, t)),\ \varphi_\alpha(\mathbf{x},\, t) = n_\alpha(-\mathbf{px} + \underline{h}t);$$

$$\underline{\omega}_{\alpha k}^0 = n_\alpha p_k\,, \qquad (11)$$

где φ_α^0 — углы однородного поворота;

$$\underline{h}_\alpha \equiv \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\alpha}\right|_0 = \underline{h} n_\alpha;\ \ p_k \text{ — вектор спирали.}$$

С учетом (1), (8), (11), найдем связь стационарных значений величин $\underline{s}_\alpha^0$, p_k, $\underline{h}_\alpha$:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \left\{ \underline{h}\underline{s}_\beta^0 - p_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}_{\beta k}} \right\} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_\alpha} = 0\,. \qquad (12)$$

2. Гидродинамическая асимптотика функций Грина

Введем в рассмотрение двухвременную запаздывающую функцию Грина для произвольных квазилокальных операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$:

$$G_{ab}(x,\, t;\, x',\, t') = -i\theta(t - t') \mathrm{Sp}\, w \left[\hat{a}(x,\, t),\, \hat{b}(x',t')\right]. \qquad (13)$$

Здесь w — равновесный статистический оператор, который, согласно методу квазисредних, имеет вид

$$w = \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} w_\nu\,, \qquad (14)$$
$$w_\nu = \exp\left(\Omega_\nu - Y_0 \hat{\mathscr{H}}_0 - \underline{Y}_\alpha \hat{S}_\alpha - \nu \hat{G}\right).$$

Термодинамические силы Y_0, $\underline{Y}_\alpha$ в (14) связаны с температурой T и подмагничивающим полем $\underline{h}_\alpha$ формулами $Y_0 = 1/T$, $-\underline{Y}_\alpha / Y_0 = \underline{h}_\alpha$, потенциал Ω_ν определяется из условия нормировки $\mathrm{Sp}\, w_\nu = 1$. Равновесный статистический оператор (14), в соответствии с условиями (11), удовлетворяет соотношениям

$$\left[w,\, \hat{P}_k\right] = [w,\, \hat{H}] = 0, \quad \hat{P}_k = \hat{\mathscr{P}}_k - p_k n_\alpha \hat{S}_\alpha\,, \qquad (15)$$
$$\hat{H} = \hat{\mathscr{H}}_0 - \underline{h}_\alpha \hat{S}_\alpha\,,$$

где $\hat{\mathscr{P}}_k$ — оператор импульса. Зависимость квазилокальных операторов $\hat{a}$, $\hat{b}$ от координат и времени в (13) определим формулами

$$\hat{a}(\mathbf{x},\, t) = \exp i(Ht - \mathbf{Px}) \hat{a}(0) \exp(-i(Ht - \mathbf{Px})),$$
$$\hat{b}(\mathbf{x}',\, t') = \exp i(Ht' - \mathbf{Px}') \hat{b}(0) \exp(-i(Ht' - \mathbf{Px}')). \qquad (16)$$

В этом случае функция Грина G_{ab} обладает свойствами пространственной и временной трансляционной инвариантности

$$G_{ab}(x,\, t;\, x',\, t') = G_{ab}(x - x',\, t - t')\,.$$

Если взаимодействие системы с внешним полем $\xi(x,\, t)$ определяется формулой (7), то линейный отклик величины a на внешнее возмущение равен

$$\delta a_\xi(x,\, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' \xi(x',\, t') G_{ab}(x - x',\, t - t')\,,$$

или, переходя к фурье-представлению, получаем

$$\delta a_\xi(\mathbf{k},\, \omega) = G_{ab}(\mathbf{k},\, \omega) \xi(\mathbf{k},\, \omega)\,. \qquad (17)$$

Линеаризуем систему уравнений (8), (10) относительно отклонений от равновесных значений $\underline{s}_\alpha^0$, $a_{\alpha\beta}^0$:

$$\delta \underline{s}_\alpha(x,\, t) = \underline{s}_\alpha(x,\, t) - \underline{s}_\alpha^0\,, \qquad (18)$$
$$\delta a_{\alpha\beta}(x,\, t) = -\epsilon_{\alpha\rho\gamma} \delta\varphi_\gamma(x,\, t) a_{\rho\beta}^0(x,\, t)\,.$$

