УДК 531.38

О ДВУХ КЛАССАХ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Е. К. Щетинина

Донец. гос. ун-т экономики и торговли им. М. Туган-Барановского
Украина, 83050, Донецк, ул. Щорса, 31

We find two new classes of precession motions of a gyrostat with a fixed point. The motions are described by Kirchhoff's differential equations. For the first class, the precession velocity and the eigen rotation velocity are equal and given by a first order trigonometric polynomial in the angle of the eigen rotation. For the second class, the procession and the rotation velocities do not coincide, and are given by special functions of the angle of proper rotations. These classes are described in terms of new solutions of Kirchhoff's equations.

Отримано два нових класи прецесійних рухів гіростата з нерухомою точкою, що описуються диференціальними рівняннями Кірхгофа. Для першого класу швидкості прецесії і власного обертання рівні між собою і задані у вигляді тригонометричного многочлена першого степеня відносно кута власного обертання. Для другого класу швидкості прецесії й обертання не збігаються між собою і визначені спеціальними залежностями від кута власного обертання. Дані класи прецесій описуються новими розв'язками рівнянь Кірхгофа.

Введение. Прецессионные движения гиростата с неподвижной точкой O характеризуются постоянством угла между двумя осями l_1 и l_2 с началом в точке O: ось l_1 неизменно связана с гиростатом, ось l_2 неподвижна в пространстве [1, 2]. Если ось l_2 направлена по вектору, характеризующему ось симметрии силового поля, то прецессионное движение называется прецессией относительно вертикали. Обзор основных результатов, полученных при изучении прецессий в различных задачах динамики, представлен в работе [2].

В результате применения метода годографов прямого кинематического истолкования движения твердого тела с неподвижной точкой, основанного на кинематических уравнениях П. В. Харламова [3], был выделен важный класс изоконических движений [2]. Для изоконических движений подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости конгруэнтны друг другу относительно касательной к ним плоскости. Другие типы годографов в частных решениях уравнений динамики твердого тела проанализированы в работе [4].

Прецессионно-изоконические движения гиростата имеют как свойство прецессии относительно вертикали, так и свойство изоконичности годографов вектора угловой скорости. В задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил условия существования таких движений рассмотрены в работах [2, 5, 6].

Данная статья посвящена изучению условий существования двух специальных классов прецессионных движений, описываемых уравнениями Кирхгофа [7, 8]. Для первого класса скорости прецессии и собственного вращения гиростата равны и заданы в виде тригонометрического многочлена первой степени относительно угла собственного вращения. Для второго класса эти скорости не совпадают и определены тригонометрическими многочленами первой степени специального вида. Построены новые решения уравнений Кирхгофа.

Постановка задачи. Первый класс прецессионных движений гиростата. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой в постановке [8]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силовых полей (магнитного, электрического и центрального ньютоновского); $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — гиростатический момент, характеризующий движение симметричных носимых тел; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = \{A_{ij}\}$ — тензор инерции, вычисленный в неподвижной точке O; $B = \{B_{ij}\}$, $C = \{C_{ij}\}$ — постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает производную по времени t.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$\begin{gathered} A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \\ (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь E и k — произвольные постоянные.

Свяжем с осью l_1 единичный вектор $\boldsymbol{a}$, а ось l_2 направим по вектору $\boldsymbol{\nu}$. Прецессию гиростата относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$ можно описать двумя инвариантными соотношениями [2]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu} \quad (a_0 = \cos\theta_0, \quad \theta_0 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu})), \tag{3}$$

где $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ — скорости собственного вращения и прецессии гиростата.

Предположим, что кроме свойства прецессионности движения имеет место свойство изоконичности подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости. Тогда должно выполняться условие [2]

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{c}) = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{c}$ — единичный вектор, неизменно связанный с гиростатом.

