УДК 517.54

В. Е. Вьюн

Разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях и для открытых множеств

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

The article is dedicated to the solution of new extremal problems on non-overlapping domains with free poles on a circle and to the extension of some famous results to the case of special classes of open sets.

В геометрической теории функций комплексного переменного экстремальные задачи о неналегающих областях составляют активно развивающееся направление [1–11]. Работа посвящена решению новых эктремальных задач о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности [4, 5, 10]. Получены дальнейшие обобщения и усиления некоторых известных результатов [8, 10].

Сформулируем основные результаты работы. Пусть $\mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, $\partial U = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Пусть всюду ниже n — натуральное число, $n \geqslant 3$. В плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим $2n$-лучевую систему точек $A_{2n} = \{a_k\}_{k=1}^{2n}$ такую, что $\arg a_{2n+1} = 0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_{2n} < 2\pi$, $a_k \in \partial U$ при всех $k = \overline{1, 2n}$. Для каждой $2n$-лучевой системы точек определим набор величин $\alpha_k^*(\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{n}) := \alpha_k^* := (1/\pi)(\arg a_{2k-1} - \arg a_{2k+1})$ при $k = \overline{1,n}$; обозначим $\Lambda_k^* := \{w \in \mathbb{C}\colon \arg a_{2k-1} \leqslant \arg w \leqslant \arg a_{2k+1}\}$ для всех $k = \overline{1,n}$. Пусть $\zeta_k(w)$ — однозначная ветвь функции $\zeta(w) = (e^{-i\arg a_{2k-1}}w)^{1/\alpha_k^*}$, которая реализует однолистное конформное отображение области Λ_k^* на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, причем, $\zeta_k(a_{2k-1}) = -\zeta_k(a_{2k+1}) = 1$, $\zeta_k(a_{2k}) = e^{i\varphi_k}$, $0 < \varphi_k < \pi$ для каждого $k = \overline{1,n}$.

Будем говорить, что открытое множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условию частичного неналегания относительно заданной системы точек $A_{2n} \subset D$, если связные компоненты множества $D\bigcap\Lambda_k^*$, содержащие точки a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}, взаимно не пресекаются, $k = \overline{1,n}$ (см., напр., [11]).

Используемые в дальнейшем определения внутреннего радиуса $r(B,a)$ области B относительно содержащейся в ней точки a, квадратичного дифференциала, обобщенной функции Грина $g_B(z,w)$ области B, конденсатора и связанные с ним понятия его емкости и модуля содержатся, например, в [2–5, 7]. Если B — открытое (не обязательно связное) множество, $a \in B$, $B(a)$ — содержащая точку a связная компонента множества B, то $r(B,a) := r(B(a),a)$.

Пусть множество Δ — объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q_1(w)dw^2 = \frac{(\alpha-1)w^4 - 2(\alpha+1)w^2 + (\alpha-1)}{(w^4-1)^2}dw^2.$$

Во введенных выше обозначениях справедлива следующая

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда каковы бы ни были $2n$-лучевая система точек $A_{2n} = \{a_k\}_{k=1}^{2n}$ такая, что $a_k \in \partial U$ для каждого $k = \overline{1,2n}$, и открытое множество D,*

$A_{2n} \subset D \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющее условию частичного неналегания относительно A_{2n}, имеет место неравенство

$$L \prod_{k=1}^{n} r(D, a_{2k-1}) r^{\alpha}(D, a_{2k}) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k^*\right)^{\alpha+1} \left(\prod_{k=1}^{n} \sin\varphi_k\right)^{\alpha} \{r(\Delta,1) r(\Delta,-1)[r(\Delta,i) r(\Delta,-i)]^{\alpha}\}^{n/2}, \tag{1}$$

где

$$L = \prod_{1\leqslant k<p\leqslant n} \exp 2g_D(a_{2k-1}, a_{2p-1}) \prod_{1\leqslant k\leqslant p\leqslant n} \exp 2\sqrt{\alpha} g_D(a_{2k-1}, a_{2p}) \prod_{1\leqslant k<p\leqslant n} \exp 2\alpha g_D(a_{2k}, a_{2p}).$$

Знак равенства в (1) достигается, когда A_{2n} и D являются, соответственно, множеством полюсов и объединением круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = w^{n-2} \frac{(\alpha-1)w^{2n} - 2(\alpha+1)w^n + (\alpha-1)}{(w^{2n}-1)^2} dw^2.$$

Эта теорема обобщает некоторые результаты о неналегающих областях, установленные в работах [8, 10].