Учтем при этом, что вариация формы Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}$, обусловленная преобразованиями (18), имеет вид

$$\delta \underline{\omega}_{\alpha k} = \nabla_k \delta\varphi_\alpha - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \underline{\omega}_{\beta k}^0\, \delta\varphi_\gamma\,.$$

Тогда, переходя к фурье-представлению, для определения отклонений $\delta\underline{s}(\mathbf{k},\, \omega)$, $\delta\varphi(\mathbf{k},\, \omega)$ получаем систему уравнений

$$L_{\alpha\beta} \delta \underline{s}_\beta - Z_{\alpha\beta} \delta\varphi_\beta = \eta_\alpha\,,\ K_{\alpha\beta} \delta\varphi_\beta - \epsilon_{\alpha\beta} \delta \underline{s}_\beta = \overline{\eta}_\alpha\,. \qquad (19)$$

Здесь источники η_α, $\overline{\eta}_\alpha$, согласно (9), имеют вид

$$\eta_\alpha = \xi \left(\frac{\partial b}{\partial \varphi_\alpha} - ik_l \frac{\partial b}{\partial \underline{\omega}_{\alpha l}} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \left[\underline{s}_\beta^0 \frac{\partial b}{\partial \underline{s}_\gamma} + \underline{\omega}_{\beta l}^0 \frac{\partial b}{\partial \underline{\omega}_{\gamma l}} \right] \right),$$

$$\overline{\eta}_\alpha = \xi \frac{\partial b}{\partial \underline{s}_\alpha}\,. \qquad (20)$$

Матрицы K, L, Z определяются формулами

$$K = i\omega - \underline{h}N - if + f'N - T\ ,$$

$$L = -i\omega + i\tilde{f} + \underline{h}N - M\epsilon - N\tilde{f}' - \tilde{T}\ ,$$

$$Z = D + iD'N + iMf - Mf'N + iN\tilde{D}' - ND''N -$$

$$- iG + G'N - i(Q - \tilde{Q}) - \tilde{Q}'N + NQ' + H + MT\ , \qquad (21)$$

где

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\underline{s}_\alpha\partial\underline{s}_\beta}\ ,\ f_{\alpha\beta} = k_i\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\underline{s}_\alpha\partial\underline{\omega}_{\beta i}}\ ,\ f'_{\alpha\beta} = p_i\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\underline{s}_\alpha\partial\underline{\omega}_{\beta i}}\ ,$$

$$D_{\alpha\beta} = k_ik_l\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha i}\,\partial\underline{\omega}_{\beta l}}\ ,\ D'_{\alpha\beta} = k_ip_l\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha i}\,\partial\underline{\omega}_{\beta l}}\ ,$$

$$D''_{\alpha\beta} = p_ip_l\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha i}\,\partial\underline{\omega}_{\beta l}}\ ,\ N_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\gamma\beta}n_\gamma\ ,$$

$$M_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\gamma\beta}\,\underline{s}_\gamma\ ,\ G_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\gamma\beta}\,k_i\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\gamma i}}\ ,$$

$$G'_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\gamma\beta}\,p_i\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\gamma i}}$$

и влияние анизотропии учитывается в слагаемых

$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\varphi_\alpha\partial\varphi_\beta}\ ,\ T_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\underline{s}_\alpha\partial\varphi_\beta}\ ,$$

$$Q_{\alpha\beta} = k_i\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha i}\,\partial\varphi_\beta}\ ,\ Q'_{\alpha\beta} = p_i\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha i}\,\partial\varphi_\beta}\ .$$

Из уравнений (19) найдем

$$\delta\underline{s} = \frac{1}{\Delta}\,\epsilon^{-1}\left\{K\,S(\eta + L\epsilon^{-1}\overline{\eta}) - \Delta\overline{\eta}\right\}\ ,$$

$$\delta\varphi = \frac{S}{\Delta}\,(\eta + L\epsilon^{-1}\overline{\eta})\ , \qquad (22)$$