При исследовании прецессий, как правило, подвижная система координат выбирается так, что $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$. Тогда подстановка второго соотношения из системы (3) в кинематическое уравнение из (1) позволяет с учетом первого равенства из (3) и геометрического интеграла из (2) для компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ получить выражения [2]

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0 \quad \big(a_0' = \sin\theta_0, \quad a_0 = \cos\theta_0\big). \tag{5}$$

Если внести выражение для $\boldsymbol{\omega}$ из (3) в инвариантное соотношение (4), то при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$ получим равенство $\psi = \varphi + \psi_0$, где ψ_0 — постоянная. В данной работе примем это условие и положим

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \alpha + \beta \sin\varphi, \tag{6}$$

где α и β — постоянные, подлежащие определению. Класс прецессионно-изоконических движений вида (6) отнесем к первому классу прецессий, который будет изучаться в данной статье.

Для исследования условий существования соотношений (6) у уравнений (1) используем уравнения [2], которые получены из уравнений (1) и интегралов (2):

$$h_1(\varphi)\dot{\varphi} + h_2(\varphi)\dot{\psi} = f_2(\varphi), \tag{7}$$

$$\dot{\varphi}^2 A_{33} + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}h_1(\varphi) + \dot{\psi}^2 h_2(\varphi) = g_2(\varphi), \tag{8}$$

$$\ddot{\varphi}H_1(\varphi)+\ddot{\psi}H_2(\varphi)+{a_0'}^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\mathrm{Sp}(A)+h_1(\varphi)(\dot{\varphi}^2+2a_0\dot{\varphi}\dot{\psi}+\dot{\psi}^2)+\dot{\varphi}P_1(\varphi)+\dot{\psi}Q_1(\varphi)+R_1(\varphi) = 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
h_1(\varphi) &= \alpha_1\cos\varphi + \alpha_1'\sin\varphi + \alpha_0,\\
h_2(\varphi) &= A_2\cos 2\varphi + A_2'\sin 2\varphi + A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi + A_0,\\
f_2(\varphi) &= b_2\cos 2\varphi + b_2'\sin 2\varphi + b_1\cos\varphi + b_1'\sin\varphi + b_0,\\
g_2(\varphi) &= c_2\cos 2\varphi + c_2'\sin 2\varphi + c_1\cos\varphi + c_1'\sin\varphi + c_0,\\
H_1(\varphi) &= \alpha_1'\cos\varphi - \alpha_1\sin\varphi,\\
H_2(\varphi) &= A_2'\cos 2\varphi - A_2\sin 2\varphi + \frac{A_1'}{2}\cos\varphi - \frac{A_1}{2}\sin\varphi,\\
P_1(\varphi) &= p_1\cos\varphi + p_1'\sin\varphi + p_0,\\
Q_1(\varphi) &= q_1\cos\varphi + q_1'\sin\varphi + q_0,\\
R_1(\varphi) &= r_1\cos\varphi + r_1'\sin\varphi + r_0.
\end{aligned} \tag{10}$$

В выражениях (10) введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = a_0'A_{23}, \quad \alpha_1' = a_0'A_{13}, \quad \alpha_0 = a_0A_{33}, \quad A_2 = \frac{{a_0'}^2}{2}\left(A_{22}-A_{11}\right), \quad A_2' = {a_0'}^2A_{12},\\
A_1 = 2a_0a_0'A_{23}, \quad A_1' = 2a_0a_0'A_{13}, \quad A_0 = \frac{1}{2}\left[{a_0'}^2(A_{11}+A_{22}) + 2a_0^2A_{33}\right],\\
b_2 = \frac{{a_0'}^2}{4}\left(B_{22}-B_{11}\right), \quad b_2' = \frac{{a_0'}^2}{2}B_{12}, \quad b_1 = a_0'(a_0B_{23}-\lambda_2), \quad b_1' = a_0'(a_0B_{13}-\lambda_1),\\
b_0 = \frac{1}{4}\left[{a_0'}^2(B_{11}+B_{22}) + 2a_0^2B_{33}\right] - a_0\lambda_3 + k, \quad c_2 = \frac{{a_0'}^2}{2}\left(C_{11}-C_{22}\right),\\
c_2' = -{a_0'}^2C_{12}, \quad c_1 = 2a_0'(s_2 - a_0C_{23}), \quad c_1' = 2a_0'(s_1 - a_0C_{13}),\\
c_0 = 2E + 2a_0s_3 - \frac{1}{2}\left[{a_0'}^2(C_{11}+C_{22}) + 2a_0^2C_{33}\right],
\end{gathered} \tag{11}$$