Доказательство следует схеме, предложенной в работах [10, 11] и использует идеи и методы работ [5–7, 9].

Из условий, наложенных на множество D, следует, что множество D обладает функцией Грина $g_D(z,w)$ (вообще говоря, обобщенной).

Пусть $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $E(a_k, \varepsilon) = \{w \in \mathbb{C}\colon |w - a_k| \leqslant \varepsilon\}$, $k = \overline{1, 2n}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Емкость конденсатора $C(\varepsilon)$, определяемого пластинами E_0, $E_1(\varepsilon) := \bigcup\limits_{k=1}^{n} E(a_{2k-1}, \varepsilon)$ и $E_2(\varepsilon) := \bigcup\limits_{k=1}^{n} E(a_{2k}, \varepsilon)$, равна

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon) := \inf \iint \left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right) dxdy,$$

где точная нижняя грань берется по всем вещественным, непрерывным и липшицевым на $\overline{\mathbb{C}}$ функциям ψ таким, что $\psi|_{E_0} = 0$, $\psi|_{E_1(\varepsilon)} = 1$ и $\psi|_{E_2(\varepsilon)} = \sqrt{\alpha}$. Величина $|C(\varepsilon)| := [\operatorname{cap} C(\varepsilon)]^{-1}$ называется модулем конденсатора $C(\varepsilon)$. Следуя работам В. Н. Дубинина (см., напр., [6, 7]), определим разделяющее преобразование конденсатора $C(\varepsilon)$ относительно системы функций $\{\zeta_k(w)\}_{k=1}^{n}$ и системы областей $\{\Lambda_k^*\}_{k=1}^{n}$. Пусть $C_k(\varepsilon) = \{E_0^{(k)}, E_1^{(k)}(\varepsilon), E_2^{(k)}(\varepsilon)\}$, где $E_0^{(k)}$ — объединение образа множества $E_0 \bigcap \overline{\Lambda_k^*}$ при отображении $\zeta_k(w)$ с симметричным ему множеством относительно вещественной оси, $E_s^{(k)}(\varepsilon)$ — объединение образа множества $E_s(\varepsilon) \bigcap \overline{\Lambda_k^*}$ при том же отображении с симметричным ему множеством относительно вещественной оси, $s = 1, 2$, $k = \overline{1, n}$. Тогда (см. [6, 7]) выполняются неравенства

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} C_k(\varepsilon) \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\bigl|C(\varepsilon)\bigr| \leqslant 2 \left(\sum_{k=1}^{n} \bigl|C_k(\varepsilon)\bigr|^{-1}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Применяя теорему 1 из работы [6], получаем асимптотическое равенство

$$\big|C(\varepsilon)\big| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n(1+\alpha)}\log\frac{1}{\varepsilon} + M(D, A_{2n}) + o(1), \qquad \varepsilon\to 0, \tag{4}$$

где $M(D, A_{2n})$ — приведенный модуль множества D относительно системы точек A_{2n}:

$$M(D, A_{2n}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{[n(1+\alpha)]^2}\Bigg(\sum_{k=1}^{n}\log r(D, a_{2k-1})r^{\alpha}(D, a_{2k}) + \sum_{1\leqslant k<p\leqslant n} 2g_D(a_{2k-1}, a_{2p-1}) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant k\leqslant p\leqslant n} 2\sqrt{\alpha}g_D(a_{2k-1}, a_{2p}) + \sum_{1\leqslant k<p\leqslant n} 2\alpha g_D(a_{2k}, a_{2p})\Bigg). \tag{5}$$