где

$$S_{\nu\gamma} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\chi\mu\nu}P_{\alpha\chi}P_{\beta\mu}$$

$$P \equiv L\epsilon^{-1}K - Z\ , \qquad (23)$$

$$\Delta = \det P\ ,$$

Учтем теперь, что отклик величины a (являющейся функционалом динамических переменных) на внешнее возмущение $\xi(x, t)$ в главном приближении по k, ω ($\omega\tau_r << 1$, $kl << 1$, l — величина типа длины свободного пробега) может быть представлен в виде

$$\delta a(\mathbf{k},\,\omega) = \frac{\partial a}{\partial\underline{s}_\alpha}\,\delta\underline{s}_\alpha(\mathbf{k},\,\omega) +$$

$$+\,\frac{\partial a}{\partial\underline{\omega}_{\alpha l}}\,\delta\underline{\omega}_{\alpha l}(\mathbf{k},\,\omega) + \frac{\partial a}{\partial\varphi_\alpha}\,\delta\varphi_\alpha(\mathbf{k},\,\omega)\ .$$

Сравнивая эту формулу с (17) и учитывая (22), а также то, что

$$\delta\underline{\omega}_{\alpha l}(\mathbf{k},\,\omega) = (ik_l\delta_{\alpha\beta} - p_lN_{\alpha\beta})\delta\varphi_\beta(\mathbf{k},\,\omega)\ ,$$

для низкочастотной асимптотики функции Грина произвольных динамических величин a и b найдем выражение

$$G_{ab}(\mathbf{k},\,\omega) = \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial a}{\partial\varphi_\alpha} + (ik_l + Np_l)_{\alpha\mu}\,\frac{\partial a}{\partial\underline{\omega}_{\mu l}} + (M + L(-\mathbf{k},\,-\omega)\epsilon^{-1})_{\alpha\mu}\,\frac{\partial a}{\partial\underline{s}_\mu}\right\}S_{\mu\beta}\,\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial b}{\partial\varphi_\beta} + (-ik_i + Np_i)_{\beta\nu}\,\frac{\partial b}{\partial\underline{\omega}_{\nu i}} + (M + L(\mathbf{k},\,\omega)\epsilon^{-1})_{\beta\nu}\,\frac{\partial b}{\partial\underline{s}_\nu}\right\} - \frac{\partial a}{\partial\underline{s}_\alpha}\,\epsilon^{-1}_{\alpha\beta}\,\frac{\partial b}{\partial\underline{s}_\beta}\ . \qquad (24)$$

Формула (24) инвариантна относительно замены $a \leftrightarrow b$, $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$, $\omega \to -\omega$. В пренебрежении анизотропией асимптотика функции Грина (24) совпадает с соответствующим выражением в работе [7]. Из (24), в частности, получаем асимптотики базисных функций Грина

$$G_{\underline{s}_a,\,\underline{s}_\beta}(\mathbf{k},\,\omega) = \frac{1}{\Delta(\mathbf{k},\,\omega)}\,\times$$

$$\times\left(\epsilon^{-1}K(\mathbf{k},\,\omega)S(\mathbf{k},\,\omega)\tilde{K}(-\mathbf{k},\,-\omega)\epsilon^{-1}\right)_{\alpha\beta} - \epsilon^{-1}_{\alpha\beta}\ ,$$

$$G_{\underline{s}_\alpha,\,\varphi_\beta}(\mathbf{k},\,\omega) = \frac{1}{\Delta(\mathbf{k},\,\omega)}\left(\epsilon^{-1}K(\mathbf{k},\,\omega)S(\mathbf{k},\,\omega)\right)_{\alpha\beta}\ , \qquad (25)$$

$$G_{\varphi_\alpha,\,\varphi_\beta}(\mathbf{k},\,\omega) = \frac{1}{\Delta(\mathbf{k},\,\omega)}\,S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\,\omega)\ .$$

