

МОДЕЛЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОНФЛІКТНОЇ ТРИАДИ

В. Д. Кошманенко, І. В. Самойленко

Ін-т математики НАН України

Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

A dynamical system model of conflict triad is investigated. The model describes an interaction between substances of the natural triad: biological populations (life), the environment (living resources), and negative influences (infectious). The main phases of coexistence for substances are established: the equilibrium state (fixed point), the cyclic attractors, the periodic oscillating trajectories, and evolution near to chaotic. The existence of bifurcation points and thresholds between phases are demonstrated by computer modelings.

Исследуется модель динамической системы конфликтной триады, описывающая взаимодействие между тремя природными субстанциями: популяцией биологического вида (жизнь), внешней средой (ресурс существования, добро) и негативными факторами для существования (инфекция, зло). Установлено наличие основных фаз сосуществования субстанций триады: состояния динамического равновесия (стабильной неподвижной точки), циклических аттракторов, периодически осциллирующих траекторий и эволюций, близких к хаотическим. На конкретных моделях показано существование бифуркационных точек и порогов перехода между различными фазами.

1. Вступ. Під природною конфліктною триадою розуміємо фізичну систему, що складається з трьох субстанцій (позначимо їх \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q}), які існують у спільному просторі Ω і певним чином взаємодіють. Кожній із субстанцій \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} в початковий момент часу співставляється число P , R , Q , яке характеризує абсолютне значення кількості відповідної субстанції в Ω . Система є складною в тому сенсі, що кожна субстанція розподілена по окремих регіонах Ω_i , з яких складається простір існування: $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, $n < \infty$. Це означає, що \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} є векторами з невід'ємними координатами:

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n), \quad \mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n), \quad P_i, R_i, Q_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

При цьому числа P_i , R_i , Q_i дають кількісну характеристику відповідних субстанцій в Ω_i у початковий момент часу, а P , R , Q є l_1 -нормами векторів \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} :

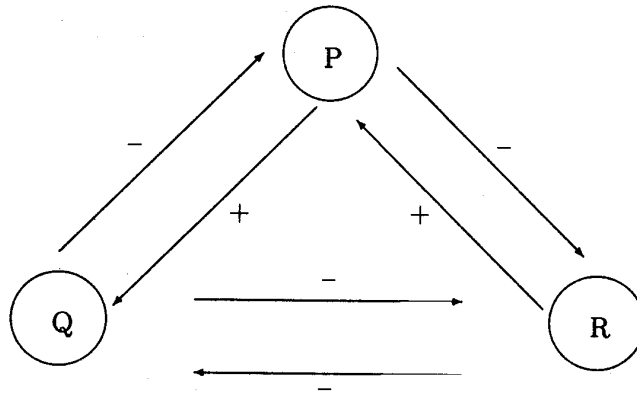
$$P = \|\mathbf{P}\|_1 = P_1 + \dots + P_n, \quad R = \|\mathbf{R}\|_1, \quad Q = \|\mathbf{Q}\|_1.$$

Еволюція векторів \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} , зумовлена конфліктною взаємодією, породжує деяку динамічну систему в дискретному часі:

$$\{\mathbf{P}^N, \mathbf{R}^N, \mathbf{Q}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{P}^{N+1}, \mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{Q}^{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \dots,$$

де $\mathbf{P}^0 = \mathbf{P}$, $\mathbf{R}^0 = \mathbf{R}$, $\mathbf{Q}^0 = \mathbf{Q}$.

Відображення $*$ позначає закон взаємодії між субстанціями, який взагалі є невідомим. У цій роботі $*$ визначено евристично (див. формули (19), (20) у п. 3) згідно з інтуїтивним розумінням фізичного сенсу субстанцій \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} . Символічно взаємозалежність між \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} ми зображуємо діаграмою



де стрілочка з певним знаком $\xrightarrow{+}$ ($\xleftarrow{-}$) відповідає напрямку позитивної (негативної) залежності однієї із субстанцій від іншої. Позитивна залежність означає певний закон зростання відповідної кількісної характеристики, а негативна — спадання. Двостороння парна взаємозалежність плюс-мінус позначає варіант взаємодії, аналогічний відомій моделі „жертва – хижак” (див., наприклад, [1–3]). Тут ми використовуємо два різних варіанти такої взаємодії: взаємозалежність між парами біологічний вид (хижак) – життєвий ресурс (жертва) та взаємозалежність між еволюцією біологічного виду (як жертви) та поширенням вірусної інфекції (як хижака). Взаємозалежність мінус–мінус є принципово іншою. Вона моделює конфліктну боротьбу альтернативних субстанцій типу: вірус–антидот. Протилежною субстанцією до вірусної інфекції виступає життєвий ресурс, який припускається невичерпним, а інфекція є незнищеною в принципі.

Таким чином, послідовність P_i^N , $i = 0, 1, \dots$, можна трактувати як еволюцію кількісної характеристики певного біологічного виду в регіоні Ω_i під впливом двох протилежних чинників. А саме, динаміка популяції P_i^N визначається, з одного боку, позитивною залежністю від субстанції **R** (використання ресурсного середовища), що забезпечує зростання P_i^N , а з іншого — негативним впливом зовнішніх загроз існуванню (кількісними втратами від дії інфекцій, носієм яких є субстанція **Q**). При цьому в момент часу $N + 1$ величина P_i^{N+1} повинна бути пропорційною кількості підвидів біологічного виду у регіоні Ω_i у попередній момент часу, зростати при збільшенні R_i^N та спадати при зростанні Q_i^N . У свою чергу, незважаючи на припущення глобальної невичерпності субстанції **R**, регіональні зміни кількості життєвого ресурсу R_i^N є залежними, з одного боку, від локальної (= регіональної) інтенсивності їх використання, як джерела для існування біологічної популяції, а з іншого — від негативного впливу на R_i^N субстанції **Q**, альтернативної по природі до **R**. Насамкінець, еволюцію координат Q_i^N можна інтерпретувати як динамічну характеристику концентрації загроз існуванню для біологічного виду в кожному окремому регіоні Ω_i . Локальне поширення інфекції: Q_i^{N+1} збільшується при зростанні P_i^N та зменшенні R_i^N . Явні формули всіх взаємозалежностей наведено в п. 3.

Символічно трійку субстанцій **P**, **R**, **Q** можна асоціювати з філософською тріадою: людина — добро — зло, або, згідно з міфологією, з природною, як флора і фауна Землі в оточенні води та вогню. Більш конкретно, P^N може позначати глобальну кількісну популяцію деякого біологічного виду (людства), R^N — зміни навколишнього ресурсного (життєвого) середовища, а Q^N відповідає опису динаміки концентрації загроз, пов'язаних

з негативними явищами, які впливають як на біологічну популяцію P^N , так і на ресурсне середовище R^N . При цьому, локально, координати P_i^N , R_i^N , Q_i^N описують еволюції компонент трьох вказаних субстанцій у фіксованому регіоні Ω_i .

Зрозуміло, що загальна схема динамічної системи, що тут досліджується, є досить складною, і тому не слід сподіватися на встановлення точних математичних результатів (теорем) про глобальну поведінку такої системи. Проте ми одержимо деякі точні результати, які, зокрема, справедливі для окремих двосторонніх ланок конфліктної тріади з парною взаємодією між фіксованими субстанціями (див. п. 2). Для повної складної системи ми побудуємо у п. 3 комп'ютерні моделі. Їх аналіз і дослідження виявляють ряд цікавих закономірностей.

Природно виникають два питання. Чи є комп'ютерні моделі коректними? А якщо так, то чи збігається якісна картина еволюції субстанцій P , R , Q з інтуїтивним уявленням про природу конфліктної тріади, відому з практичного досвіду?

Першим важливим результатом цієї роботи є встановлення математичної коректності (фактично змістовності) побудованої динамічної системи конфліктної тріади. А саме, показано, що при певному підборі параметрів взаємодії (цей підбір є нетривіальною окремою задачею) комп'ютерні моделі складної системи не „розвалюються”, тобто значення координат змінюються в фізично допустимих межах.

Другий важливий результат роботи полягає у тому, що модельні реалізації динамічної системи конфліктної тріади проявляють типові закономірності складних систем. А саме, дослідження та аналіз величин P_i^N , R_i^N , Q_i^N у конкретних моделях демонструють характерні властивості, притаманні багатьом явищам природи, в яких діють більше ніж дві субстанції. До таких властивостей, зокрема, відноситься наявність різних фаз існування системи: фази динамічної рівноваги, фази періодичних коливань — широкого спектра траєкторій, які мають тенденцію наближення до циклічних атракторів, наявність зон біфуркаційних точок та порогів між різними фазами, насамкінець наявність еволюцій, близьких до хаотичної поведінки (квазіхаотична фаза).

