

**ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ
З ДОВІЛЬНИМ ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ДНОМ ТА ПРУЖНИМИ
ЕЛЕМЕНТАМИ НА ВІЛЬНІЙ ПОВЕРХНІ РІДИНИ**

Р. І. Богун, В. А. Троценко

*Ин-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: r.bogun@i.ua
trots@imath.kiev.ua*

We consider the problem of eigen oscillations of an ideal fluid in a reservoir that has the form of a right cylinder with an arbitrary axis-symmetrical bottom with the unperturbed free surface of the liquid covered with an elastic membrane or a plate. We use the eigen function decomposition of an additionally introduced spectral problem with a parameter in the boundary-value condition and the method of reservoir meridional cross-section decomposition to find an analytic solution of the problem. We consider particular examples of mechanical systems and, by using the proposed algorithm, find solutions, make an analysis of these solutions, and find frequencies and forms of the oscillations.

Рассматривается задача о свободных колебаниях идеальной жидкости в резервуаре, который имеет форму прямого кругового цилиндра с произвольным осесимметричным дном и упругую мембрану или пластинку, покрывающую невозмущенную свободную поверхность жидкости. С использованием разложения по собственным функциям дополнительно введенной спектральной задачи с параметром в граничном условии и метода раздела области меридионального сечения резервуара найдено аналитическое решение задачи. Рассмотрены конкретные примеры механической системы, для которых по предложенному алгоритму построены решения, проведены их анализ, приведены результаты расчета частот и форм колебаний.

Вступ. Створення резервуарів великої ємності для транспортування та збереження рідини потребує докладного аналізу можливого резонансного збурення хвильових рухів рідини. В якості засобів обмеження рухливості рідини використовують спеціальні мембрани або тонкі пружні пластинки, які покривають вільну незбурену поверхню рідини. Такі пружні елементи можуть бути використані на практиці для вирішення проблеми при збереженні рідини в сейсмонебезпечних районах, транспортуванні рідких вантажів наземним (залізниця, авто), водним(танкери) і повітряним (літаки, ракети) транспортом. При динамічних розрахунках таких гідропружних систем насамперед необхідно знати спектр їх власних коливань.

Дослідженню динаміки рідини у круговому циліндрі і в довгому прямокутному каналі присвячено роботи [1 – 6]. У цих роботах розглядалися заповнені рідиною резервуари, які мають канонічну форму: прямий круговий циліндр, довгий прямокутний горизонтально розміщений канал. Розробці менш чутливих до геометрії резервуара наближених методів розв'язання задач гідропружності присвячено роботи [7 – 9].

У даній роботі розглядається задача гідропружності про зв'язані вільні коливання рідини та пружного елемента у вигляді мембрани або пластинки, причому рідина знаходиться у резервуарі, який має форму прямого кругового циліндра з довільним осесимет-

ричним дном, а пружний елемент розміщено на вільній поверхні рідини і жорстко закріплено на стінках резервуара.

1. Постановка задачі. Розглянемо резервуар, який має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном. Нехай резервуар заповнено ідеальною та нестисливою рідиною на постійну глибину $H = h + h_d$ (h — висота рідини у циліндричній частині посудини, h_d — висота осесиметричного дна). Будемо також вважати, що незбурена вільна поверхня рідини покрита пружною круговою мембраною (пластинкою) радіуса r_0 , жорстко закріпленою по своєму контуру на стінках резервуара, а поле гравітаційних сил паралельне осі симетрії резервуара. Введемо до розгляду циліндричну систему координат $O r \eta z$ таку, що вісь Oz збігається з віссю симетрії резервуара і спрямована вгору (протилежно до вектора земного прискорення). Початок системи координат $O r \eta z$ розмістимо у площині мембрани (пластинки).

Потенціал зміщень рідини $\chi(t, r, \eta, z)$ в області V , зайнятій рідиною, визначається із розв'язку рівняння Лапласа, яке в циліндричних координатах має вигляд

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0, \quad (r, \eta, z) \in V, \quad (1)$$

а на межі області V виконуються умови

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_{S_0} = w, \quad \int_{S_0} w dS = 0, \quad (2)$$

де S і S_0 — змочувана поверхня резервуара і незбурена поверхня пружного елемента відповідно, $\vec{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до межі області V , w — нормальний прогин мембрани в напрямку осі Oz .

Перша гранична умова в (2) — це умова неперетікання рідини через поверхню S , друга умова — умова рівності зміщень рідини та пружного елемента на поверхні їх контакту S_0 , а третю умову отримуємо із умови збереження об'єму нестисливої рідини.

Відповідно до лінійної теорії коливань рух мембрани описується наступним рівнянням, записаним у циліндричних координатах:

$$\rho_0 \delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \Delta w = P(t, r, \eta), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (3)$$

при граничних умовах

$$w(t, r, \eta)|_{r=r_0} = 0, \quad (4)$$

де T — натяг мембрани, t — час, ρ_0 і δ_0 — масова густина матеріалу й товщина мембрани, $P(t, r, \eta)$ — тиск на мембрану з боку рідини.

Тиск $P(t, r, \eta)$ на пружні елементи визначається з точністю до довільної функції часу за допомогою лінеаризованого інтеграла Лагранжа – Коші за формулою

$$P(t, r, \eta) = -\rho \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + gw \right) \Big|_{z=0}, \quad (5)$$

де g — модуль вектора прискорення сил ваги, ρ — масова густина рідини.

Прогин пружної пластинки $w(t, r, \eta)$ в напрямку осі Oz задовольняє такі умови:

$$\rho_0 \delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w = P(t, r, \eta), \quad w(t, r, \eta)|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w(t, r, \eta)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad (6)$$

де $D = \frac{E \delta_0^3}{12(1-\nu^2)}$ — циліндрична жорсткість пластинки, E, ν — модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Співвідношення (1)–(5) разом з початковими умовами на прогин мембрани однозначно визначають взаємозв'язані рухи мембрани і рідини в резервуарі. Осьова симетрія резервуара і вигляд граничних умов крайових задач дозволяють відокремити одну змінну і сформулювати відповідні крайові задачі в площині меридіонального перерізу $Or \frac{\pi}{2} z$ порожнини. Далі будемо досліджувати неосесиметричні вільні коливання механічної системи „мембрана – рідина” („пластинка – рідина”), для яких головний вектор гідродинамічних сил, прикладених до рухомого тіла, відмінний від нуля. У зв'язку з цим, обмежувачись першою модою за кутовою координатою, відокремимо часову t та кутову η координати за формулами

$$\chi(t, r, \eta, z) = \Phi(r, z) \sin \eta \exp(i\omega t), \quad w(t, r, \eta) = W(r) \sin \eta \exp(i\omega t), \quad i = \sqrt{-1}. \quad (7)$$

Для спрощення обчислень перейдемо до безрозмірних величин. Нехай R — характерний лінійний розмір резервуара. Тоді розмірні величини будуть пов'язані з відповідними безрозмірними величинами (які позначено рискою зверху) співвідношеннями

$$(r, z) = (\bar{r}, \bar{z})R, \quad W = \bar{W}R, \quad \Phi = \bar{\Phi}R^2, \quad r_0 = \bar{r}_0R, \quad h = \bar{h}R, \quad (8)$$

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad a = \frac{\rho_0 \delta_0}{\rho R}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\rho g R^2}, \quad \bar{D} = \frac{D}{\rho g R^4}, \quad \delta = \gamma^2 - \varepsilon, \quad \gamma^2 = \frac{a}{\Omega} \lambda^2, \quad \varepsilon = \frac{1}{\Omega},$$

де у випадку розміщення мембрани на вільній поверхні рідини $\Omega = \bar{T}$, а у випадку пластинки — $\Omega = \bar{D}$.