Приведенные формулы содержат зависимость от матриц K, L и Z (зависимость от матрицы Z в асимптотиках эффективно содержится через матрицу S и величину Δ, см. (23)), которые сильно упрощаются в случае, если плотность энергии имеет специальный вид $\varepsilon(\underline{s}, \underline{\omega}, a(\varphi)) = \varepsilon(\underline{s}, \underline{\omega}) + \varepsilon(a(\varphi))$, причем $\varepsilon(\underline{s}, \underline{\omega}) = \varepsilon(\underline{s}^2, \underline{\omega}^2, \underline{s\omega})$. Тогда для матриц K, L и Z получаем

$$K = i\omega - \underline{h}N - if + f'N,\ L = -i\omega + i\tilde{f},$$
$$Z = D + iD'N + H\ .$$

Влияние анизотропии учитывается теперь матрицей H.

Проиллюстрируем полученные формулы, выбрав плотность энергии в виде [8]

$$\varepsilon = \frac{\underline{s}_\alpha^2}{2\chi} + \frac{\rho_s \underline{\omega}_{\alpha k}^2}{2} + \frac{\beta\varphi^2}{2}\ ,$$

где χ — магнитная восприимчивость; ρ_s — константа магнитной «жесткости»; β — константа анизотропии; угол φ отсчитывается от некоторого направления, задаваемого осью анизотропии. В этом случае формулы (25) принимают вид

$$G_{\underline{s}_\alpha,\, \underline{s}_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\beta + \rho_s \mathbf{k}^2}{\chi\omega^2 - (\beta + \rho_s \mathbf{k}^2)} \chi\delta_{\alpha\beta}\ ,$$

$$G_{\underline{s}_\alpha,\, \varphi_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i\omega}{\chi\omega^2 - (\beta + \rho_s \mathbf{k}^2)} \chi\delta_{\alpha\beta}\ ,$$

$$G_{\varphi_\alpha,\, \varphi_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\chi\omega^2 - (\beta + \rho_s \mathbf{k}^2)}\ .$$

Видно, что если анизотропия отсутствует ($\beta = 0$), то при $\omega = 0$ особенность $1/k^2$, в соответствии с теоремой Боголюбова [9], имеет функция Грина $G_{\varphi_\alpha,\, \varphi_\beta}$; при $k = 0$ особенностями $1/\omega^2$, $1/\omega$ обладают соответственно функции Грина $G_{\varphi_\alpha, \varphi_\beta}$, $G_{\underline{s}_\alpha, \varphi_\beta}$. При наличии анизотропии и $k = 0$, $\omega = 0$ особенность по анизотропии типа $1/\beta$ имеет функция Грина $G_{\varphi_\alpha,\, \varphi_\beta}$.

3. Спектры спиновых волн

Нахождение спектров спиновых волн связано с определением полюсов функций Грина G_{ab}, что приводит к дисперсионному уравнению $\Delta(\mathbf{k}, \omega) = 0$. С учетом определения (23) матрицы P это уравнение может быть представлено в виде

$$\det\,(\omega^2 a + \omega(ib_1 + b_2) + ic_1 + c_2) \equiv \det P = 0, \tag{26}$$

$$a = -\epsilon^{-1},\ \ b_1 = M - aRN - N\tilde{R}a + aT - \tilde{T}a\ ,$$
$$R = f' - I\underline{h}\ ,\ b_2 = -af - \tilde{f}a,$$
$$c_1 = -G + (D' + \tilde{f}aR)N + N(\tilde{D}' + \tilde{R}af) +$$
$$+ \tilde{T}af - \tilde{f}aT - Q + \tilde{Q}\ , \tag{27}$$
$$c_2 = D - ND''N + \tilde{f}af - N\tilde{R}aRN + \tilde{T}aT +$$
$$+ NQ' - \tilde{Q}'N + H + (G' - \underline{h}M)N\ .$$