Зазначимо, що математичною основою моделі конфліктної тріади є поняття динамічної системи конфлікту, яке введено у роботах [4–9, 12]. Серед інших глибоких теоретичних досліджень, які вплинули на наші побудови, відзначимо наведені у роботах [14–20]. Найбільш близькими до нашої моделі конфліктної тріади є різні варіанти так званої SIR-моделі, що описують динаміку епідемічного зараження (докладніше див., наприклад, [21]). В SIR-моделі конфліктна тріада фактично зображена в неявному вигляді. А саме, вся популяція біологічного виду поділяється на три групи: S позначає кількість особин, схильних до зараження, I — інфіковані та здатні переносити інфекцію, R — ті, що знаходяться під захистом або вже одужали. Трохи ускладнена SIR-модель містить ще групу E тих, у кого інфекція знаходиться у прихованій формі. Еволюція зазначених груп у часі визначається відносно простими, але нелінійними рівняннями

$$\dot{S} = -rSI, \quad \dot{I} = rSI - aI, \quad \dot{R} = aI,$$

де коефіцієнти $r, a > 0$. При цьому припускається, що $S(t) + I(t) + R(t) = \text{const}$ і тому $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$. Основне питання — дослідження динаміки поширення інфекції $I(t)$, коли $I(t)$ зростає чи згасає в залежності від заданих коефіцієнтів r, a та стартових значень $S(0), I(0)$. Існує багато публікацій (див. посилання в [22]), в яких SIR-модель удосконалюється або модифікується відповідно до конкретної специфіки біологічного виду, а також інфекції та умов її поширення в певному середовищі.

У порівнянні з SIR-моделлю наші побудови є істотно досконалішими в двох аспектах. А саме, ми використовуємо регіоналізацію простору існування. Тому комп'ютерні моделі системи здатні описувати поширення інфекційного зараження біологічної популяції окремо в кожному з регіонів існування виду і встановлювати найбільш безпечні регіони. Іншим важливим моментом роботи є використання формул, які описують не лише кількісну взаємодію між субстанціями конфлікту, а і більш глибокий імовірнісний (статистичний) закон взаємозалежності і перерозподілу по регіонах існування. Таким чином, відмінність нашого підходу від згаданої вище SIR-моделі полягає у регіоналізації простору існування та використанні статистичних формул для опису динамічної картини. Важливо також, що в формулах (19), (20) закладено принцип незнищенності для кожної із природних субстанцій P, R, Q , хоча вони можуть мігрувати між регіонами (пор. з [18, 19]).

2. Динаміка двосторонніх парних взаємодій. Взаємозалежності субстанцій P, R, Q в конфліктній тріаді згідно з рівняннями (19), (20) (див. нижче) є нелінійними і відносно складними. Але двосторонні парні взаємодії припускають досить повний математичний аналіз. У цьому пункті наведено два результати для ситуацій, які позначаємо як „плюс–мінус” та „мінус–мінус” моделі.

В моделі „плюс–мінус” аналізуємо динаміку змін двох субстанцій P та R . Плюс означає, що P зазнає позитивного впливу з боку R , а мінус — негативного впливу на R з боку P .

Нехай $P^N, N = 0, 1, \dots$, позначає еволюцію кількості субстанції P (фіксованого біологічного виду) на території Ω в дискретному часі. Оскільки простір існування Ω складається з окремих регіонів, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i, 2 \leq n < \infty$, то в кожен момент часу повна кількість P^N певним чином розподіляється по цих регіонах: $P^N = P_1^N + \dots + P_n^N$. Задля спрощення припускаємо, що повна кількість субстанції на всій території Ω є незмінною, $P^N = P = \text{const}$. Це означає, що середня швидкість приросту та зменшення субстанції P (народження та загибелі біологічного виду) є динамічно врівноваженими. Таке припущення виконується досить часто, принаймні локально в певні періоди розвитку складної фізичної системи. Отже, в спрощеній моделі ми досліджуємо лише динаміку перерозподілу P_i^N по регіонах. В моделі конфліктної тріади перерозподіл величин P_i^N обумовлений двома факторами: позитивним впливом з боку субстанції R (використанням ресурсного середовища) та негативним впливом з боку Q (від загроз, наприклад, інфекції). У випадку, коли глобальний вплив останнього фактора є незначним і ним можна знехтувати, двостороння парна взаємодія між величинами P^N, R^N математично дуже спрощується. При цьому залежність R від P є чисто негативною (субстанція R „спалюється” як життєвий ресурс для P). Але ми припускаємо, що кількість R в Ω є стабільною, $R^N = R = \text{const}$. Ця умова стабільності означає, що R постійно відновлюється за рахунок зовнішнього джерела, яке зараз не розглядається. Природно, в кожен момент часу R за певним законом розподіляється по регіонах: $R^N = R_1^N + \dots + R_n^N$.

Задача полягає в дослідженні динаміки змін (перерозподілу) величин P_i^N, R_i^N по регіонах Ω_i внаслідок „плюс–мінус” взаємодії між субстанціями P та R при умові незмінності повної кількості P, R в усьому просторі Ω і їх незалежності від третьої субстанції.

Відповідна динамічна система конфлікту

$$\{P_i^N, R_i^N\} \xrightarrow{*} \{P_i^{N+1}, R_i^{N+1}\}, \quad P_i^0 = P_i, \quad R_i^0 = R_i, \quad (1)$$

є значно простішою в порівнянні з поведінкою повної складної системи. При конкретному заданні перетворення * динамічна система (1) дозволяє провести досить детальний аналіз. Теорема 1 (див. нижче) дає досить повний опис поведінки цієї системи.

Введемо найпростіший варіант конкретних формул „плюс – мінус” взаємодії між субстанціями **P** та **R**. Ці формули записуємо в термінах координат стохастичних векторів з одиничною l_1 -нормою:

$$\mathbf{p}^N = (p_1^N, \dots, p_i^N, \dots, p_n^N), \quad \mathbf{r}^N = (r_1^N, \dots, r_i^N, \dots, r_n^N), \quad p_i^N := \frac{P_i^N}{P}, \quad r_i^N := \frac{R_i^N}{R}, \quad (2)$$

де, нагадаємо, P, R позначають повну кількість субстанцій **P, R** в усьому просторі Ω . А саме, на $(N + 1)$ -му кроці координати p_i^{N+1} та r_i^{N+1} визначаються ітеративно за правилом

$$p_i^{N+1} = \frac{p_i^N(1 + r_i^N)}{z_{p,r}^N}, \quad r_i^{N+1} = \frac{r_i^N(1 - p_i^N)}{z_{r,p}^N}, \quad N = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Тут нормуючі знаменники

$$z_{p,r}^N = 1 + (\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N), \quad z_{r,p}^N = 1 - (\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N)$$

$((\cdot, \cdot) —$ скалярний добуток в \mathbb{R}^n) гарантують стохастичність векторів $\mathbf{p}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}$.

Зауважимо, що різні знаки в чисельниках формул (3) визначають суть „плюс – мінус” моделі. Плюс означає, що P_i^{N+1} зростає в залежності від величини R_i^N , а мінус – зменшення R_i^{N+1} при збільшенні P_i^N . Змістовність моделі забезпечується нормуючими знаменниками.

Теорема 1 („плюс-мінус” модель). Динамічна система конфлікту (1) задана формулами (3), має три характерні фази поведінки.

Перша фаза (рівноважний стан) визначається рівномірним стартовим розподілом:

$$P_i^N = P/n, \quad R_i^N = R/n \quad \forall N, i; \quad \mathbf{p} = (1/n, \dots, 1/n), \quad \mathbf{r} = (1/n, \dots, 1/n). \quad (4)$$

Рівноважний стан (4), як нерухома точка, не є одноточковим аттрактором.

Друга фаза (існування граничного нерухомого стану) характеризується умовою: хоча б для одного i

$$p_i = 0, \quad r_i \neq 0. \quad (5)$$

У цьому випадку система збігається до граничного нерухомого стану

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{p}^N, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{r}^N, \quad \mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty. \quad (6)$$

Третя типова фаза (квазіхаотична поведінка) визначається умовами

$$\mathbf{p} \neq \mathbf{r}, \quad p_i \neq 0, \quad r_i \neq 0 \quad \forall i. \quad (7)$$

У цій фазі кожна з координат $p_i^N, r_i^N, i = 1, \dots, n$, коливається в межах між нулем та одиницею, у загальному випадку без явної закономірності.