$$p_1 = a_0'(\lambda_2 - a_0B_{23}), \quad p_1' = a_0'(\lambda_1 - a_0B_{13}), \quad p_0 = 2(a_0\lambda_3 - k) - a_0^2B_{33},$$

$$q_1 = a_0'(a_0\lambda_2 - B_{23}), \quad q_1' = a_0'(a_0\lambda_1 - B_{13}), \quad q_0 = \lambda_3(1 + a_0^2) - a_0B_{33} - 2a_0k,$$

$$r_1 = a_0'(a_0s_2 - C_{23}), \quad r_1' = a_0'(a_0s_1 - C_{13}), \quad r_0 = s_3(1 + a_0^2) - a_0C_{33} - 2a_0E.$$

Таким образом, ставится задача определения условий существования у уравнений (7) – (9) решений (6).

Исследование условий существования первого класса прецессий (6). Внесем выражения (6) в уравнение (7):

$$(\alpha + \beta\sin\varphi)(h_1(\varphi) + h_2(\varphi)) - f_2(\varphi) = 0. \tag{12}$$

Случай $h_1(\varphi) + h_2(\varphi) \equiv 0$, $f_2(\varphi) \equiv 0$ рассмотрен в работе [5]. В ней показано, что для значения θ_0 выполняется равенство

$$\cos\theta_0 = \frac{A_{11}}{A_{11} - A_{33}},$$

для которого решение (6) действительно только в случае, когда неравенства треугольника на моменты инерции не выполняются, т. е. решение [5] справедливо лишь в задаче о движении гиростата. В данной работе рассмотрим более общий случай.

Требование, чтобы равенство (12) выполнялось для любых φ, при наличии обозначений (10), (11) приводит к условиям

$$\begin{gathered}
A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{22} = A_{11}, \quad B_{12} = 0, \quad \lambda_2 = a_0B_{23},\\
2\beta(1 + 2a_0)A_{13} + a_0'(B_{22} - B_{11}) = 0,\\
\alpha a_0'(1 + 2a_0)A_{13} + \beta(a_0^2A_{33} + {a_0'}^2A_{11} + a_0A_{33}) - a_0'(a_0B_{13} - \lambda_1) = 0,\\
k = a_0\lambda_3 + \alpha(a_0^2A_{33} + {a_0'}^2A_{11} + a_0A_{33}) + \frac{1}{2}\,a_0'(1 + 2a_0)A_{13}\beta + \frac{1}{4}\,{a_0'}^2(B_{11} + B_{22}) + \frac{1}{2}\,a_0^2B_{33}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Уравнение (8) при подстановке в него выражений (6) тоже должно быть тождеством по φ. Это возможно только при условии $A_{13} = 0$, т. е. с учетом равенств (13) подвижная система координат, связанная с вектором $\boldsymbol{a}$, является главной системой координат. Тогда условия (13) преобразуются к виду

$$\begin{gathered}
B_{22} = B_{11}, \quad \beta = \frac{a_0B_{13} - a_0'\lambda_1}{{a_0'}^2A_{11} + a_0(a_0 + 1)A_{33}},\\
k = a_0\lambda_3 + \alpha(a_0^2A_{33} + {a_0'}^2A_{11} + a_0A_{33}) + \frac{1}{2}({a_0'}^2B_{11} + a_0^2B_{33}).
\end{gathered} \tag{14}$$

Дальнейший анализ уравнения (8) приводит к равенствам

$$\begin{gathered}
\beta^2[a_0(A_{33} - A_{11}) + (A_{11} + A_{33})] = (1 - a_0)(C_{22} - C_{11}), \quad C_{12} = 0, \quad s_2 = a_0C_{23},\\
\alpha\beta(1 + a_0)\,[a_0(A_{33} - A_{11}) + (A_{11} + A_{33})] = a_0'(s_1 - a_0C_{13}),
\end{gathered} \tag{15}$$

$$2E = \left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2\right)(1+a_0)[a_0(A_{33}-A_{11})+$$

$$+(A_{11}+A_{33})] - 2a_0 s_3 - \frac{1}{2}\left[{a_0'}^2(C_{11}+C_{22}) + 2{a_0}^2 C_{33}\right].$$