Легко видеть, что матрицы a, b_2 симметричны, а матрицы b_1, c_1 — антисимметричны. В матрице c_2 явно симметричны все слагаемые, за исключением слагаемого $(G' - \underline{h}M)N$. Для изучения симметрии этой матрицы используем соотношение (12). В отсутствие анизотропии $\partial\varepsilon/\partial\varphi = 0$ и тогда, учитывая (12), нетрудно убедиться, что $((G' - \underline{h}M)N)_{\alpha\beta} = ((G' - \underline{h}M)N)_{\beta\alpha}$. Следовательно, в отсутствие анизотропии матрица P является эрмитовой, что приводит к действительным значениям частот спиновых волн [6]. При наличии анизотропии имеем

$$\Big((G' - \underline{h}M)N\Big)_{\alpha\beta} - \Big((G' - \underline{h}M)N\Big)_{\beta\alpha} =$$
$$= \Big(n_\alpha N_{\beta\gamma} - n_\beta N_{\alpha\gamma}\Big)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi_\gamma}\ .$$

Отсюда для эрмитовости матрицы P следует условие

$$N_{\alpha\gamma}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi_\gamma} \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi_\gamma} = 0\ , \tag{28}$$

которое означает, что анизотропия должна быть такой, чтобы повороты вокруг направления $n_\alpha = \underline{h}_\alpha/\underline{h}$ не меняли функционал энергии ε. Если функционал энергии не удовлетворяет условию (28), то матрица P не является эрмитовой и в спектре в общем случае появляются частоты с мнимыми частями. Это означает неустойчивость соответствующего состояния. Поэтому, если матрица P не является эрмитовой, обменные константы и константы анизотропии должны удовлетворять определенным неравенствам, чтобы спектр спиновых волн был действительным. В дальнейшем мы будем предполагать соотношение (28) выполненным.

Отметим, что для модельной плотности энергии

$$\varepsilon(\underline{s}, \underline{\omega}\ , a(\varphi)) = \varepsilon(\underline{s}\ , \underline{\omega}) + \varepsilon(a(\varphi)),$$
$$\varepsilon(\underline{s}\ , \underline{\omega}) = \varepsilon(\underline{s}^2\ , \underline{\omega}^2\ , \underline{s\omega})$$

выражения для матриц b_i и c_i в (27) существенно упрощаются. В этом случае имеем

$$b_1 = -aRN,\ b_2 = -af - \tilde{f}a,\ c_1 = (D' + \tilde{f}aR)N,$$
$$c_2 = \tilde{f}af + H$$

и соответствующие свойства симметрии матриц b_i , c_i обеспечиваются специальным видом плотности энергии.

Перепишем дисперсионное уравнение (26) в виде

$$\sum_{n=0}^{6} A_n(\mathbf{k})\omega^n = 0\ , \qquad (29)$$

где коэффициенты A_n $(n = 0, \dots, 6)$ в терминах свертки

$$|abc| = \frac{1}{6}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{uvt}\,a_{\alpha u}\,b_{\beta v}\,c_{\gamma t}$$

определяются формулами

$$A_0 = |c_2c_2c_2| - 3|c_1c_2c_1|\ ,$$
$$A_1 = -6|b_1c_1c_2| - 3|b_2c_1c_1| - 3|b_2c_2c_2|\ ,$$
$$A_2 = -3|ac_1c_1| + 3|ac_2c_2| + 3|b_2b_2c_2| -$$
$$- 6|b_1b_2c_1| - 3|b_1b_1c_2|\ ,$$
$$A_3 = |b_2b_2b_2| + 6|ab_2c_2| - 6|ab_1c_1| - 3|b_1b_1b_2|\ ,$$
$$A_4 = 3|aac_2| - 3|ab_1b_1| + 3|ab_2b_2|\ ,\ A_5 = 3|aab_2|\ ,$$
$$A_6 = |aaa|\ .$$

Приведем анализ возможных спектров спиновых волн, ограничиваясь приближением малых волновых векторов k. При отсутствии анизотропии и $\omega = 0$, $k = 0$ имеем $\det P(0,\ 0) = \det c_2$ и в силу явного вида матрицы c_2 (27) $\det P(0,\ 0) = 0$. Это означает, что в изотропном случае система имеет по крайней мере две голдстоуновские моды (так как A_{2l+1} $(k = 0) = 0$). При наличии анизотропии ситуация меняется: $\det P(0,\ 0) = \det c_2 \neq 0$, что означает, что в общем случае все моды анизотропного магнетика являются активационными. Однако порядок активационных частот по анизотропии может быть различным: от первого до третьего. Поскольку мы рассматриваем малую анизотропию, ограничимся учетом анизотропии в линейном приближении. В данном приближении моды, частоты активации которых квадратичны и кубичны по анизотропии, становятся безактивационными. Рассмотрим некоторые частные случаи равновесных значений величин $\underline{s}$, $\underline{h}$, p_k .