Доведення. У випадку рівномірного стартового розподілу субстанцій \mathbf{P} , \mathbf{R} по регіонах: $P_i = P/n$, $R_i = R/n \forall i$ усі координати стохастичних векторів \mathbf{p} , \mathbf{r} однакові: $p_i = r_i = 1/n$. Тоді легко одержати

$$(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 1/n = z_{p,r} = z_{r,p}.$$

Тому згідно з формулами (3) для всіх N маємо $p_i^N = r_i^N = 1/n$. Це доводить нерухомість динамічної системи (1) у стані, який визначається рівномірним стартовим розподілом \mathbf{P} , \mathbf{R} і фіксується однаковими координатами векторів \mathbf{p} , \mathbf{r} . Той факт, що цей рівноважний стан не є одноточковим аттрактором, перевіряється контрприкладми: незначне відхилення будь-якої координати p_i або r_i на $\varepsilon > 0$ від значення $1/n$ приводить з часом до ще більших відхилень (див. також нижче лему 1).

У стані другої фази (з умовою (5)) система збігається до нерухомої точки на границі, $N \rightarrow \infty$. Далі зручно користуватися позначенням

$$\theta^N := \sum_i p_i^N r_i^N = (\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N).$$

Цю величину називаємо *показником конфліктності* динамічної системи в момент часу N .

Припустимо виконання умови (5), тобто лише одна фіксована координата p_i дорівнює 0, а всі інші координати r_i , $p_{k \neq i}$, $r_{k \neq i}$ не дорівнюють 0. Покажемо, що тоді при $N \rightarrow \infty$ існують граничні вектори \mathbf{p}^∞ , \mathbf{r}^∞ з координатами:

$$p_i^\infty = 0, \quad r_i^\infty = 1, \quad p_k^\infty \geq 0, \quad r_k^\infty = 0, \quad k \neq i.$$

Дійсно, якщо $p_i = 0$, а $r_i \neq 0$, то завдяки тому, що $0 < \theta \equiv \theta^0 < 1$, послідовність $r_i^N = r_i^{N-1}/(1-\theta^{N-1})$, $N = 1, 2, \dots$, монотонно зростає. Внаслідок обмеженості $r_i^N < 1$ існує границя $r_i^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} r_i^N$. При цьому, оскільки $r_i^N = r_i \prod_{l=1}^N 1/(1-\theta^l) < 1$, із збіжності r_i^N з необхідністю випливає, що послідовність θ^N монотонно спадає. Отже, $\theta^N \rightarrow 0$. Щоб переконатися, що $r_i^\infty = 1$, проведемо наступні міркування.

Покажемо, що $r_{k \neq i}^N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Припустимо, що це не так. Тобто припустимо, що існує хоча б одна координата $r_{k \neq i}^N$, яка не збігається до нуля. Тоді внаслідок того, що показник конфліктності θ^N прямує до 0, відповідна координата p_k^N повинна прямувати до 0, щоб забезпечити факт $\theta^N \rightarrow 0$. Але це призводить до суперечності із припущенням, позаяк згідно з формулами (3) збіжність θ^N до 0 можлива, лише якщо $r_k^N < \theta^N$, бо $p_k^{N+1} = p_k^N(1+r_k^N)/(1+\theta^N)$. Це означає, що з необхідністю r_k^N прямує до 0 разом з показником конфліктності. Отже, всі координати $r_{k \neq i}^N$ прямують до нуля. Як наслідок, лише одна фіксована координата r_i^∞ дорівнює 1. Звідси також випливає існування граничних координат p_k^∞ , $k \neq i$, які можуть мати довільні (ненульові) значення в сумі, що дорівнюють одиниці. Очевидно, що знову внаслідок рівності $\theta^\infty = 0$ граничний стан усієї системи є нерухомим.

Якщо існують декілька координат $p_i = 0$ з відповідними $r_i \neq 0$, то, повторюючи аналогічні проведенням міркування, легко показати, що всі послідовності r_i^N будуть монотонно зростати і досягати фіксованих граничних значень $r_i^\infty > 0$, які в сумі дорівнюють одиниці. Послідовність показників конфліктності θ^N з необхідністю буде монотонно спадати до нуля і, відповідно, граничний стан системи буде стабільним.

Тепер розглянемо загальну ситуацію, характерну для третьої фази. Вважаємо, що всі стартові координати відмінні від нуля і різні. Тоді $0 < \theta < 1$ і, отже, початкові вектори \mathbf{p} , \mathbf{r} не є ортогональними. Зокрема, ми виключаємо можливість $p_i = r_i = 1$ для якогось i . Покажемо, що в цьому випадку всі координати осцилюють в межах нуля — одиниця (взагалі без явної закономірності).

Як і вище, справедливість наступних міркувань повністю впливає з формул (3). Розглянемо довільну пару координат $0 \neq p_i \neq r_i \neq 0$. Припустимо, що в початковий момент виконуються нерівності

$$r_i < p_i < \theta. \quad (8)$$

Далі буде показано, що всі інші можливі нерівності між r_i , p_i , θ будуть послідовно з'являтися у певний момент часу. Задля скорочення позначень ми ігноруємо (не пишемо) в наступних нерівностях часовий індекс N . Ми також використовуємо наступний факт якісної поведінки величин θ^N , p_i^N , r_i^N . А саме, згідно з визначенням коефіцієнта конфліктності $\theta^N = \sum_i p_i^N r_i^N$ він змінюється повільніше, ніж будь-яка окрема координата p_i^N , r_i^N . Це впливає з того, що скінченна сума добутків диференціалів $\Delta p_i \Delta r_i$ має другий порядок малості в порівнянні з будь-яким окремим диференціалом Δp_i , Δr_i .

Неважко переконатися, що з (8) з урахуванням (3) впливає спадання координати p_i та зростання r_i . Це неминуче приводить до зміни (8) на нерівності

$$p_i < r_i < \theta. \quad (9)$$

Використовуючи знову формули (3), безпосередньо перевіряємо, що координата p_i буде продовжувати спадати, а r_i — зростати. Це триватиме до тих пір, доки замість (9) з'являться нерівності

$$p_i < \theta < r_i. \quad (10)$$

Вони знову згідно з формулами (3) приведуть до того, що координата p_i почне зростати, хоча r_i продовжує зростати. Це, очевидно, триватиме доти, доки нерівності (10) не зміняться на

$$\theta < p_i < r_i. \quad (11)$$

Зауважимо, що з останньої нерівності не впливає прямування до нуля коефіцієнта конфліктності (вектори \mathbf{p} , \mathbf{r} не можуть стати ортогональними). Це є наслідком того, що з (11), а також з наступних нерівностей (12) з необхідністю впливає зростання хоча б однієї з координат.

Згідно з нерівностями (10) координата p_i зростала. При переході до (11) ця координата очевидно продовжує зростати, а r_i почне спадати. Це неминуче приводить до нерівностей

$$\theta < r_i < p_i, \quad (12)$$

з яких, у свою чергу, впливає, що p_i продовжує зростати, а r_i — спадати. Таким чином отримуємо нерівності

$$r_i < \theta < p_i. \quad (13)$$

Останні нерівності викликають початок спадання p_i , а r_i будуть продовжувати спадати. Але ці зміни тривають лише до моменту зміни (13) на нерівності (8).

Таким чином відбувся повний цикл коливання, протягом якого послідовно реалізувалися всі можливі варіанти нерівностей між величинами θ, r_i, p_i .

Варто зазначити, що послідовність взаємопереходів між нерівностями (8)–(13) є впорядкованою. В ході змін нерівностей (8)–(13) інколи могли виникнути і рівності, але згідно з формулами (3) ці рівності з необхідністю переходили в нерівності.

Ми встановили наступний важливий факт. Він полягає у тому, що жодна з координат r_i, p_i (як і показник конфліктності) не може прямувати до нуля постійно. Зокрема, як тільки буде виконуватися нерівність (8), координата r_i почне зростати. Взагалі, якщо якась з координат r_i, p_i стає найменшою, вона неминуче починає зростати згідно з формулами (3).

Зауважимо, що для кожної пари координат $r_i, p_i, i = 1, \dots, n$, кожна з нерівностей (8)–(13) виконується в різні моменти часу і їхні взаємопереходи не є синхронними. Тому існування закономірних циклічних коливань для повної системи або прямування до такої поведінки є проблематичним. Ця фаза швидше подібна до квазіхаотичної, як ми її і називаємо.

Ще якоїсь характерної фази поведінки системи не існує. Наприклад, у випадку, коли одна або кілька стартових координат r_i дорівнюють 0, а всі інші координати ненульові, зокрема $p_i \neq 0$, легко бачити, що $p_i^N \rightarrow 0$, а решта ненульових координат коливається згідно з ситуацією, яка охоплюється третьою типовою фазою поведінки. Таким чином, початкова система переходить у систему з меншою кількістю координат, але нова фаза поведінки не виникає.

Наступна лема показує, що рівноважний стан (4) не є одноточковим аттрактором. Це завершує доведення теореми.