Після застосування формул (7) і переходу до безрозмірних величин за формулами (8) (риски над безрозмірними величинами далі відкинемо) у випадку мембрани на вільній поверхні рідини отримаємо граничну задачу на власні значення

$$\begin{aligned} L[W(r)] + \delta W(r) &= -a^{-1} \gamma^2 \Phi(r, 0), \quad r \in [0, r_0], \\ W(r_0) &= 0, \quad |W(0)| < \infty, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in Q, \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_{L^*} &= 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{L_0} = W(r), \quad \int_{L_0} W(r) ds = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

У випадку розміщення на вільній поверхні рідини абсолютно пружної пластинки задача гідропружності матиме вигляд

$$\begin{aligned}
 -L^2[W(r)] + \delta W(r) &= -a^{-1}\gamma^2\Phi(r, 0), \quad r \in [0, r_0], \\
 W(r_0) = 0, \quad W'(r_0) &= 0, \quad |W(0)| < \infty,
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in Q, \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{L^*} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{L_0} &= W(r), \quad \int_{L_0} W(r) ds = 0.
 \end{aligned}$$

У формулах (9) і (10) введено позначення: Q — меридіональний переріз резервуара, L_0 та L^* — лінії перетину області Q з поверхнею пружного елемента S_0 і змоченою поверхнею S відповідно, а оператор L означено таким чином:

$$L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}.$$

Із задач (9) і (10) видно, що функція $W(r)$ входить до граничної умови на L_0 для функції $\Phi(r, z)$ і разом з цим рівняння для функції $W(r)$ містить функцію $\Phi(r, z)$. Складність розв'язання задач (9) і (10) полягає в описанні взаємозалежності функцій, оскільки при розв'язуванні потрібно виконати одночасне інтегрування рівнянь для функції $W(r)$, заданої на відрізьку $[0; r_0]$, і рівнянь для функції $\Phi(r, z)$, визначеної у двовимірній області Q .

2. Застосування методу розкладу за власними функціями крайової задачі з параметром у граничній умові. Для того щоб звести задачу (9) до однорідної задачі відносно функції $W(r)$, введемо до розгляду задачу на власні значення з параметром у граничній умові, яка в області Q формулюється таким чином:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in Q, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{L^*} = 0, \quad |\varphi(0, z)| < \infty, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \kappa \varphi \right) \Big|_{L_0} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

де $\vec{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до межі області Q , а κ — невідомий безрозмірний параметр.

За фізичним змістом однорідна задача (11) описує вільні коливання ідеальної рідини в резервуарі, що розглядається. При цьому квадрат власної частоти коливань σ^2 пов'язаний з безрозмірним параметром κ співвідношенням

$$\kappa = \frac{\sigma^2 R}{g}. \tag{12}$$

Упорядковані за зростанням власні значення спектральної задачі (11) позначимо через κ_n , відповідні їм власні функції — через $\varphi_n(r, z)$, $n = 1, 2, \dots$. У роботі [10] доведено,

що розв'язки $\varphi_n(r, z)$ утворюють повну систему функцій на межі L_0 області Q , спектр задачі (11) є дискретним і має єдину точку згущення на нескінченності, для цих функцій виконуються такі умови ортогональності:

$$\int_{L_0} r \varphi_i \varphi_j ds = 0, \quad \int_{L_0} r \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu} ds = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (13)$$

Для прямокутної форми меридіонального перерізу Q розв'язок задачі (11) можна побудувати за допомогою методу відокремлення змінних. Якщо область Q не є прямокутною, а має довільну форму, то необхідну кількість власних значень κ_n та відповідних їм функцій φ_n однорідної задачі (11) можна знайти за допомогою варіаційного методу, який запропоновано в роботі [9].

Оскільки область меридіонального перерізу Q , яку розглядаємо в задачі, складається з канонічної та неканонічної підобластей, застосуємо до розв'язання спектральної задачі (11) метод декомпозиції області на підобласті. Суть цього методу полягає в тому, що область ділиться лінією поділу l на підобласті, потім у кожній із новоутворених областей формулюється відповідна крайова задача, кожна з яких розв'язується одним із відомих методів. Ці задачі пов'язані між собою додатковими умовами спряження на лінії поділу областей (про ці умови йтиметься нижче). Розв'язавши ці задачі, отримуємо шуканий розв'язок у цілій області вихідної задачі.

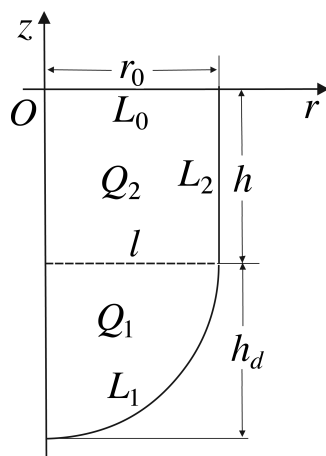


Рис. 1

Область Q поділимо лінією поділу l ($z = -h$) на дві підобласті, які позначимо Q_1 та Q_2 (рис. 1). Перша з областей Q_1 є меридіональним перерізом порожнини осесиметричного дна резервуара, а друга Q_2 (прямокутник) — меридіональним перерізом циліндричної частини резервуара. Межі областей Q_1 та Q_2 , які відповідають твердим стінкам резервуара, позначимо через L_1 та L_2 . В свою чергу, нехай $\varphi^{(1)}(r, z)$ — значення функції $\varphi(r, z)$, яких вона набуває в області Q_1 , а $\varphi^{(2)}(r, z)$ — в області Q_2 . В результаті можна сформулювати дві крайові задачі для функцій $\varphi^{(1)}(r, z)$ і $\varphi^{(2)}(r, z)$ у відповідних областях.

Крім граничних умов, отриманих із умов задачі (11), ці задачі мають додаткові умови спряження на лінії l поділу областей:

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}, \quad \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z} \quad \text{на } l. \quad (14)$$

Виконання умов спряження (14) у загальному випадку приводить до алгебраїчних систем рівнянь, що ускладнює алгоритм побудови функцій $\varphi^{(1)}$ та $\varphi^{(2)}$. Тому далі замість умов спряження (14) будемо використовувати наближену умову, яку вперше запропонував І. О. Луковський [10]:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \varphi \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (15)$$

де μ — деякий невідомий параметр, що залежить від значення z_0 , z_0 — довільне значення координати z в області Q .