1. $\underline{s} = 0$, $\underline{h} = 0$, $p_k = 0$.

Дисперсионное уравнение (29) имеет вид

$$A_6\omega^6 + (A_4' + A_4''k^2)\omega^4 + A_2''k^2\omega^2 + A_0'''k^4 = 0\ . \qquad (30)$$

Здесь в коэффициентах A_n в уравнении (29) явно выделена зависимость от модуля $|\mathbf{k}|$. Решение уравнения (30) приводит к двум парам голдстоуновских и к паре активационных мод:

$$\omega_{1,\,2}^2 = F_{1,2}\,k^2, \qquad \omega_3^2 = \omega_0^2 + F_3k^2\ ,$$

где

$$\omega_0^2 = -\frac{A_4'}{A_6}\ ,\ F_{1,2} = \frac{1}{2A_4'}\left\{-A_2'' \pm \sqrt{(A_2'')^2 - 4A_0'''A_4'}\right\},$$

$$F_3 = \frac{A_6A_2'' - A_4'A_4''}{A_6A_4'}\ .$$

Для сравнения приведем вид спектров спиновых волн изотропного магнетика [10,11] для рассматриваемого случая:

$$\omega_i^2 = \lambda_i^2k^2\ ,\ i = 1,\ 2,\ 3\ .$$

2. $\underline{s} \neq 0$, $\underline{h} = 0$, $p_k = 0$.

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$A_6\omega^6 + (A_4' + A_4''k^2)\omega^4 + (A_2' + A_2''k^2)\omega^2 + A_0'''k^4 = 0\ . \qquad (31)$$

При малых k имеем две пары активационных и пару голдстоуновских мод:

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_\pm^2 + R_\pm k^2\ , \qquad \omega_3^2 = R_3k^4\ .$$

Здесь

$$\omega_\pm = \frac{1}{2A_6}\left\{-A_4' \pm \sqrt{(A_4')^2 - 4A_2'A_6}\ \right\},$$

$$R_\pm = \mp\frac{A_2'' + A_4''\omega_\pm^2}{A_6(\omega_+^2 - \omega_-^2)}\ , \qquad R_3 = -\frac{A_0'''}{A_2'}\ .$$

В аналогичном случае для изотропного магнетика [10,11] имеем

$$\omega_1^2 = \nu_1k^4\ ,\ \omega_2^2 = \nu_2k^2,\ \omega_3^2 = \omega_0^2 + \nu_3k^2\ .$$

В связи с появлением активационных частот в изотропном случае отметим, что такая ситуация является характерной для рассматриваемых обменных многоподрешеточных магнетиков, состояние которых наряду с плотностью суммарного спина характеризуется также дополнительной динамической переменной — матрицей поворота. Это связано с тем, что в уравнениях движения для плотностей аддитивных интегралов движения разложение по пространственным градиентам начинается с линейных по градиентам членов, в то время как в уравнении движения для матрицы поворота такое разложение начинается с нулевых по градиентам членов, что соответствует прецессионному движению с соответствующими активационными частотами. Простой модельный пример, иллюстрирующий такое положение, приведен в [6].

3. $\underline{s} \neq 0$, $\underline{h} \neq 0$, $p_k = 0$.