Лема 1. Відхилення динамічної системи (1) від рівноважного стану (1)

$$p_i = 1/n \rightarrow p_{i,\varepsilon} = 1/n + \varepsilon_i, \quad r_i = 1/n \rightarrow r_{i,\delta} = 1/n + \delta_i, \quad \sum_i \varepsilon_i = 0, \quad \sum_i \delta_i = 0$$

автоматично приводить до ще більших відхилень принаймні деяких координат:

$$\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i > \varepsilon_i, \quad \delta_i \rightarrow \delta'_i > \delta_i.$$

Доведення не є тривіальним і ґрунтується на аналізі змін значень координат $p_i^N = r_i^N$ в залежності від заданого відхилення від рівноважного стану. Використання конфліктної композиції (формули (3)) показує, що лінійна частина (по ε_i, δ_i) відхилення довільної координати змінюється згідно з формулами

$$\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i = \varepsilon_i + 1/(n+1)\delta_i, \quad \delta_i \rightarrow \delta'_i = \delta_i - 1/(n-1)\varepsilon_i.$$

Ці формули визначаються матрицею t з елементами $t_{11} = t_{22} = 1, t_{12} = 1/(n-1), t_{21} = -1/(n-1)$, яка не залежить від заданого відхилення і є строго додатно визначеною. Тому ітерація формул (3) приводить до відхилень, які не прямують до нуля при $N \rightarrow \infty$, в чому легко переконатися безпосередньо.

Лему 1 доведено.

Проведені вище міркування доводять, що в загальному випадку для цієї системи існують нескінченні коливання всіх її координат. Чи можуть ці коливання бути циклічними? Тобто чи існують точні цикли із скінченною кількістю кроків? Теоретично це можливо при певних співвідношеннях між значеннями координат, але поки що існування точних циклів у моделі „плюс – мінус” є відкритим питанням.

Комп’ютерне моделювання також підтверджує, що рівноважна точка не є притягальною (атрактором).

Аналогічні характерні властивості поведінки має динамічна система з двосторонньою конфліктною взаємодією між біологічним видом та інфекційним (вірусним) середовищем, „мінус – плюс” модель. Якщо ввести вектор початкового статистичного розподілу інфекції по регіонах Ω_i

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_i, \dots, q_n), \quad q_i := \frac{Q_i}{Q},$$

де $Q = Q_1 + \dots + Q_n$, то еволюція змін координат p_i^N, q_i^N (при умові $Q = \text{const}$ та відсутності впливу з боку ресурсної субстанції \mathbf{R}) визначається ітеративно наступними формулами, аналогічними до (3):

$$p_i^{N+1} = \frac{p_i^N(1 - q_i^N)}{z_{p,q}^N}, \quad q_i^{N+1} = \frac{q_i^N(1 + p_i^N)}{z_{q,p}^N}, \quad (14)$$

де нормуючі знаменники $z_{p,q}^N = 1 - (\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N)$, $z_{q,p}^N = 1 + (\mathbf{q}^N, \mathbf{p}^N)$ визначаються так, щоб забезпечити стохастичність векторів $\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N$. Тепер різні знаки в чисельниках формул (14) мають наступну інтерпретацію: мінус — зменшення популяції в певному регіоні внаслідок інфекційного зараження, плюс — збільшення концентрації інфекції в регіонах із більшими локальними популяціями біологічного виду. Формально популяція в усіх регіонах нібито зменшується, а концентрація вірусу зростає, хоча швидкість такого зростання зменшується внаслідок зменшення популяції. Але насправді це не відбувається, бо нормуючий знаменник $z_{q,p}^N$ математично відповідає ефекту природної дисипації для бактерій, а знаменник $z_{p,q}^N$ у першій формулі, навпаки, виконує роль неперервного приросту біологічної популяції, точніше її незнищенності. Явні формули кількісних змін цих субстанцій по регіонах визначаються формулами (19), але вже в умовах потрійної конфліктної взаємодії.

Проведений вище аналіз парної двосторонньої „плюс – мінус” взаємодії показує, що і зараз в „мінус – плюс” моделі в загальному випадку (коли всі стартові координати різні і відмінні від нуля) поведінка системи буде мати коливний характер без явної закономірності. Зокрема, координата p_i^N буде зростати, якщо концентрація інфекції q_i^N менша за показник конфліктності системи $\theta^N = (\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N)$. Але нерівність $q_i^N < \theta^N$ не може виконуватись одночасно в усіх регіонах. Тому будуть існувати інші координати $p_{k \neq i}^N$, які неминуче будуть спадати. З часом ці тенденції змінюються, причому не синхронно по різних регіонах. Для якісного передбачення в конкретних ситуаціях треба ввести додаткові параметри і досліджувати модель у практичному режимі. В загальній ситуації спостерігаємо описане в теоремі 1 квазіхаотичне коливання усіх величин $\theta^N, p_i^N, q_i^N, i = 1, \dots, n$, при $N \rightarrow \infty$.

Розглянемо тепер „мінус – мінус” модель. Її можна інтерпретувати як ситуацію, що відповідає двосторонній конфліктній взаємодії між парою „інфекція – антидот”. Це чисто

альтернативна боротьба типу „або–або”, яка описує тенденцію витіснення супротивниками один одного в кожному регіоні. Математичні формули конфліктної взаємодії для стохастичних векторів \mathbf{r} , \mathbf{q} у цьому випадку мають вигляд

$$q_i^{N+1} = \frac{q_i^N(1-r_i^N)}{z^N}, \quad r_i^{N+1} = \frac{r_i^N(1-q_i^N)}{z^N}, \quad (15)$$

де нормуючий знаменник $z^N = 1 - \theta^N$, $\theta^N = (\mathbf{q}^N, \mathbf{r}^N)$. Знак мінус у чисельниках обох формул означає альтернативність (повну непримиренність) субстанцій. Але нормування на одиницю векторів \mathbf{q}^{N+1} , \mathbf{r}^{N+1} на кожному кроці конфліктної взаємодії означає незнищенність цих опонентів. Інтуїтивно можна здогадатись, що альтернативні субстанції, відштовхуючись, просто розподіляться по різних регіонах. Це дійсно так. Точний характер поведінки описано в наступній теоремі.

Теорема 2 („мінус–мінус” модель). *Припустимо, що для заданої пари стохастичних векторів \mathbf{q} , $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$, $n > 1$, у початковий момент часу показник конфліктності $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{r})$ задовольняє умову*

$$0 < \theta < 1.$$

Тоді визначена формулами (15) траєкторія динамічної системи конфлікту

$$\{\mathbf{q}^N, \mathbf{r}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{q}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}\}, \quad \mathbf{q}^0 = \mathbf{q}, \quad \mathbf{r}^0 = \mathbf{r}, \quad N = 0, 1, \dots,$$

з необхідністю збігається до нерухомої граничної точки

$$\mathbf{q}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{q}^N, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{r}^N.$$

Граничні вектори \mathbf{q}^∞ , \mathbf{r}^∞ є інваріантними відносно дії конфліктної композиції

$$\mathbf{q}^\infty = \mathbf{q}^\infty * \mathbf{r}^\infty, \quad \mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}^\infty * \mathbf{q}^\infty. \quad (16)$$

При цьому граничні вектори ортогональні,

$$\mathbf{q}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty, \quad (17)$$

якщо $\mathbf{q} \neq \mathbf{r}$, та тотожні, $\mathbf{q}^\infty = \mathbf{r}^\infty$, якщо початкові вектори рівні, $\mathbf{q} = \mathbf{r}$. В останньому випадку (рівноважний стан) координати граничних векторів рівномірно розподілені: $q_i^\infty = r_i^\infty = 1/m$ для усіх i таких, що $q_i = r_i \neq 0$, де $m \leq n$ позначає число ненульових координат початкових векторів.

Повне доведення цієї теореми можна знайти в роботах [4, 5].

Зауважимо, що в роботі [8] формули (15) використовуються як деякі варіанти векторних різницевих аналогів відомих рівнянь Лотки–Вольтерра з неперервним часом. У цій роботі ми використовуємо дискретний час, оскільки вважаємо фізичну неперервність неіснуючою, а математичну неперервність — лише зручним інструментом теорії. Але варто навести аналоги формул (3), (14) та (15) з неперервним часом. Наведемо дві формули, які є неперервними аналогами основних формул:

$$\dot{p}(x, t) = \frac{p(\theta + r)}{m_{p,r} + \theta}, \quad \dot{r}(x, t) = \frac{r(\theta - p)}{m_{p,r} - \theta},$$

де $p = p(x, t)$, $r = r(x, t)$ позначають щільності розподілів відповідних субстанцій у точці $x \in \Omega$ в момент неперервного часу t , $m_{p,r} = P R$, $\theta(t) := \int_{\Omega} p(x, t) r(x, t) dx$.