Висновок про справедливість співвідношення (15) було зроблено на основі аналізу існуючих наближених розв'язків для ємностей різної геометричної форми, які було знайдено з досить високою точністю. Умова (15) значно спрощує задачу продовження розв'язку спектральної задачі з параметром у граничній умові з однієї області в іншу.

В якості граничної умови на лінії l використаємо умову

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \varphi = 0 \quad \text{на } l. \quad (16)$$

Використавши співвідношення (16), визначимо функції $\varphi^{(1)}$ і $\varphi^{(2)}$, як розв'язки таких крайових задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi^{(1)} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad (r, z) \in Q_1, \\ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \nu} \Big|_{L_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \nu} - \mu \varphi^{(1)} \right) \Big|_{z=-h} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi^{(2)} + \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial z^2} = 0, \quad (r, z) \in Q_2, \\ \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \nu} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \nu} - \mu \varphi^{(2)} \right) \Big|_{z=-h} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \nu} - \kappa \varphi^{(2)} \right) \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Перейдемо до розв'язання задач (17), (18). Першу задачу будемо розв'язувати варіаційним методом, а другу — методом відокремлення змінних. Вибір методів розв'язання було здійснено на основі форми областей Q_1 і Q_2 та особливостей застосування кожного з них.

Для спектральної задачі (17) з параметром у граничній умові сформулюємо еквівалентну варіаційну проблему для квадратичного функціонала:

$$I = \int_{\hat{Q}_1} \left[\left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} (\varphi^{(1)})^2 \right] r dz dr - \mu \int_l r (\varphi^{(1)})^2 ds. \quad (19)$$

Розв'язок варіаційної задачі шукатимемо методом Трефтца, вибравши початок системи координат на лінії l . Для цього у випадку дослідження власних неосесиметричних коливань розглядуваної механічної системи подамо функцію $\varphi^{(1)}(r, z)$ у вигляді розширеного розкладу [9], використання якого при розв'язанні спектральних задач дозволяє підвищити точність та кількість шуканих власних значень μ_n :

$$\varphi^{(1)}(r, z) = \sum_{k=1}^N a_k V_k(r, z) + \sum_{j=p_0}^p c_j \psi_j^{(1)}(r, z). \quad (20)$$

Тут a_k, c_j — довільні сталі, $\{V_k(r, z)\}_{k=1}^N$ — система координатних функцій, побудована на класі розв'язків рівняння (17), елементи якої є непарними функціями координати r і визначаються рекурентними співвідношеннями [10]

$$V_1 = r, \quad V_2 = rz, \quad V_{k+1} = \frac{1}{k+2} ((2k+1)zV_k - (k-1)(r^2+z^2)V_{k-1}), \quad (21)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial r} = \frac{k}{r} V_k - (k-1) \frac{z}{r} V_{k-1}, \quad \frac{\partial V_k}{\partial z} = (k-1) V_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, N,$$

а $\{\psi_j^{(1)}(r, z)\}_{j=1}^p$ — система власних функцій базової задачі.

За базову задачу вибрано спектральну задачу

$$\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \psi^{(1)} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad (r, z) \in \hat{Q}_1, \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} - \tau \psi^{(1)} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-h_d} = 0, \quad |\psi^{(1)}(0, z)| < \infty,$$

де $\hat{Q}_1 = \{(r, z) | 0 \leq r \leq r_0, -h_d \leq z \leq 0\}$.

За фізичним змістом введена базова задача описує неосесиметричні коливання рідини в резервуарі, який має форму прямого кругового циліндра з плоским дном і глибину рідини h_d , яка дорівнює висоті осесиметричного дна. Радіус основи циліндра дорівнює r_0 . Меридіональним перерізом утвореної порожнини є прямокутник висотою h_d та шириною r_0 . Точний розв'язок цієї задачі можна подати у вигляді

$$\psi_j^{(1)}(r, z) = \frac{\text{ch}(k_j(z+h_d))}{k_j J_1(k_j r_0) \text{sh}(k_j h_d)} J_1(k_j r), \quad \tau_j = k_j \text{th}(k_j h_d), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

де k_j — корені рівняння $J_1'(k_j r_0) = 0$, $J_1(r)$ — функція Бесселя 1-го роду 1-го порядку.

Використаємо умову мінімуму функціонала (19) для визначення сталих a_k, c_j із розкладу (20). В результаті цього спектральна задача (17) зводиться до розв'язування алгебраїчної системи однорідних алгебраїчних рівнянь

$$(\mathfrak{A} - \mu \mathfrak{B})\vec{b} = 0, \quad (24)$$

де елементи $\tilde{\alpha}_{ij}$ і $\tilde{\beta}_{ij}$ відповідних симетричних матриць \mathfrak{A} і \mathfrak{B} обчислюються за формулами

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \int_{l \cup L_1} r \tilde{V}_i \frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial \nu} ds, \quad \tilde{\beta}_{ij} = \int_l r \tilde{V}_i \tilde{V}_j ds,$$

а вектор-стовпчик \vec{b} і система координатних функцій $\{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{N_0}$ мають таку структуру:

$$\{b_k\}_{k=1}^{N_0} = \{a_1, a_2, \dots, a_N, c_{p_0}, c_{p_0+1}, \dots, c_p\},$$

$$\{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{N_0} = \{V_1, V_2, \dots, V_N, \psi_{p_0}^{(1)}, \psi_{p_0+1}^{(1)}, \dots, \psi_p^{(1)}\}, \quad N_0 = N + p - p_0 + 1.$$

Приврівнюючи визначник системи (24) до нуля, приходимо до рівняння для знаходження власних значень μ :

$$|\tilde{\alpha}_{ij} - \mu \tilde{\beta}_{ij}| = 0.$$

Як свідчать результати проведених розрахунків, при використанні розкладу (20) на практиці необхідно: кількість N координатних функцій $V_k(r, z)$ у виразі (20) вибирати з умови одержання розв'язку крайової задачі із наперед заданою точністю, число p у другій сумі цього виразу покласти рівним числу розраховуваних форм коливань рідини, при цьому число p_0 вибрати таким чином, щоб при ньому вдалося забезпечити невідродженість матриць алгебраїчної системи (24) і потрібну точність обчислення нижньої частини спектра задачі (17) для $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p_0}$.

Оскільки власні функції $\varphi_n^{(1)}$ і власні значення μ_n спектральної задачі (17) знайдено, то переходимо до розв'язування задачі (18) при заданих граничних умовах. Як зазначено вище, цю задачу можна розв'язати методом відокремлення змінних. В результаті його застосування знаходимо частотний параметр \varkappa_n і відповідну йому форму вільних коливань рідини $\varphi_n^{(2)}(r, z)$:

$$\varphi_n^{(2)}(r, z) = \frac{1}{k_n} \frac{k_n \operatorname{ch}(k_n(z+h)) + \mu_n \operatorname{sh}(k_n(z+h))}{k_n \operatorname{sh}(k_n h) + \mu_n \operatorname{ch}(k_n h)} R_n(r), \quad (25)$$

$$\varkappa_n = k_n \frac{k_n \operatorname{th}(k_n h) + \mu_n}{k_n + \mu_n \operatorname{th}(k_n h)}, \quad R_n(r) = \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n r_0)}, \quad (26)$$

де k_n — корені рівняння $J_1'(k_n r_0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Отже, знайдені функції $\varphi_n^{(1)}(r, z)$ і $\varphi_n^{(2)}(r, z)$ та значення \varkappa_n цілком визначають розв'язок допоміжної спектральної задачі (11) в області Q .