Уравнение (9) при наличии соотношений (6), (14), (15) становится тождеством по φ, если выполнены условия

$$\begin{gathered}
\lambda_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{23} = 0, \\
\lambda_1[a_0(A_{33}-A_{11}) + (A_{11}+A_{33})] = (a_0-1)A_{11}B_{13}, \\
\frac{1}{2}\beta^2[a_0(A_{33}-2A_{11}) + (2A_{11}+A_{33})] + (1-a_0)[\alpha^2(a_0(A_{33}-A_{11})+A_{33})+ \\
+\alpha(\lambda_3 - a_0B_{33} + (a_0+1)B_{11}) + s_3 + a_0(C_{22}-C_{33})] = 0, \\
2\alpha\beta a_0'[a_0(A_{33}-A_{11}) + (A_{11}+A_{33})] + \beta a_0'[\lambda_3 - a_0B_{33} + (a_0+1)B_{11}]+ \\
+\alpha(a_0+1)(\lambda_1 - B_{13}) + a_0 s_1 - C_{13} = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Объединяя равенства (13) – (16) и упрощая ряд из них, получаем

$$\begin{gathered}
A_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad A_{22} = A_{11}, \quad B_{23} = B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \\
C_{23} = C_{12} = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad s_2 = 0,
\end{gathered} \tag{17}$$

$$\alpha = \frac{s_1 - a_0C_{13}}{(a_0+1)B_{13}}, \quad \beta = -\frac{(a_0+1)\lambda_1}{a_0'A_{11}}, \tag{18}$$

$$B_{13} = \frac{\lambda_1}{(a_0-1)A_{11}}[a_0(A_{33}-A_{11}) + (A_{11}+A_{33})], \quad C_{11} - C_{22} = \frac{(a_0+1)\lambda_1B_{13}}{(1-a_0)A_{11}}, \tag{19}$$

$$\begin{gathered}
(a_0-1)A_{11}C_{13}[2a_0^2(A_{33}-A_{11}) + 3a_0A_{33} + (A_{11}+A_{33})]+ \\
+(1-a_0)s_1A_{11}[a_0(A_{33}-A_{11}) + A_{33}]+ \\
+\lambda_1[a_0(A_{33}-A_{11}) + (A_{11}+A_{33})]\,[\lambda_3 - a_0B_{33} + (a_0+1)B_{11}] = 0,
\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\beta^2[a_0(A_{33}-2A_{11}) + (2A_{11}+A_{33})] + (1-a_0)[\alpha^2(a_0(A_{33}-A_{11})+A_{33})+ \\
+\alpha(\lambda_3 - a_0B_{33} + (a_0+1)B_{11}) + s_3 + a_0(C_{22}-C_{33})] = 0,
\end{gathered} \tag{21}$$

$$2k = 2a_0\lambda_3 + 2\alpha(a_0+1)[a_0(A_{33}-A_{11}) + A_{11}] - {a_0'}^2 B_{11} - a_0^2 B_{33},$$
$$2E = \alpha^2(a_0+1)[a_0(A_{33}-A_{11}) + (A_{11}+A_{33})] - 2a_0 s_3 + {a_0'}^2 C_{22} + a_0^2 C_{33}. \tag{22}$$

Таким образом, соотношения (17) – (22) являются условиями существования прецессионно-изоконических движений гиростата в задаче (1) в случае (6).

Равенства (17) показывают, что вектор $\boldsymbol{a}$ принадлежит оси эллипсоида инерции, относительно которой он является эллипсоидом вращения, а векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{s}$ принадлежат главной плоскости эллипсоида инерции. Формулы (18) указывают на явную зависимость параметров прецессионно-изоконического движения (6) через параметры задачи. Равенства (19) используются для определения параметров B_{13} и $C_{11}-C_{22}$ через остальные параметры задачи. Равенство (20) позволяет определить величину λ_3, а равенство (21) — величину s_3. Соотношения (22) являются условиями на постоянные первых интегралов (2). Действительность решения (6) при условиях (17) – (21) следует непосредственно из структуры формулы (6) и формул (17) – (21).