3. Конфліктна тріада. Динамічну систему конфліктної тріади, що описує еволюцію одночасно взаємодіючих субстанцій \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} , символічно записуємо у вигляді

$$\{\mathbf{P}^N, \mathbf{R}^N, \mathbf{Q}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{P}^{N+1}, \mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{Q}^{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

де $*$ — композиція конфлікту, що визначена нижче формулами (19), (20). Ми припускаємо, що субстанції \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} мають спільний простір існування Ω , який природним чином розкладено на окремі регіони, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, $n \geq 2$. Конфліктна тріада є складною системою в тому сенсі, що кожна з трьох субстанцій має внутрішню структуру:

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n), \quad \mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n),$$

елементи якої $P_i, R_i, Q_i, i = 1, \dots, n$, визначають кількісну характеристику початкового, при $N = 0$, розподілу субстанцій по регіонах простору існування.

Субстанції конфліктної тріади мають різну фізичну природу. Тому конкретні формули взаємодії кожної субстанції із доповнюючою парою, тобто \mathbf{P} з парою $\{\mathbf{R}, \mathbf{Q}\}$, \mathbf{R} з $\{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\}$ та \mathbf{Q} з $\{\mathbf{P}, \mathbf{R}\}$, є відмінними одна від одної. Увесь механізм взаємодії, який міститься в композиції конфлікту $*$, розкладено на дві частини: формули (19) — алгоритм кількісних змін величин P_i, R_i, Q_i по регіонах Ω_i та (20) — статистичний закон перерозподілу ймовірностей „окупації” субстанціями \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} кожного з регіонів.

Еволюцію кількісних регіональних змін визначаємо рівняннями

$$P_i^{N+1} = \frac{P_i^N + d_1(R_i^N - Q_i^N)}{Z_P^N},$$

$$R_i^{N+1} = \frac{R_i^N + d_3^{-1} Q_i^N / P_i^N}{Z_R^N}, \quad (19)$$

$$Q_i^{N+1} = \frac{Q_i^N + d_2(R_i^N - Q_i^N)}{Z_Q^N}, \quad P_i^0 = P_i, \quad R_i^0 = R_i, \quad Q_i^0 = Q_i, \quad N = 0, 1, \dots,$$

де параметри $d_1, d_2, d_3 > 0$ характеризують залежну від конкретної моделі швидкість змін субстанцій \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} внаслідок природних взаємозалежностей між ними. Нормуючі знаменники Z_P^N, Z_Q^N, Z_R^N стабілізують глобальну кількість відповідної субстанції в усьому просторі Ω , вони можуть додатково залежати від часу внаслідок зовнішніх обставин. Тут задля спрощення вважаємо, що глобальна сумарна кількісна характеристика кожної із субстанцій є незмінною, і покладаємо

$$Z_P^N = P = \sum_i^n P_i, \quad Z_Q^N = Q = \sum_i^n Q_i, \quad Z_R^N = R = \sum_i^n R_i, \quad N = 0, 1, \dots$$

Формули (19) ми інтерпретуємо таким чином. На кожному кроці конфліктної боротьби зростання кількості біологічного виду в i -му регіоні P_i^{N+1} безпосередньо залежить від

його кількості P_i^N у попередній момент N і пропорційне, з деяким коефіцієнтом, різниці між величиною (позитивного) життєвого ресурсу R_i^N та дією (негативного) фактора загрозам знищення Q_i^N . Може статися, що ця різниця має в деякий момент часу N від'ємне значення. Тоді P_i^N буде досить швидко зменшуватися. Але для того, щоб система не „розвалилася”, тобто щоб жодна з координат P_i^N, Q_i^N, R_i^N не набула від'ємного значення, такий період розвитку повинен бути недовгим. Аналогічно інтерпретуємо залежність Q_i^N від цієї ж різниці, але з іншим коефіцієнтом пропорційності. У свою чергу кількісна зміна життєвого ресурсу R_i^N є дуже чутливою до відносної щільності загрози існуванню біологічної популяції Q_i^N/P_i^N (значення величини $1/d_3$ в розглянутих далі прикладах є досить великим). Зазначимо, що згідно з чисельниками формул (19) усі координати формально зростають. Але насправді згідно з нормуючими знаменниками ці формули містять сти-скаючу „дисипацію” кількості кожної із конфліктуючих субстанцій. Це автоматично забезпечує зменшення усіх величин P_i, R_i, Q_i на кожному кроці конфліктної боротьби. Звичайно, конкретний характер описаних залежностей (зокрема, ролі параметрів взаємодії) та їх фізична інтерпретація визначаються відповідно до реальної моделі дослідження.

Друга частина механізму конфліктної взаємодії * має міжрегіональний чисто ймовірнісний (статистичний) характер. Для її математичного задання необхідно перейти до нормованих на одиницю векторів

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n),$$

де координати

$$p_i := P_i/P, \quad r_i = R_i/R, \quad q_i := Q_i/Q, \quad i = 1, \dots, n,$$

мають сенс імовірностей знайти відповідну субстанцію \mathbf{P} , \mathbf{R} чи \mathbf{Q} в i -му регіоні (або ймовірність „окупації” регіону Ω_i відповідною субстанцією). Закон перерозподілу цих імовірностей визначається наступними формулами, які є статистичними аналогами різницевих варіантів рівнянь Лотки – Вольтерра [16, 17] (пор. з [5]):

$$p_i^{N+1} = \frac{p_i^N (1 + a(r_i^N - q_i^N))}{z_p^N},$$

$$r_i^{N+1} = \frac{r_i^N (1 - cp_i^N - bq_i^N)}{z_r^N}, \quad (20)$$

$$q_i^{N+1} = \frac{q_i^N (1 + c^{-1}p_i^N - br_i^N)}{z_q^N}, \quad p_i^0 = p_i, \quad r_i^0 = r_i, \quad q_i^0 = q_i, \quad N = 0, 1, \dots,$$

де параметри $a, b, c > 0$ характеризують інтенсивність конфліктної взаємодії.

Перша з цих формул показує, що статистично популяція субстанції \mathbf{P} максимально перерозподіляється в той регіон, де є найбільша ймовірність знайти життєвий ресурс та мінімальна загроза існуванню. Згідно з другою формулою ймовірність знайти життєвий ресурс \mathbf{R} зменшується в тих регіонах, де зростає популяція \mathbf{P} (бо вона використовує життєвий ресурс), а також там, де велика концентрація інфекції \mathbf{Q} (нагадаємо, що субстанції

Q та R є взаємно альтернативними, субстанцію Q можна трактувати як від'ємний протилежний до R ресурс). Нарешті, згідно з третьою формулою в (20) імовірність небезпеки (інфекції) для існування популяції в i -му регіоні збільшується разом із зростанням самої популяції та зменшується в залежності від наявності позитивного життєвого ресурсу. Знаменники в формулах (20) забезпечують стохастичність векторів $\mathbf{p}^N = (p_1^N, \dots, p_n^N)$, $\mathbf{r}^N = (r_1^N, \dots, r_n^N)$, $\mathbf{q}^N = (q_1^N, \dots, q_n^N)$, $N = 1, 2, \dots$.

Для завершення визначення композиції конфлікту * необхідно ренормувати вектори \mathbf{p}^{N+1} , \mathbf{r}^{N+1} , \mathbf{q}^{N+1} , координати яких задано формулами (20). Це означає перехід до остаточних кількісних значень субстанцій P , Q та R на кожному $(N + 1)$ -му кроці в i -му регіоні:

$$P_i^{N+1} = p_i^{N+1} P, \quad Q_i^{N+1} = q_i^{N+1} Q, \quad R_i^{N+1} = r_i^{N+1} R. \quad (21)$$

Таким чином, композиція конфлікту *, яка породжує динамічну систему конфліктної тріади (18), повністю визначається формулами (19)–(21).

У цій роботі зроблено лише перший крок та найпростіше комп'ютерне моделювання динамічної системи конфліктної тріади, що виявило ряд цікавих властивостей та закономірностей тріади, притаманних складним системам. Зокрема, встановлено існування нерухомої точки, яка є атрактором, існування стабільних граничних станів, наявність циклічних атракторів, критичних біфуркаційних точок, коливної (міграційної) поведінки, з одного боку, близької до періодичної, а з іншого — майже хаотичної (квазіхаотичної). Без сумніву, подальше дослідження приведе до встановлення значно глибших результатів, а також до корисних застосувань.