Зауважимо, що спектральну задачу (11) у випадку дослідження неосесиметричних форм коливань в області Q можна було розв'язати без застосування методу декомпозиції

області, для цього потрібно відразу використати варіаційний метод. За аналогією з виразом (20), у вигляді якого шукався розв'язок задачі (17), розклад функції $\varphi(r, z)$ матиме вигляд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^N a_k V_k(r, z) + \sum_{j=p_0}^p c_j \psi_j(r, z), \quad (27)$$

де система власних функцій базової задачі є такою:

$$\psi_j(r, z) = \frac{\text{ch}(k_j(z + (h + h_d)))}{k_j J_1(k_j r_0) \text{sh}(k_j(h + h_d))} J_1(k_j r). \quad (28)$$

Після того, як знайдено розв'язок спектральної задачі (11), перейдемо до знаходження наближених розв'язків задач (9) і (10). Для цього запишемо функцію $\Phi(r, z)$ у вигляді розкладу за власними функціями $\varphi_n(r, z)$:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n(r, z). \quad (29)$$

Для визначення коефіцієнтів розкладу (29) використаємо граничну умову для $\Phi(r, z)$ на контурі L_0 . Підставимо вираз (29) в умову рівності зміщень рідини і мембрани (пластинки) на поверхні їх контакту:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left. \frac{\partial \varphi_n(r, z)}{\partial \nu} \right|_{L_0} = W(r). \quad (30)$$

Використаємо умови ортогональності (13) для знаходження коефіцієнтів B_n розкладу (29):

$$B_n = \frac{1}{N_n^2} \int_{L_0} r W(r) \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} ds, \quad N_n^2 = \int_{L_0} r \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right)^2 ds. \quad (31)$$

В результаті розклад (29) функції $\Phi(r, z)$ набере вигляду

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n^2} \int_{L_0} r W(r) \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} ds \varphi_n(r, z). \quad (32)$$

Обмежившись у розкладі (32) скінченим числом членів M , розв'язання вихідної задачі гідропружності для мембрани зведемо до розв'язання інтегро-диференціального рівняння відносно функції $W(r)$:

$$A(W) = L[W] + \delta W = -a^{-1} \gamma^2 \sum_{n=1}^M \frac{1}{N_n^2} \int_{L_0} r W \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dr \varphi_n(r, 0) \quad (33)$$

при умовах

$$W(r_0) = 0, \quad |W(0)| < \infty. \quad (34)$$

У випадку пружної пластинки, яка покриває вільну поверхню рідини, відповідна задача гідропружності зводиться до розв'язання інтегро-диференціального рівняння

$$\tilde{A}(W) = -L^2[W] + \delta W = -a^{-1}\gamma^2 \sum_{n=1}^M \frac{1}{N_n^2} \int_{L_0} rW \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dr \varphi_n(r, 0) \quad (35)$$

при умовах

$$W(r_0) = 0, \quad W'(r_0) = 0, \quad |W(0)| < \infty. \quad (36)$$

Наближені розв'язки граничної задачі (33), (34) можна побудувати за допомогою узагальненого методу Бубнова – Гальоркіна [8, 9, 11]. При цьому вихідна задача зводиться до алгебраїчної задачі на власні значення. Нижче при розв'язуванні задачі (33), (34) застосуємо інший підхід, який було вперше застосовано в роботі [12]. В результаті використання цього методу за деяких обставин можна побудувати точний розв'язок граничної задачі (33), (34). Згідно з цим методом розв'язок рівняння (33) записується у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння $A(W) = 0$, що включає в себе сталі інтегрування, кількість яких відповідає порядку диференціального виразу $A(W)$, та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. В результаті підстановки отриманого розв'язку в граничні умови для функції W отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування, а далі з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи прийдемо до характеристичного рівняння для визначення частотного параметра γ .

Отже, даний метод можна використовувати, якщо вдається знайти, по-перше, загальний розв'язок однорідного рівняння, а, по-друге, частинний розв'язок неоднорідного. Зрозуміло, що зробити це нелегко, але в деяких задачах можливо: точний розв'язок інтегро-диференціального рівняння було побудовано в задачах гідропружності, в яких область, що зайнята рідиною, була канонічною (межі області збігаються з координатними поверхнями однієї з ортогональних систем координат) [1, 5, 13]. Отже, канонічність області, зайнятої рідиною, відіграє визначальну роль при побудові частинних розв'язків відповідних рівнянь. При розв'язанні задач (33), (34) і (35), (36) з використанням описаного підходу зникає необхідність знаходити розклади для шуканих переміщень мембрани або пластинки в ряди за системою координатних функцій [9].

З урахуванням власних функцій φ_n , знайдених методом декомпозиції області, гранична задача (33), (34) набере вигляду

$$L[W(r)] + \delta W(r) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n R_n(r), \quad W(r_0) = 0, \quad |W(0)| < \infty, \quad (37)$$

де

$$E_n = -\frac{a^{-1}\gamma^2}{H_n^2 \varkappa_n} \int_0^{r_0} rW(r)R_n(r) dr, \quad H_n^2 = \frac{1}{2} \left(r_0^2 - \frac{1}{k_n^2} \right). \quad (38)$$

В залежності від співвідношення між безрозмірними параметрами γ^2 і ε параметр δ , що входить у рівняння (37), може бути додатним або від'ємним. Знак параметра δ має суттєве значення при знаходженні загального розв'язку однорідного диференціального рівняння $A(W) = 0$ і подальшому розв'язанні задачі. Тому для загальності у рівнянні (37) введемо таке позначення:

$$\delta = \begin{cases} \alpha^2 & \text{при } \delta > 0, \\ -\alpha^2 & \text{при } \delta < 0. \end{cases} \quad (39)$$

Загальний розв'язок рівняння (37) подамо у вигляді

$$W(r) = \sum_{p=1}^2 C_p F_p(\alpha r) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n R_n(r), \quad (40)$$

де під знаком першої суми знаходиться загальний розв'язок однорідного рівняння $A(W) = 0$, C_1 і C_2 — довільні сталі, а під знаком другої суми — частинний розв'язок рівняння (37),

$$F_1(r) = \begin{cases} J_1(r), & \delta > 0, \\ I_1(r), & \delta < 0, \end{cases} \quad F_2(r) = \begin{cases} Y_1(r), & \delta > 0, \\ K_1(r), & \delta < 0. \end{cases} \quad (41)$$

Тут $Y_1(r)$ — функція Бесселя 2-го роду 1-го порядку, а $I_1(r)$ та $K_1(r)$ — модифіковані функції Бесселя відповідно 1- та 2-го роду 1-го порядку.