Пусть для каждого $k=\overline{1,n}$ объединение связной компоненты множества $\zeta_k(D(a_{2k-1}))$ (аналогично для $\zeta_k(D(a_{2k+1}))$), содержащей точку $\omega_k^{(1)} := \zeta_k(a_{2k-1})$ (соответственно $\omega_k^{(3)} := = \zeta_k(a_{2k+1})$), с образом ее симметричного отражения относительно вещественной оси, обозначим через $\Omega_k^{(1)}$ (соответственно через $\Omega_k^{(3)}$). Далее, объединение связной компоненты множества $\zeta_k(D(a_{2k}))$, содержащей точку $\omega_k^{(2)} := \zeta_k(a_{2k})$, с образом ее симметричного отражения относительно вещественной оси обозначим через $\Omega_k^{(2)}$. Причем, если $D(a_{2k})\bigcap\partial\Lambda_k^*\neq\varnothing$, то $\Omega_k^{(2)}$ — область, содержащая точки $\omega_k^{(2)}$ и $\omega_k^{(4)} := \overline{\omega}_k^{(2)}$; если же $D(a_{2k})\bigcap\partial\Lambda_k^* = \varnothing$, то $\Omega_k^{(2)}$ — открытое множество, состоящее из двух непересекающихся областей $\Phi_k^{(2)}\ni\omega_k^{(2)}$ и $\Phi_k^{(4)}\ni\omega_k^{(4)}$. При каждом $k=\overline{1,n}$ обозначим $G_k = \Omega_k^{(1)}\bigcup\Omega_k^{(2)}\bigcup\Omega_k^{(3)}$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$|\zeta_k(w) - \zeta_k(a_s)| = \frac{1}{\alpha_k^*}|w - a_s| + o(1), \qquad w\to a_s \tag{6}$$

($k=\overline{1,n}$, $s = 2k-1, 2k+1, 2k$). Используя (6) и применяя теорему 1 из работы [6], получаем асимптотические равенства

$$|C_k(\varepsilon)| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2(1+\alpha)}\log\frac{1}{\varepsilon} + M_k(D, A_{2n}) + o(1), \qquad \varepsilon\to 0 \tag{7}$$

($k=\overline{1,n}$), где

$$M_k(D, A_{2n}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{[2(1+\alpha)]^2}\Big\{\log(\alpha_k^*)^{2+2\alpha} r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) r(\Omega_k^{(3)}, \omega_k^{(3)})\times$$

$$\times[r(\Omega_k^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)}) r(\Omega_k^{(2)}, \omega_{k,p}^{(4)})\exp 2g_{G_k}(\omega_k^{(2)}, \omega_k^{(4)})]^{\alpha}\Big\}. \tag{8}$$

Производя необходимые вычисления с учетом (2)–(8), из (3) получаем неравенство

$$M(D, A_{2n}) \leqslant \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{2n})$$

и, следовательно,

$$L\prod_{k=1}^{n} r(D, a_{2k-1}) r^{\alpha}(D, a_{2k}) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k^*\right)^{1+\alpha}\Bigg[\prod_{k=1}^{n} r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) r(\Omega_k^{(3)}, \omega_k^{(3)})\times$$

$$\times r^{\alpha}(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}) r^{\alpha}(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(4)})\exp 2\alpha g_{G_k}(\omega_k^{(2)}, \omega_k^{(4)})\Bigg]^{1/2}.$$

Заметим, что $\zeta_k(a_{2k-1}) = -\zeta_k(a_{2k+1}) = 1$, $\zeta_k(a_{2k}) = e^{i\varphi_k}$, $0 < \varphi_k < \pi$, $k = \overline{1,n}$. В результате конформного автоморфизма $\overline{\mathbb{C}}$ вида $\delta = (\zeta - l)/(1 - \zeta l)$, где l — точка пересечения вещественной оси и неевклидовой геодезической, соединяющей точки $\omega_k^{(2)}$ и $\omega_k^{(4)}$, точки 1, -1, $e^{i\varphi_k}$ преобразуются, соответственно, в точки 1, -1, i, а образ всего множества G_k обозначим $\widehat{G}_k$. При этом, повторяя рассуждения из работы [10], имеем

$$r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) r(\Omega_k^{(3)}, \omega_k^{(3)}) r^{\alpha}(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}) r^{\alpha}(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(4)}) \exp 2\alpha g_{G_k}(\omega_k^{(2)}, \omega_k^{(4)}) \leqslant$$
$$\leqslant r(\Delta, 1) r(\Delta, -1) r^{\alpha}(\Delta, i) r^{\alpha}(\Delta, -i) \sin^{2\alpha} \varphi_k.$$

Отсюда, приходим к неравенству (1). Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1. – (295). – С. 3–76.
6. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1997. – **237**. – С. 56–73.
7. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учебн. пособие. – Владивосток: Изд. Дальневост. ун-та, 2003. – 116 с.
8. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2003. – **302**. – С. 52–67.
9. *Ковалев Л. В.* О трех непересекающихся областях // Дальневост. мат. журн. – 2000. – **1**, № 1. – С. 3–7.
10. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 867–886.
11. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 7–13.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 22.01.2007