Уравнение (29) имеет вид

$$A_6\omega^6 + (A'_4 + A''_4 k^2)\omega^4 +$$

$$+ (A'_2 + A''_2 k^2)\omega^2 + A'_0 + A''_0 k^2 = 0 \ . \qquad (32)$$

В этом случае все ветви являются активационными:

$$\omega_i^2 = \omega_{0i}^2 + c_i^2 k^2 \ , \ i = 1,\ 2,\ 3 \ ,$$

где частоты активации ω_{0i}^2 определяются из кубического уравнения, получаемого из (32) при $k = 0$. Для изотропного магнетика в данном случае [12] имеется две пары активационных и пара голдстоуновских ветвей:

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_\pm^2 + \mu_\pm k^2 \ , \ \omega_3^2 = \mu_3 k^2 \ .$$

4. $\underline{s} \neq 0$, $\underline{h} \neq 0$, $p_k \neq 0$.

Это наиболее общий случай. Анализ дисперсионного уравнения показывает, что имеется шесть активационных ветвей с пространственной анизотропией, обусловленной наличием спиральной структуры

$$\omega_i = \omega_{0i} + c_i(\mathbf{pk}) + d'_i(\mathbf{pk})^2 + d''_i\mathbf{k}^2 \ .$$

Для изотропного магнетика в данном случае [6] имеем

$$\omega_{1,2} = \alpha(\mathbf{pk}) \pm \sqrt{\beta\mathbf{k}^2 + \gamma(\mathbf{pk})^2} \ ,$$

$$\omega_i = \omega_{0i} + \lambda'_i(\mathbf{pk}) + \mu'_i(\mathbf{pk})^2 + \mu''_i\mathbf{k}^2 \ \ (i = 3,\ \ldots,\ 6) \ .$$

В заключение отметим, что имеется много общего между динамикой многоподрешеточного магнетика с полным нарушением симметрии относительно спиновых вращений и спиновой динамикой сверхтекучей B-фазы ^{3}He [13,14], так как они описываются одинаковым набором гидродинамических переменных — плотностью спина и вещественной матрицей поворота (или соответствующими углами вращения). Поэтому полученные формулы для асимптотик функций Грина могут быть использованы и в случае B-фазы ^{3}He. В частности, в пренебрежении анизотропией и при $\underline{s}^0 = 0$, $\underline{h} = 0$, $\mathbf{p} = 0$ найденные выражения для асимптотик совпадают с результатами работы [15], если в качестве величин a и b выбрать переменные $\underline{s}$ и φ.

Автор выражает благодарность С. В. Пелетминскому и М. Ю. Ковалевскому за обсуждение результатов и полезные замечания.

1. В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, *Метод функций Грина в статистической механике*, Наука, Москва (1961).
2. В. Г. Барьяхтар, В. И. Криворучко, Д. Я. Яблонский, *Функции Грина в теории магнетизма*, Наукова думка, Киев (1984).
3. A. I. Akhiezer, V. G. Bar'yakhtar, and S. V. Peletminsky, *Spin Waves*, North. Holland, Amsterdam (1960).
4. I. E. Dzyaloshinskii and G. E. Volovick, *Ann.Phys.* **125**, 67 (1980).
5. А. А. Исаев, С. В. Пелетминский, *ТМФ* **102**, 470 (1995).
6. М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, А. Л. Шишкин, *УФЖ* **36**, 245 (1991).
7. M. Yu. Kovalevsky and A. A. Rozhkov, *Physica* **A216**, 169 (1995).
8. W. M. Saslow, *Phys. Rev.* **B22**, 1174 (1980).
9. Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1984).
10. Д. В. Волков, А. А. Желтухин, *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **44**, 1487 (1980).
11. B. I. Halperin and W. M. Saslow, *Phys. Rev.* **B16**, 2154 (1977).
12. А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, *УФН* **130**, 39 (1980).
13. K. Maki, *Phys. Rev.* **B11**, 4246 (1975).
14. М. Ю. Ковалевский, А. А. Рожков, *ФНТ* **21**, 1138 (1995).
15. Z. M. Galasievicz, *J. Low Temp. Phys.* **57**, 123 (1984).

Hydrodynamic asymptotic of Green functions for weakly anisotropic multisublattice magnets

A. A. Isayev

A hydrodynamic asymptotic of the Green functions is derived for weakly anisotropic multisublattice magnets, the reduced description parameters of which are the density of total spin and the matrix of rotation in spin space. The spectra of spin waves are found and the number of Goldstone and activation modes is determined.