Згідно з фізичним змістом задачі розв'язки $W(r)$ повинні бути обмеженими. Функція $F_2(\alpha r)$ необмежена при $r = 0$, тому $C_2 = 0$.

Підставивши вираз (40) у рівняння (37) і порівнявши коефіцієнти при $R_n(r)$, отримаємо

$$W_n = -\frac{E_n}{k_n^2 \mp \alpha^2}, \quad \alpha \neq k_n. \quad (42)$$

Слід зауважити, що у разі наявності альтернативного знаку \mp у (42) та наведених нижче формулах мінус відповідає випадку розв'язування задачі (37) при $\delta > 0$, а плюс — при $\delta < 0$.

Обчислимо значення коефіцієнтів E_n з урахуванням загального розв'язку (40) для функції $W(r)$ і підставимо їх у вираз (42). В результаті одержимо рівність, з якої можна виразити коефіцієнти W_n :

$$W_n = C_1 u_n(\gamma),$$

де

$$u_n(\gamma) = G_n(\gamma) \int_0^{r_0} r F_1(\alpha r) R_n(r) dr, \quad G_n(\gamma) = \frac{a^{-1} \gamma^2}{H_n^2 ((k_n^2 \mp \alpha^2) \varkappa_n - a^{-1} \gamma^2)}. \quad (43)$$

Визначений інтеграл, який входить у вираз для $u_n(\gamma)$, обчислюється за формулою

$$\int_0^{r_0} r F_1(\alpha r) R_n(r) dr = \frac{\alpha r_0 F_1'(\alpha r_0)}{k_n^2 \mp \alpha^2}. \quad (44)$$

Тут і далі штрих означає похідну лише по аргументу.

В результаті підстановки знайдених виразів для коефіцієнтів W_n у вираз (40) функція $W(r)$ набере вигляду

$$W(r) = C_1 \left(F_1(\alpha r) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\gamma) R_n(r) \right). \quad (45)$$

Із граничної умови для функції $W(r)$ при $r = r_0$ отримуємо рівняння

$$C_1 \left(F_1(\alpha r_0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\gamma) \right) = 0. \quad (46)$$

З умови існування нетривіального розв'язку рівняння (46) отримуємо характеристичне рівняння відносно параметра γ :

$$\frac{1}{\alpha r_0} \frac{F_1(\alpha r_0)}{F_1'(\alpha r_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(\gamma)}{k_n^2 \mp \alpha^2} = 0. \quad (47)$$

Для визначення інтервалів, в яких знаходяться корені рівняння (47), скористаємося розкладом доданка лівої частини на дроби [14]:

$$\frac{1}{\alpha r_0} \frac{F_1(\alpha r_0)}{F_1'(\alpha r_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H_n^2(k_n^2 \mp \alpha^2)}.$$

Після деяких перетворень у лівій частині рівняння (47) з урахуванням цього розкладу отримуємо характеристичне рівняння у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa_n}{H_n^2(a^{-1} + \varkappa_n) (\xi_n^2 - \gamma^2)} = 0, \quad \xi_n^2 = \frac{(k_n^2 + \varepsilon) \varkappa_n}{a^{-1} + \varkappa_n}. \quad (48)$$

Ліва частина рівняння (48) є монотонно зростаючою функцією параметра γ^2 на інтервалі (ξ_n^2, ξ_{n+1}^2) , яка набуває на ньому значень від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, між двома послідовними значеннями ξ_n^2 лежить лише один корінь рівняння (48). Цим самим визначаються інтервали, в яких розташовані власні значення задачі (37).

Розв'язки вихідної задачі гідропружності (9) — функції $W_k(r)$ і $\Phi_k^{(2)}(r, z)$ — визначаються за формулами

$$W_k(r) = C_1 \left(F_1(\alpha_k r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k r_0}{k_n^2 \mp \alpha_k^2} F_1'(\alpha_k r_0) G_n(\gamma_k) R_n(r) \right), \quad (49)$$

$$\Phi_k^{(2)}(r, z) = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k r_0}{a^{-1} \gamma_k^2} F_1'(\alpha_k r_0) G_n(\gamma_k) R_n(r) Z_n(z).$$

Розв'язки для функції $\Phi_k^{(2)}(r, z)$ у формулах (49) — це розв'язки, побудовані в області Q_2 . У формулі (49) введено нову функцію $Z_n(z)$:

$$Z_n(z) = \frac{k_n \operatorname{ch}(k_n(z+h)) + \mu_n \operatorname{sh}(k_n(z+h))}{k_n \operatorname{ch}(k_n h) + \mu_n \operatorname{sh}(k_n h)}.$$

Враховуючи вирази коефіцієнтів рядів для функцій $W_k(r)$ в формулах (49), можна зробити висновок, що отримані розклади для функцій та їх похідних до четвертого порядку рівномірно збігаються у проміжку $(0; r_0)$.

Перейдемо до розв'язування граничної задачі (35), (36), яка з урахуванням виразів φ_n набере вигляду

$$-L^2[W(r)] + \delta W(r) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n R_n(r), \quad W(r_0) = W'(r_0) = 0, \quad |W(0)| < \infty. \quad (50)$$

В залежності від знаку безрозмірного параметра δ введемо для нього таке позначення у рівнянні (50):

$$\delta = \begin{cases} \alpha^4 & \text{при } \delta > 0, \\ -\alpha^4 & \text{при } \delta < 0. \end{cases} \quad (51)$$

Загальний розв'язок рівняння (50) подамо у вигляді

$$W(r) = \sum_{p=1}^4 C_p F_p(\alpha r) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n R_n(r), \quad (52)$$

де перший доданок — загальний розв'язок однорідного рівняння $\tilde{A}(W) = 0$, C_p , $p = \overline{1, 4}$, — довільні константи, а другий — частинний розв'язок рівняння (50).

Функції $F_p(r)$ у формулі (52) при $\delta > 0$ мають вигляд

$$F_1(r) = J_1(r), \quad F_2(r) = Y_1(r), \quad F_3(r) = I_1(r), \quad F_4(r) = K_1(r),$$

а при $\delta < 0$

$$F_1(r) = \operatorname{ber}_1(r), \quad F_2(r) = \operatorname{ker}_1(r), \quad F_3(r) = \operatorname{bei}_1(r), \quad F_4(r) = \operatorname{kei}_1(r),$$

де $\operatorname{ber}_1(r)$, $\operatorname{bei}_1(r)$ та $\operatorname{ker}_1(r)$, $\operatorname{kei}_1(r)$ — функції Кельвіна 1 та 2-го роду 1-го порядку.

Згідно з фізичним змістом задачі розв'язки $W(r)$ повинні бути обмеженими. Функції $F_2(\alpha r)$ та $F_4(\alpha r)$ необмежені при $r = 0$, тому $C_2 = 0$, $C_4 = 0$.