Определим зависимость переменных φ и ψ от времени. В случае $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 > 0$ из уравнений (6) следует

$$\psi(t) = \varphi(t) = \arcsin\frac{\alpha(\beta\cos v + \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\sin v - \beta)}{\alpha^2 - \beta(\beta\cos v + \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\sin v)}, \quad v = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,t, \tag{23}$$

где принято, что при $t = 0$ значение $\varphi = 0$. Из выражений (23) следует, что $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — периодические функции времени с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$.

При $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 < 0$ зависимости $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ таковы:

$$\psi(t) = \varphi(t) = \frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1 - \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}}\psi}{\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}}\,\psi - 1}, \quad \psi = \mathrm{th}\,\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{2}\,t. \tag{24}$$

В случае (24) движение гиростата имеет асимптотический характер: при $t \to \infty$ $\psi = \varphi \to \varphi_0$, где $\sin\varphi_0 = -\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Если в уравнении $\alpha = \beta$, т. е. в силу (18) выполняется условие

$$a_0' A_{11}(s_1 - a_0 C_{13}) + (a_0+1)^2 \lambda_1 B_{13} = 0,$$

то функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют вид

$$\psi(t) = \varphi(t) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha t}{2 - \alpha t}. \tag{25}$$

При получении (25) полагалось: при $t = 0$ $\varphi = 0$. При $t \to \infty$ $\psi(t) = \varphi(t) \to -\dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, в силу (3), (5), (6) решение уравнений (1) можно записать так:

$$\nu_1 = a_0'\sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0'\cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0,$$
$$\omega_1 = a_0'(\alpha + \beta\sin\varphi)\sin\varphi, \quad \omega_2 = a_0'(\alpha+\beta\sin\varphi)\cos\varphi, \tag{26}$$
$$\omega_3 = (\alpha + \beta\sin\varphi)(a_0+1),$$

где $\varphi(t)$ имеет один из видов (23) – (25) (в зависимости от значений параметров задачи).

Решение (26) описывает движение гиростата, для которого, кроме постоянства угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$, подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости. Поэтому представляет интерес исследование свойств этих кривых.

Используя соотношения (26), подвижный годограф можно представить как линию пересечения конуса и параболического цилиндра

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{{a_0'}^2 \omega_3^2}{(a_0+1)^2}, \quad \omega_1 = \frac{a_0' \omega_3}{\beta(a_0+1)} \left(\frac{\omega_3}{a_0+1} - \alpha \right). \tag{27}$$

Неподвижный годограф запишем, использовав уравнения П. В. Харламова [3]:

$$\omega_\zeta = (a_0+1)(\alpha + \beta \sin\varphi), \quad \omega_\rho = |a_0'(\alpha + \beta\sin\varphi)|, \quad \alpha = \psi(t) + \alpha_0. \tag{28}$$

Из уравнений (28) следует, что проекция неподвижного годографа на горизонтальную плоскость является улиткой Паскаля, а меридианом поверхности вращения служит пара пересекающихся прямых.

Исходя из соотношений (23) – (25), (27), (28), можно сделать следующий вывод: при $\alpha > \beta$ движение гиростата имеет периодический характер с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$, при $\alpha \le \beta$ движение гиростата при $t \to \infty$ стремится к равномерному вращению относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$.