3.1. Комп'ютерні моделі. Стан динамічної рівноваги. З формул (19)–(21) видно, що динамічна система конфліктної тріади є досить складною. Тому питання про існування стану тріади, в якому всі три субстанції врівноважені, не має очевидної відповіді. У фізичній реальності для складних систем такі стани, як правило, існують. Мова йде про динамічну рівновагу у складних процесах з кількома суперечливими тенденціями, коли різні альтернативні субстанції співіснують у досить фіксованих (відмінних від нуля) кількостях. Зазначимо, що наявність таких станів не впливає безпосередньо з теорем 1 та 2, де такі стани існують. Але можна припускати можливість гальмування коливань, притаманних моделям з двосторонньою „плюс – мінус” взаємодією, завдяки стабілізації внаслідок існування граничних компромісних розподілів, встановлених у теоремі 2 для „мінус – мінус” моделей.

Теорема 3. Для динамічної системи конфліктної тріади (18), визначеної формулами (19)–(21), існує стан динамічної рівноваги. Такий стан визначається нерухомою точкою з координатами P_i^{eq} , R_i^{eq} , Q_i^{eq} , $i = 1, \dots, n$, які дорівнюють середньоарифметичним значенням початкових розподілів субстанцій P , R , Q по регіонах Ω_i .

Доведення. Оскільки за припущенням $P = \text{const}$, $R = \text{const}$, $Q = \text{const}$, то координати кожного вектора не можуть збільшитись або зменшитись усі одночасно. Отже, якщо припустити, що хоча б одна з координат змінюється, наприклад збільшується, то з необхідністю повинна існувати ще хоча б одна координата, яка буде зменшуватись. Але це неможливо, тому що згідно з формулами (19)–(21) усі координати рівноправні. Це впливає з симетричності цих формул відносно перестановок індексів координат. Тому

стан, при якому

$$P_i^{\text{eq}} = 1/n \sum_{k=1}^n P_k, \quad R_i^{\text{eq}} = 1/n \sum_{k=1}^n R_k, \quad Q_i^{\text{eq}} = 1/n \sum_{k=1}^n Q_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (22)$$

є нерухомим.

Теорему доведено.

Теорема 3 має комп'ютерне підтвердження. Якщо для довільної конкретної моделі стартові координати P_i, R_i, Q_i кожного вектора P, R, Q покласти рівними середньоарифметичним значенням $P_i^{\text{eq}}, R_i^{\text{eq}}, Q_i^{\text{eq}}$, то вони не змінюються (є сталими) при довільному $N \geq 1$. Тобто такий стан системи буде нерухомим. Це означає, що система (18) перебуває у стані динамічної рівноваги.

3.2. Стан динамічної рівноваги є односточковим аттрактором. Наступний результат ми формулюємо у вигляді теореми, хоча поки що не маємо формально математичного доведення.

Теорема 4. Рівноважний стан динамічної системи конфліктної тріади (18), який визначається середньоарифметичними значеннями координат $P_i^{\text{eq}}, R_i^{\text{eq}}, Q_i^{\text{eq}}, i = 1, \dots, n$ (див. (22)), є односточковим аттрактором.

Цей результат ми ілюструємо комп'ютерною моделлю.

Приклад 1. Зафіксуємо конкретне число регіонів (= числу координат), покладемо $n = 4$. Виберемо наступні значення параметрів у формулах (19), (20):

$$d_1 = d_3 = 0,09, \quad d_2 = 0,01, \quad a = 0,1, \quad b = 0,6, \quad c = 0,1.$$

Зауважимо, що ці значення підбрано „вручну”. При їх довільній заміні модель може „розвалитися” (тобто можуть з'явитися координати з нескінченними або від'ємними значеннями).

Нехай популяція біологічного виду в початковий момент часу має наступний кількісний розподіл по регіонах:

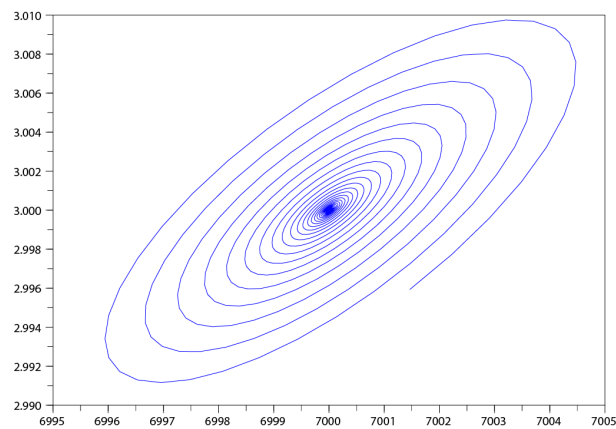
$$P_1 = 9000, \quad P_2 = 5000, \quad P_3 = 2000, \quad P_4 = 12000.$$

Розподіли для життєвого ресурсу та інфекції зафіксуємо на порядки нижчими:

$$R_1 = 30, \quad R_2 = 80, \quad R_3 = 50, \quad R_4 = 10, \quad Q_1 = 5, \quad Q_2 = 1, \quad Q_3 = 2, \quad Q_4 = 4.$$

Аналіз цієї комп'ютерної моделі підтверджує теорему 4. Ми досліджуємо поведінку кожної з координат до кроку $N = 2000$. Ця поведінка має наступний характер. При $N \rightarrow 2000$ кожна з координат для всіх трьох векторів збігається до фіксованих значень. У фазових просторах одержуємо спіралі, які скручуються до точки, що відповідає рівноважному стану і має координати $P_i^{\text{eq}}, R_i^{\text{eq}}, Q_i^{\text{eq}}, i = 1, \dots, n$, які дорівнюють середньоарифметичним значенням початкових координат.

При цьому у фазових просторах (P_i^N, R_i^N) та (P_i^N, Q_i^N) одержуємо спіралі, які скручуються у протилежних напрямках до нерухомих стабільних точок $(7000; 42, 5)$ та $(7000; 3)$

Рис. 1. Стабільна точка у фазовому просторі (P_1^N, Q_1^N) .

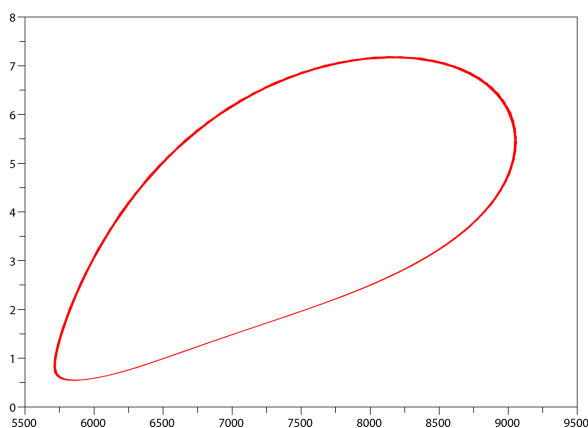
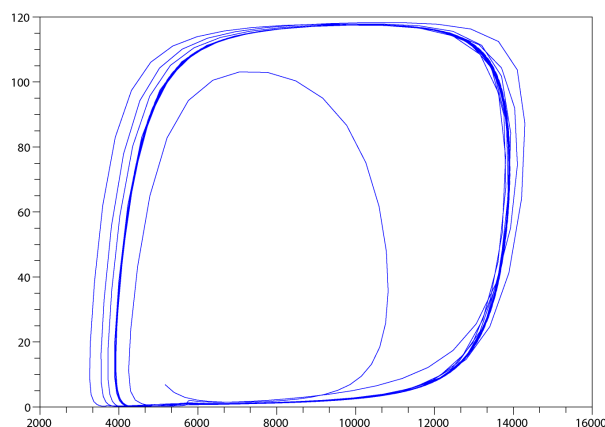
відповідно (рис. 1). Зазначимо, що конкретні значення координат P_i^N , R_i^N та Q_i^N досить довго коливаються. Вони одночасно збігаються до фіксованих величин $P_i^\infty = 7000$, $R_i^\infty = 42,5$ та $Q_i^\infty = 3$ (які є точними середніми значеннями розподілів відповідних субстанцій по регіонах) на 2000-му кроці.

Численні приклади, зокрема варіації значень початкових координат, а також різні модифікації цієї моделі, демонструють достатню стійкість рівноважного стану. Отже, без сумніву, стан конфліктної тріади, який визначений середньоарифметичними значеннями координат, є притягальним для всіх близьких до цього стану траєкторій системи. Тобто відповідна точка є локальним аттрактором. Зазначимо, що навіть досить великі зміни координат вектора біологічної популяції, наприклад заміна $P_1 = 9000$ на $P_1 = 900$, не знищують ефекту притягання до точки рівноважного стану. Усе це підтверджує, що рівноважний стан є локально стійким точковим аттрактором.

3.3. Циклічні аттрактори. Рівноважний стан з попереднього прикладу (локально стабільна нерухома точка) не є глобальним аттрактором. Зокрема, цей стан втрачає свою стійкість при достатньо великій заміні значення навіть однієї з координат вектора, що відповідає інфекції. Звичайно, невеликі варіації будь-яких координат не виводять систему з фази притягання до рівноважного стану. Але, наприклад, зміна $Q_2 = 1$ на $Q_2 = 4$ переводить усю систему в іншу фазу поведінки — у фазу тяжіння до циклічного аттрактора. При такій зміні усі початкові координати притягуються не до фіксованої нерухомої точки (рівноважного стану), а до певного циклічного аттрактора. Докладніше це спостереження аналізується в наступному прикладі.