Підставивши вираз (52) в рівняння (50) і порівнявши коефіцієнти при $R_n(r)$, отримаємо

$$W_n = -\frac{E_n}{k_n^4 \mp \alpha^4}, \quad \alpha \neq k_n. \quad (53)$$

Як і у випадку з мембраною, у випадку з пластинкою у разі наявності альтернативного знаку \mp у наведених нижче формулах знак мінус отримано при $\delta > 0$, а плюс — при $\delta < 0$.

Записавши значення для коефіцієнтів E_n з урахуванням загального розв'язку (52) для функції $W(r)$, підставимо отримані вирази для E_n у вираз (53). В результаті одержимо рівність, з якої можна виразити коефіцієнти W_n :

$$W_n = C_1 u_n^{(1)}(\gamma) + C_3 u_n^{(2)}(\gamma),$$

де

$$u_n^{(1)}(\gamma) = G_n(\gamma) \int_0^{r_0} r F_1(\alpha r) R_n(r) dr, \quad u_n^{(2)}(\gamma) = G_n(\gamma) \int_0^{r_0} r F_3(\alpha r) R_n(r) dr, \quad (54)$$

$$G_n(\gamma) = \frac{a^{-1}\gamma^2}{H_n^2((k_n^4 \mp \alpha^4)x_n - a^{-1}\gamma^2)}.$$

Із умови $W'(r_0) = 0$ виразимо сталу C_3 через C_1 :

$$C_3 = \beta C_1, \quad \text{де} \quad \beta = -\frac{F_1'(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)}. \quad (55)$$

В результаті коефіцієнт W_n матиме вигляд

$$W_n = C_1 u_n(\gamma), \quad \text{де} \quad u_n(\gamma) = u_n^{(1)}(\gamma) + \beta u_n^{(2)}(\gamma) = \frac{\alpha^3 r_0}{k_n^4 \mp \alpha^4} G_n(\gamma) \tilde{u}_n(\alpha r_0),$$

$$\tilde{u}_n(r) = \begin{cases} 2F_1'(r) & \text{при } \delta > 0, \\ \frac{(F_1'(r))^2 + (F_3'(r))^2}{F_3'(r)} & \text{при } \delta < 0. \end{cases}$$

Підставивши знайдені вирази для коефіцієнтів W_n у вираз (52), отримаємо функцію $W(r)$:

$$W(r) = C_1 \left(F_1(\alpha r) + \beta F_3(\alpha r) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\gamma) R_n(r) \right). \quad (56)$$

Із граничної умови $W(r_0) = 0$ одержимо рівняння

$$C_1 \left(F_1(\alpha r_0) + \beta F_3(\alpha r_0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\gamma) \right) = 0. \quad (57)$$

В залежності від знаку безрозмірного параметра δ з умови існування нетривіального розв'язку рівняння (57) отримуємо два характеристичних рівняння відносно параметра γ :

$$\frac{1}{\alpha r_0} \left(\frac{F_1(\alpha r_0)}{F_1'(\alpha r_0)} - \frac{F_3(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2 G_n(\gamma)}{k_n^4 - \alpha^4} = 0, \quad (58)$$

$$\frac{1}{\alpha r_0} \frac{F_1(\alpha r_0)F_3'(\alpha r_0) - F_3(\alpha r_0)F_1'(\alpha r_0)}{(F_1'(\alpha r_0))^2 + (F_3'(\alpha r_0))^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 G_n(\gamma)}{k_n^4 + \alpha^4} = 0. \quad (59)$$

Перше рівняння отримуємо при додатному δ , а друге — при від'ємному.

Виходячи з теорії рядів Фур'є – Бесселя [14], розглянемо розклад доданка у лівій частині рівняння (58) на дробі:

$$\frac{1}{\alpha r_0} \left(\frac{F_1(\alpha r_0)}{F_1'(\alpha r_0)} - \frac{F_3(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{H_n^2(k_n^4 - \alpha^4)}.$$

Використавши цей розклад, можна визначити інтервали, в яких знаходяться корені рівняння (58). Виконавши деякі перетворення у лівій частині рівняння (58) з урахуванням цього розкладу, отримаємо характеристичне рівняння у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa_n}{H_n^2(a^{-1} + \varkappa_n)(\xi_n^2 - \gamma^2)} = 0, \quad \xi_n^2 = \frac{(k_n^4 + \varepsilon)\varkappa_n}{a^{-1} + \varkappa_n}. \quad (60)$$

Розглянемо функцію $\Sigma(\gamma^2)$, де Σ — ліва частина рівняння (60). Функція Σ є монотонно зростаючою функцією параметра γ^2 на інтервалі (ξ_n^2, ξ_{n+1}^2) . На цьому інтервалі Σ набуває значень від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, між двома послідовними значеннями ξ_n^2 лежить лише один корінь рівняння (60) і відповідно (58). Цим визначаються інтервали, в яких розташовані власні значення задачі (50) при $\delta > 0$. По аналогії з викладеним вище ці ж самі інтервали отримаємо для коренів рівняння (59) (при $\delta < 0$). При цьому функції $W_k(r)$ і $\Phi_k^{(2)}(r, z)$ визначаються за формулами

$$W_k(r) = C_1 \left[F_1(\alpha_k r) + \beta F_3(\alpha_k r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^3 r_0 G_n(\gamma_k)}{k_n^4 \mp \alpha_k^4} \tilde{u}_n(\alpha_k r_0) R_n(r) \right], \quad (61)$$

$$\Phi_k^{(2)}(r, z) = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^3 r_0}{a^{-1} \gamma_k^2} G_n(\gamma_k) \tilde{u}_n(\alpha_k r_0) R_n(r) Z_n(z).$$

Звернемо увагу на те, що згідно з запропонованим алгоритмом розв'язку для розрахунку власних коливань розглядуваної гідропружної системи потрібно розв'язати трансцендентні рівняння, які містять достатньо велику кількість власних значень μ_n , знайдених досить точно. Точність обчислення значень μ_n і велика їх кількість забезпечується на основі варіаційного методу, запропонованого в [9].

Результати, отримані при розв'язуванні задачі гідропружності про власні коливання рідини у прямому круговому циліндрі з довільним осесиметричним дном та пружною мембраною (пластинкою) на вільній поверхні рідини, можуть бути застосовані до розв'язування частинного випадку задачі, коли розглядається резервуар з плоским дном. При цьому для отримання відповідних формул слід покласти всі $\mu_n = 0$.

3. Аналіз розв'язків і деякі результати розрахунків. Наведемо деякі результати розрахунків зв'язаних неосесиметричних коливань мембрани (пластинки) і рідини в резервуарі за отриманим вище алгоритмом. Будемо розглядати резервуар, що має форму прямого

кругового циліндра з півсферичним дном. Радіуси циліндра, пружного елемента (мембрани або пластинки) на вільній поверхні рідини та сферичного дна дорівнюють r_0 . За характерний лінійний розмір виберемо радіус r_0 .