Исследование условий существования второго класса прецессий. Зададим второй класс прецессий в виде

$$\dot\varphi = p_0 + q_0 \sin\frac{\varphi}{2} + r_0 \cos\frac{\varphi}{2}, \quad \dot\psi = b_0 + c_0 \sin\frac{\varphi}{2} + d_0 \cos\frac{\varphi}{2}. \tag{29}$$

Используя уравнения (7) – (9) и обозначения (10), (11), получаем

$$\dot\varphi = -2a_0 \left(c_0 \sin\frac{\varphi}{2} + d_0 \cos\frac{\varphi}{2} \right). \tag{30}$$

Зависимость $\dot\psi$ из (29) не изменяется. Условия существования прецессий (29) можно записать в виде

$$\begin{gathered} A_{ij} = 0, \quad i \ne j, \quad A_{22} = A_{11}, \quad B_{ij} = 0, \quad i \ne j, \quad B_{22} = B_{11}, \\ C_{12} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \end{gathered} \tag{31}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 = 0, \quad \operatorname{tg}^2\theta_0 = \frac{A_{33}}{A_{11}}, \quad s_1 = \frac{2a_0^3 C_{13}}{a_0^2+1}, \quad s_2 = \frac{2a_0^3 C_{23}}{a_0^2+1}, \tag{32}$$

$$b_0 = \frac{{a_0'}^2}{2a_0^3 A_{33}} \left[\lambda_3 - a_0(B_{11} + B_{33}) \right], \tag{33}$$

$$c_0^2 = \frac{{a_0'}^3 (C_{23} \pm \sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2})}{a_0(a_0^2+1)A_{33}}, \quad d_0 = -\frac{{a_0'}^3 C_{13}}{a_0(a_0^2+1)c_0 A_{33}}, \tag{34}$$

$$s_3 = \frac{1}{{a_0'}^2}\left[a_0 {a_0'}^2 (C_{33} - C_{11}) - a_0 b_0 ({a_0'}^2 B_{11} - a_0^2 B_{33}) + \frac{a_0(c_0^2 + d_0^2)A_{33}}{2} - a_0 b_0^2 A_{33}\right], \tag{35}$$

$$\begin{gathered} k = a_0\lambda_3 + 2a_0^2 b_0 A_{33} - \frac{1}{2}\,({a_0'}^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}), \\ 2E = {a_0'}^2 C_{11} + a_0^2 C_{33} - 2a_0 s_3 + a_0^2(2b_0^2 + c_0^2 + d_0^2)\,A_{33}. \end{gathered} \tag{36}$$

Условия (31) являются ограничениями на матрицы A, B, C. Равенства (32) дают условия коллинеарности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, определяют значения угла θ_0 через моменты инерции гиростата и зависимость величин s_1, s_2 через угол θ и величины C_{13}, C_{23}. Выражение (33) указывает значение свободного члена в выражении для $\dot{\psi}$ из системы (29). Формулы (34) дают явные значения параметров c_0, d_0 через параметры задачи. Соотношение (35) можно рассматривать как условие на параметр s_3. Постоянные первых интегралов (2) определены соотношениями, которые можно получить из формул (36) подстановкой в них b_0, c_0, d_0, s_3.

Зависимости $\varphi(t)$ можно найти из (30) по аналогии с формулами (23), (24), а зависимость $\psi(t)$ такова:

$$\psi(t) = b_0 t - \frac{\varphi(t)}{2a_0}. \tag{37}$$

Зависимости переменных ω_i и ν_i от времени можно найти, используя формулы (3), (5), (37). Они определяют новое решение уравнений (1).

1. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed appl. — 1947. — **26**, № 3–4. — P. 271–281.
2. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. — 2003. — **67**, вып. 4. — С. 573–587.
3. *Харламов П. В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. — 1964. — **28**, вып. 3. — С. 502–507.
4. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. — Киев: Наук. думка, 1978. — 296 с.
5. *Верховод Е. В., Горр Г. В.* Прецессионно-изоконические движения твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. — 1993. — **57**, вып. 4. — С. 31–39.
6. *Узбек Е. К.* Новый класс прецессионно-изоконических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Докл. НАН Украины. — 2005. — № 7. — С. 46–51.
7. *Харламов П. В., Мозалевская Г. В., Лесина М. Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. — 2001. — Вып. 31. — С. 3–17.
8. *Yehia H. M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces // J. Theor. and Appl. Mech. — 1986. — **5**, № 5. — P. 755–762.

Получено 07.04.06,
после доработки — 16.09.10