Приклад 2. Втрата стійкості рівноважного стану (стабільної нерухомої точки) може відбутися при зміні початкових координат, і навіть лише однієї.

Зокрема, навіть зміна початкового значення однієї з субстанцій, наприклад заміна $R_2 = 80$ на $R_2 = 40$, приводить до появи циклічних аттракторів у фазових просторах (P_i^N, R_i^N) та (P_i^N, Q_i^N) (рис. 2). При цьому вони досягаються досить швидко, вже на 400-му кроці. Зазначимо, що циклічні коливання координат P_i^N , R_i^N та Q_i^N відбуваються навколо іншої точки, яка зсунута відносно аттрактора, визначеного середньоарифметичними значеннями початкових координат (див. попередній приклад).

Рис. 2. Циклічний аттрактор у фазовому просторі (P_1^N, Q_1^N) .Рис. 3. Квадратний аттрактор у фазовому просторі (P_2^N, Q_2^N) .

Як пояснити цей зсув? Виникають і інші питання. Наприклад, чому лише зменшення повної маси ресурсної субстанції з 170 до 130 також приводить до переходу в іншу фазу? Система вже не притягується до стабільної точки. Еволюція конфліктної тріади стає явно циклічною. Усі траєкторії швидко притягуються до циклічного аттрактора, який має у фазовому просторі яйцеподібну форму, а траєкторії окремих координат коливаються навколо фіксованої точки, яка зсунута відносно початкових середніх значень. Ці питання є відкритими, хоча в роботі [8] ми пропонуємо деяку інтерпретацію цим явищам.

З аналізу інших прикладів видно, що досить велика зміна однієї з координат вектора P також приводить до циклічних коливань відносно зсунутих у бік збільшення початкових середніх значень координат усіх трьох векторів.

Приклад 3. Зміна координат Q_i на порядок у бік збільшення приводить до появи майже квадратичного аттрактора з різкою зміною значень усіх величин у певні моменти часу (див. рис. 3). При цьому Q_i коливається від нуля до максимального абсолютного значен-

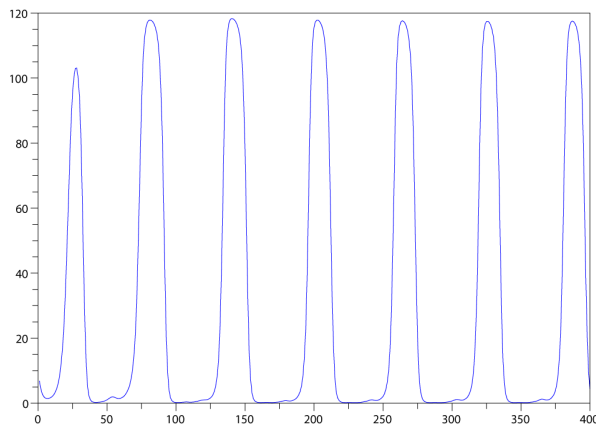


Рис. 4. Коливання вірусу Q_2^N , що відповідають моделі на рис. 3.

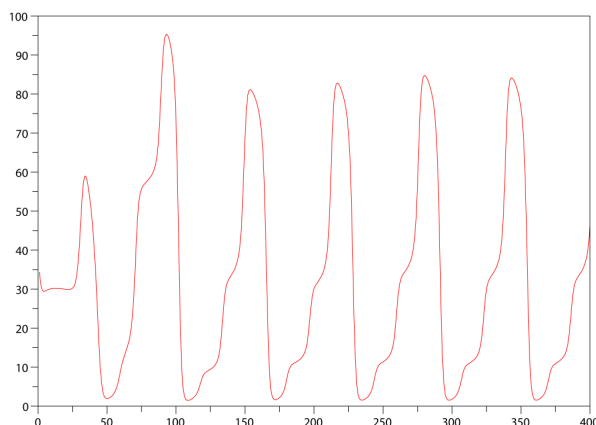


Рис. 5. Коливання ресурсу при $Q_2^1 = 100$.

ня 120 (рис. 4). Але заміна $Q_2 = 10$ на $Q_2 = 100$ приводить до збільшення амплітуди цих коливань аж до 200, хоча координати ресурсного вектора R_i^N мають періодичні коливання без досягнення абсолютного максимуму.

Ці спостереження підтверджують цікавий практичний ефект. Субстанція, яка відповідає негативним загрозам (інфекціям), має великий вплив на поведінку біологічної популяції. Так, відносно невелике збільшення початкових значень координат Q_i істотно збільшує негативний ефект на інші субстанції, причому зростання загроз існуванню „тисне” не лише на біологічну популяцію, а і на ресурсне середовище, зокрема унеможливорює досягнення ними своїх максимальних значень (рис. 5).

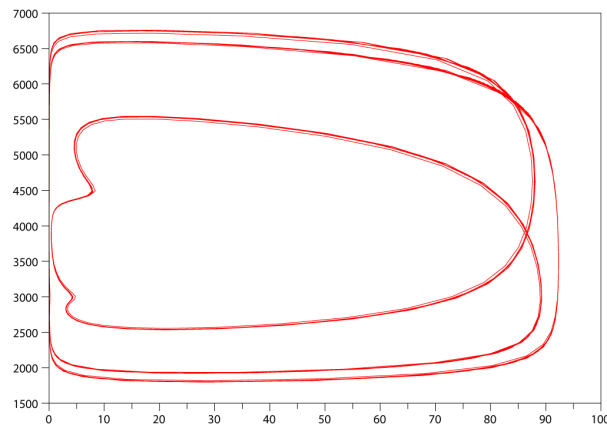


Рис. 6. Складний аттрактор у фазовому просторі (P_4^N, Q_4^N) , тут $d_1 = 0,001$, $d_2 = 0,000001$, $d_3 = 0,0012$, $a = 0,1$, $b = 0,6$, $c = 0,1$, $P_1 = 9000$, $P_2 = 5000$, $P_3 = 2000$, $P_4 = 5$, $Q_1 = 50$, $Q_2 = 2$, $Q_3 = 1$, $Q_4 = 40$, $R_1 = 30$, $R_2 = 40$, $R_3 = 50$, $R_4 = 10$.

3.4. Періодичні коливання циклічних аттракторів. Це явище виникає при деякому збільшенні параметрів взаємодії d_1 , d_2 , d_3 . При цьому на рис. 5 є декілька циклів, що накладаються один на один. Згадані цикли мають різні за довжиною періоди. Траєкторії координат притягуються у певній послідовності до одного з циклічних аттракторів, але лише на певний час. Ми називаємо це явище коливанням аттракторів. Зазначимо, що саме така поведінка складної динамічної системи часто зустрічається в практичних ситуаціях, наприклад в картинах динаміки різних епідемій.

Атрактори можуть набувати не лише яйцеподібної форми, а і значно більш складних геометричних форм (рис. 6). Зокрема, аттрактор, подібний до циклу Карно, що описує поведінку пари „вірус – ресурс” (рис. 7), має аналогію з роботою агрегату, який споживає певний ресурс, але при цьому зазнає опір певного „негативу”

3.5. Квазіхаотична поведінка. На моделі, зображеній на рис. 6, спостерігаємо розбалансованість динамік біологічної популяції та інфекції в четвертому регіоні, що призводить до квазіхаотичної поведінки системи.

Це також свідчить про наявність точок біфуркації в певних зонах поведінки динамічної системи. Якщо початкові значення координат системи проходять цю точку, поведінка системи радикально змінюється. Зокрема, стабілізація (рівноважний стан) вже не може бути досягнута. Тут можна провести аналогію з хронічним захворюванням, яке заліковується, але не виліковується. Воно періодично посилюється в організмі, який пройшов поріг і знаходиться в зоні біфуркацій. Повернутись в стан притягання до стабільної точки рівноваги без зовнішнього впливу неможливо (рис. 8).

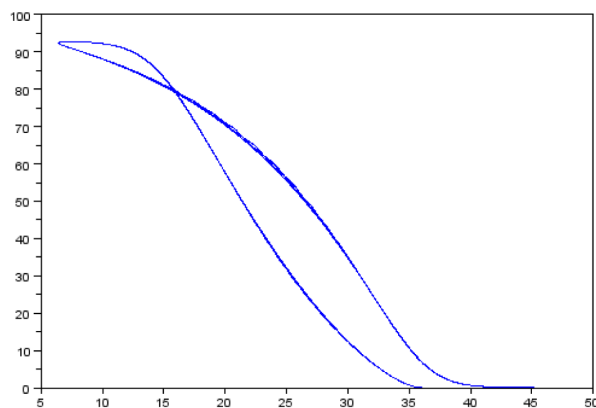


Рис. 7. Цикл типу Карно у фазовому просторі (R_2^N, Q_2^N) (значення такі, як на рис. 6, крім $d_2 = 0,0001, d_3 = 0,0017$).