Власні значення μ_n крайової задачі (11), що описує задачу про вільні неосесиметричні коливання рідини в резервуарі без пружного елемента на її вільній поверхні, було обчислено трьома методами: 1) класичним варіаційним методом, коли функція $\varphi(r, z)$ є лінійною комбінацією системи координатних функцій (21); 2) „модифікованим” варіаційним методом, у якому функцію $\varphi(r, z)$ подано у вигляді розкладу (27) за гармонічними функціями (21) і власними функціями $\psi_j(r, z)$ базової задачі; 3) методом поділу області на підобласті, в якому значення μ_n обчислено за допомогою „модифікованого” варіаційного методу. Результати, отримані для власних значень μ_n методом поділу області на підобласті, при різних значеннях висоти h добре узгоджуються з обчисленими двома запропонованими варіаційними методами.

Перейдемо до аналізу отриманих розв'язків крайової задачі (9), що описує зв'язані коливання рідини та пружної мембрани на її вільній поверхні в резервуарі розглянутої геометричної форми. Наведені нижче результати обчислень для системи „мембрана – рідина” було отримано при наступних значеннях безрозмірних параметрів системи:

$$a = 0,01, \quad T = 0,1, \quad r_0 = 1, \quad h = 1. \quad (62)$$

В табл. 1 наведено збіжність перших п'яти власних значень задачі (37) в залежності від кількості членів M у розкладах (49) у випадку резервуара, що має форму прямого кругового циліндра з півсферичним дном. Результати отримано при параметрах (62).

Аналіз даних табл. 1 показує, що при $M = 2$ відносна помилка обчислень для першого власного значення λ_1 не перевищує 0,45%, а для другого – 5,81%, де за „точні” прийнято обчислені при $M = 30$ значення. При $M = 8$ отримано значення $\lambda_i, i = \overline{1,5}$, з трьома – п'ятьма „точними” значущими цифрами і відносною похибкою не більше 0,25%, а при $M = 20$ кількість цифр зростає до чотирьох – шести і похибка зменшується до 0,005%. Варто зауважити, що перші три власних значення з табл. 1 при параметрах (62) визначалися з характеристичного рівняння (47), отриманого при $\delta < 0$, а всі інші – з рівняння, отриманого при $\delta > 0$.

Таблиця 1

M	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
2	2,3630716	5,8561481	—	—	—
4	2,3535132	5,5479714	9,5574036	14,895776	—
6	2,3527868	5,5375007	9,4848477	14,077721	19,268452
8	2,3526487	5,5356389	9,4743975	14,036335	19,113146
10	2,3526087	5,5351087	9,4715653	14,026285	19,083895
12	2,3525937	5,5349129	9,4705391	14,022780	19,074380
16	2,3525840	5,5347851	9,4698769	14,020564	19,068575
20	2,3525812	5,5347494	9,4696929	14,019957	19,067018
24	2,3525802	5,5347364	9,4696260	14,019737	19,066461
30	2,3525797	5,5347291	9,4695889	14,019616	19,066154

Таблиця 2

\tilde{M}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
2	2,3630652	5,8560383	32,014022	42,107130	52,098094
4	2,3535073	5,5479048	9,5573872	14,896363	50,989503
6	2,3527809	5,5374351	9,4848309	14,077909	19,269248
8	2,3526429	5,5355734	9,4743806	14,036513	19,113831
10	2,3526028	5,5350432	9,4715485	14,026461	19,084560
12	2,3525879	5,5348475	9,4705223	14,022955	19,075040
16	2,3525781	5,5347197	9,4698600	14,020739	19,069230
20	2,3525754	5,5346840	9,4696760	14,020131	19,067673
22	2,3525754	5,5346840	9,4696760	14,020131	19,067673

Порівняємо одержані результати з отриманими при розв'язуванні інтегро-диференціального рівняння (33) за допомогою узагальненого методу Бубнова – Гальоркіна, в якому координатні функції не задовольняють головні граничні умови задачі. Для розв'язування даної задачі за допомогою цього підходу використано опубліковані раніше результати [9], на основі яких здійснено побудову наближеного розв'язку задачі.

В табл. 2 відображено вплив кількості \tilde{M} власних функцій $\varphi_n(r, z)$ у розкладі для складової потенціалу зміщень рідини $\Phi(r, z)$ на точність обчислення початкової частини спектра задачі для неосесиметричних коливань, причому в узагальненому методі Бубнова – Гальоркіна використовувалось 20 координатних функцій. Наведені результати свідчать про те, що при використанні двох власних функцій отримуємо перше власне значення λ_1 вихідної задачі з помилкою, яка не перевищує 0,5%, а при побудові розв'язку за 20-ма власними функціями – граничне значення для кожного обчислюваного частотного параметра, знайденого цим методом.

Порівняння даних табл. 1 і 2 дозволяє зробити висновок про те, що помилка обчислення перших п'яти частотних параметрів за допомогою розглянутого аналітичного методу при параметрах (62) та $M = 30$ не перевищує 0,01%, причому наведені значення λ_n мають чотири – шість правильних значущих цифр.

Графіки перших трьох форм коливань мембрани при $a = 0,01$ і двох значеннях параметра $T = 0,1$ (а) і $T = 0,0004$ (б) зображено на рис. 2. Нормування форм коливань мембрани здійснювалося таким чином, щоб їхні максимальні значення дорівнювали одиниці при $r \in [0, 1]$.

З рис. 2, б видно, що при малих значеннях параметра T форми коливань мембрани мають більшу змінюваність у вузькій області, що прилягає до закріпленого її краю. Причиною цього є те, що в розглянутому випадку рівняння для прогинів мембрани буде мати малий параметр при старшій похідній, і, отже, розв'язки цих рівнянь можуть мати більші градієнти у вузьких примежових шарах. Варто зауважити, що при апроксимації таких розв'язків відрізками скінченних рядів необхідно брати для забезпечення заданої точності обчислень досить велику кількість членів у цих рядах.

На рис. 3, а відображено залежність перших трьох власних значень задачі від безрозмірного параметра глибини h рідини в циліндричному резервуарі з півсферичним дном