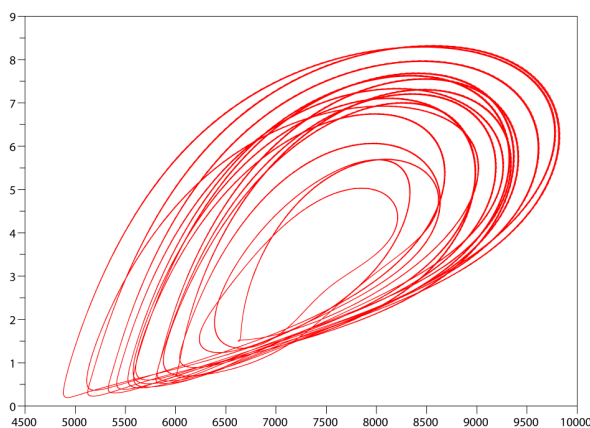


Рис. 8. Атрактор у фазовому просторі (P_1^N, Q_1^N) періодично коливається ($d_1 = 0,95, d_2 = d_3 = 0,01, a = 0,1, b = 0,6, c = 0,1, P_1 = 9000, P_2 = 5000, P_3 = 2000, P_4 = 12000, Q_1 = 5, Q_2 = 1, Q_3 = 2, Q_4 = 4, R_1 = 30, R_2 = 40, R_3 = 50, R_4 = 10$).

4. Висновки. Головний результат роботи полягає в побудові моделей, які демонструють наявність усіх основних фаз співіснування субстанцій типової конфліктної тріади: стану динамічної рівноваги (стабільної, нерухомої точки), фази циклічного атрактора (траєкторії пульсуючої еволюції кожної із субстанцій), зони біфуркацій, яка містить, зокрема, можливість складної поведінки з переходами між каскадом циклічних атракторів, і фази квазіхаотичної поведінки. Усі такі фази співіснування конфліктних субстанцій дуже часто зустрічаються у природі. Так, рівноважний стан (нерухома стабільна точка) є характерним для співіснування різного виду бактерій в живій істоті, коли найнебезпечні-

ші мікроби існують в здоровому організмі, але не перевищують допустимої концентрації і не викликають явних відхилень (звичайна динамічна рівновага). Лише досить значний зовнішній вплив здатен порушити такий стан рівноваги і привести до створення пріоритету якогось типу бактерій, що призводить до симптомів певної хвороби. Інша типова фаза — циклічний атрактор — спостерігається, наприклад, коли сезонні (циклічні) епідемії грипу обумовлені вичерпуванням повноцінних джерел життєвих ресурсів та збільшеною концентрацією (перенаселенням) біологічного виду в окремих регіонах. Ця фаза характерна для багатьох коливальних процесів природи. Звичайно, ці фази, як певні стани динамічних систем конфлікту, виникають в наших моделях лише при певних значеннях параметрів взаємодії. В переважній більшості ситуацій спостерігається складніша, часом практично хаотична поведінка системи. Усе це означає, що розвинений тут підхід і побудовану теорію можна застосувати як інструмент дослідження конкретних конфліктних задач з трьома конфліктуєчими опонентами.

Зокрема, в конкретних реалізаціях наша модель дозволяє визначати ймовірність зараження фіксованого біологічного виду інфекцією в кожному окремому регіоні існування. Нагадаємо, що істотним конструктивним моментом наших побудов є природний поділ усієї території існування Ω на регіони Ω_i , $i = 1, \dots, n$, в кожному з яких відбувається локальний процес конфліктної взаємодії між інфекцією та засобами боротьби з нею на тлі біологічного носія. При цьому повна картина динамічних змін враховує міграційні процеси між регіонами як для біологічного виду, так і для інфекції. По суті модель дає статистичну картину поширення зараження в дискретному часі в залежності від активності протидії в кожному регіоні. Використовуючи таку модель, можна передбачати ризик зараження, періоди відносної безпеки та піки різкого зростання щільності інфекційного зараження (епідемії), а також знаходити регіони відносної стабільності та найбільшого зростання захворювання.

Зазначимо, що можна стежити за величинами R_i^N / P_i^N , Q_i^N / P_i^N , які мають сенс щільностей розподілу позитивного життєвого ресурсу та загроз для існування біологічного виду (наприклад, вірусів або інфекцій) в i -му регіоні. Ці величини мають важливе значення при прийнятті рішень для безпечного існування в фіксованому регіоні. При цьому похибка невизначеності таких рішень залежить від діапазону змін параметрів d_1 , d_2 , d_3 , a , b , c , які контролюються зовнішніми до системи факторами.

Ми сподіваємося, що запропоновану динамічну модель конфліктної взаємодії трьох природних стихій можна використати як зручний інструмент для практичних передбачень. Серед важливих динамічних параметрів відзначимо такі: швидкість розмноження носія інфекції, щільність та локальну концентрацію в початковий момент часу, коефіцієнт міграції між регіонами.

1. Jones A. J. Game theory: mathematical models of conflict // Math. and its App. — New York etc., 1980.
2. Owen G. Game theory. — Third edition. — San Diego, CA: Acad. Press, Inc., 1995.
3. Sigmund K. The population dynamics of conflict and cooperation // Doc. Math. J. DMV. — 1998. — **1**. — P. 487–506.
4. Koshmanenko V. On the conflict theorem for a pair of stochastic vectors // Ukr. Math. J. — 2003. — **55**, № 4. — P. 555–560.
5. Koshmanenko V. The theorem of conflict for probability measures // Math. Methods Operat. Research. — 2004. — **59**, № 2. — P. 303–313.

6. *Koshmanenko V.D., Kharchenko N.V.* Invariant points of dynamical conflict system in the space of piecewise uniformly distributed measures // *Ukr. Math. J.* — 2004. — **56**, № 7. — P. 927–938.
7. *Bodnarchuk M.V., Koshmanenko V.D., Kharchenko N.V.* Properties of limit states of dynamical conflict system // *Nonlinear Oscillations.* — 2004. — **7**, № 4. — P. 446–461.
8. *Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict interaction between two complex systems: Cyclic migration // *J. Interdisciplinary Math.* — 2008. — **11**, № 2. — P. 163–185.
9. *Albeverio S., Bodnarchuk M., Koshmanenko V.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents // *MFAT.* — 2005. — **11**, № 4. — P. 309–319.
10. *Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Самоїленко І. В.* Динаміка взаємодії конфлікту між системами з внутрішньою структурою // *Нелінійні коливання.* — 2006. — **9**, № 4. — P. 435–450.
11. *Bandyopadhyay M., Chattopadhyay J.* Ratio-dependent predator-prey model: effects of environmental fluctuation and stability // *Nonlinearity.* — 2005. — № 18. — P. 913–936.
12. *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Spectral properties of image measures after conflict interactions // *Theory Stochast. Processes.* — 2004. — **10(26)**, № 3–4. — P. 73–81.
13. *Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict dynamics of natural triad // *Int. Conf. „Problems of Decision Making under Uncertainties”* — Kyiv; Rivne, Ukraine, 2008. — P. 25–26.
14. *Kuang Y.* Basic properties of mathematical population models // *J. Biomath.* — 2002. — № 17. — P. 129–142.
15. *Lonzonn Y., Solomon S., Goldenberg J., Mazarsky D.* World-size global markets lead to economic instability // *Acrificial Life.* — 2003. — P. 357–370.
16. *Hofbauer J., Sigmund K.* The theory of evolution and dynamical systems. — Cambridge Univ. Press, 1988.
17. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. — Cambridge Univ. Press, 1998.
18. *Salam K. MD. M., Takahashi K. I.* Mathematical model of conflict and cooperation with non-annihilating multi-opponent // *J. Interdisciplinary Math.* — 2006. — **9**, № 3. — P. 459–473.
19. *Takahashi K. I., Salam K. MD. M.* Mathematical model of conflict with non-annihilating multi-opponent // *J. Interdisciplinary Math.* — 2006. — **9**, № 3. — P. 459–473.
20. *Kuang Y., Beretta E.* Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system // *J. Math. Biol.* — 1998. — № 36. — P. 389–406.
21. *Murray J. D.* *Mathematical biology I: An Introduction.* — New York: Springer, 2002. — 551 p.
22. *Murray J. D.* *Mathematical biology II. Spatial models and biometrical applications.* — New York: Springer, 2004. — 811 p.

*Одержано 10.07.09,
після доопрацювання — 13.07.10*