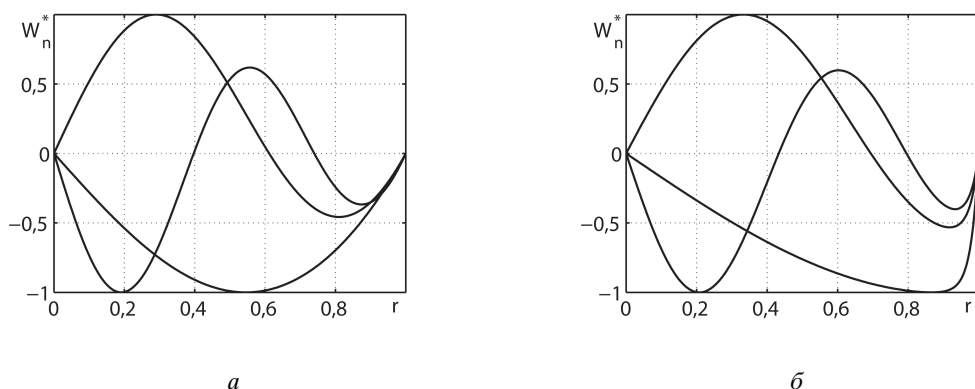


Рис. 2

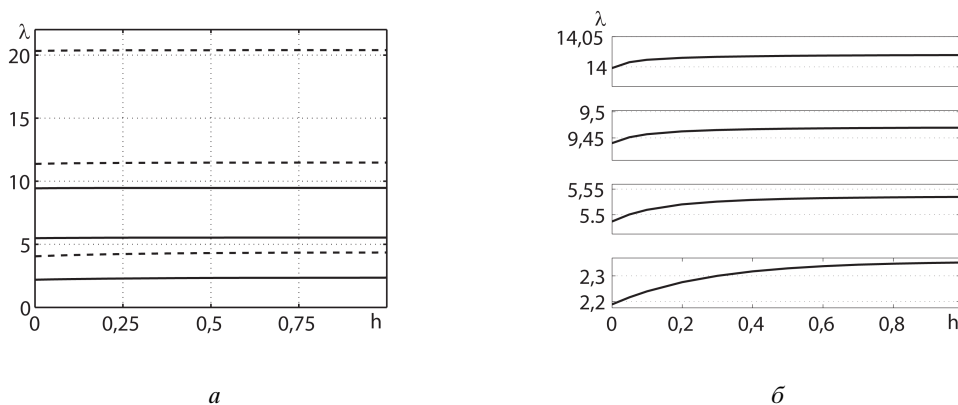


Рис. 3

при параметрах (62). При цьому суцільні лінії відображають залежність при $T = 0, 1$, а штрихові — при $T = 0, 5$. При збільшенні параметра натягу T величини частотних параметрів λ_n також збільшуються.

На рис. 3, б відображено залежність власних значень від висоти h в іншому масштабі осі λ при $T = 0, 1$. При цьому на осі λ при $h = 0$ відкладено власні значення, які отримано у роботі [9] для резервуара у формі півсфери. Власні значення, обчислені у випадку резервуара у формі прямого циліндра з півсферичним дном, при зменшенні висоти h рідини прямують до цих значень.

Розглянемо далі випадок задачі гідропружності, в якому вільна поверхня рідини покрита пружною пластинкою. При цьому наведемо аналіз розв'язків крайової задачі (10). Як і для розглянутого вище прикладу з мембраною, будемо розглядати резервуар тієї ж геометричної форми і розмірів. Результати, наведені далі в таблицях, отримано при безрозмірних величинах (62), при цьому замість параметра натягу мембрани T розглядається параметр жорсткості пластинки $D = 0, 02$.

В табл. 3 для випадку резервуара, що має форму прямого кругового циліндра з півсферичним дном, наведено збіжність перших п'яти власних значень задачі (50) в залежності від кількості членів M у розкладах (61).

Таблиця 3

M	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
2	5,2137490	24,174920	—	—	—
4	5,2084679	19,998449	48,307341	114,41092	—
6	5,2084290	19,990708	48,040627	91,470019	152,73693
8	5,2084273	19,990366	48,030549	91,341429	151,56481
10	5,2084271	19,990331	48,029540	91,329444	151,47699
12	5,2084271	19,990325	48,029375	91,327520	151,46348
16	5,2084270	19,990324	48,029328	91,326975	151,45972
20	5,2084270	19,990324	48,029323	91,326922	151,45936
24	5,2084270	19,990324	48,029323	91,326914	151,45930
30	5,2084270	19,990324	48,029322	91,326912	151,45928

Таблиця 4

\tilde{M}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
2	5,2138061	24,174800	149,22805	263,30525	404,03254
4	5,2085248	19,998385	48,307298	114,41086	378,70452
6	5,2084859	19,990644	48,040584	91,469990	152,73695
8	5,2084842	19,990302	48,030505	91,341400	151,56483
10	5,2084840	19,990268	48,029496	91,329415	151,47701
12	5,2084840	19,990262	48,029331	91,327490	151,46350
16	5,2084839	19,990260	48,029284	91,326946	151,45974
20	5,2084839	19,990260	48,029280	91,326893	151,45938
24	5,2084839	19,990260	48,029280	91,326893	151,45938

Дані табл. 3 свідчать про те, що відносна помилка обчислень для першого власного значення λ_1 при $M = 2$ не перевищує 0,11%, а для другого — 21%, де за „точні” прийнято обчислені при $M = 30$ значення. При $M = 8$ знайдено значення λ_i , $i = \overline{1,4}$, з трьома-сімома „точними” значущими цифрами і відносною похибкою не більше 0,02%, а при $M = 16$ кількість цифр усіх п’яти частотних параметрів зростає до п’яти-семи і похибка зменшується до 0,001%. Зауважимо, що перше власне значення в табл. 3 визначалося з характеристичного рівняння (59), отриманого при $\delta < 0$, а всі інші — з рівняння (58), отриманого при $\delta > 0$.

Перейдемо до аналізу наближеного розв’язку задачі, який отримано при розв’язуванні інтегро-диференціального рівняння (35) за допомогою узагальненого методу Бубнова–Гальоркіна. Реалізацію цього підходу здійснено на основі опублікованих раніше результатів [9].

В табл. 4 відображено вплив кількості \tilde{M} власних функцій $\varphi_n(r, z)$ у розкладі для складової потенціалу зміщень рідини $\Phi(r, z)$ на точність обчислення початкової частини спектра задачі для неосесиметричних коливань. В узагальненому методі Бубнова–Гальоркіна було використано 20 координатних функцій. Наведені результати свідчать про те, що при використанні двох власних функцій отримуємо перше власне значення λ_1 вихідної задачі з помилкою, яка не перевищує 0,11%, а при побудові розв’язку за 20-ма власними функціями — граничне значення для кожного обчислюваного частотного параметра, знайденого цим методом.

Порівняльний аналіз даних табл. 3 і 4 свідчить про те, що помилка обчислення перших п'яти частотних параметрів λ_n системи „пластинка – рідина”, отриманих на основі аналітичного методу при $M = 30$, не перевищує 0,0011%, при цьому знайдено чотири – шість правильних значущих цифр значень λ_n . Розбіжність в п'яти – семи знаках табл. 1 і 2, 3 і 4 зумовлена неточністю визначення \varkappa_n для нижчих форм коливань на основі методу спряження.

При інших параметрах системи наведена збіжність не порушується. При реалізації обох підходів на ПЕОМ більш швидким є підхід, який базується на аналітичному розв'язку задачі, при умові наявності обчислених наближених значень μ_n , розв'язків задачі (17).

Графіки перших трьох форм коливань пластинки при значеннях параметрів $a = 0,01$ і $D = 0,02$ (а) та $D = 10^{-6}$ (б) зображено на рис. 4. На рис. 5, а зображено графіки залежності перших трьох власних значень задачі від безрозмірного параметра глибини h рідини в резервуарі з осесиметричним дном при параметрах (62) і $D = 0,02$ (суцільні лінії), $D = 0,1$ (штрихові лінії). При зростанні висоти h у резервуарі з осесиметричним дном шукані власні значення зростають і стають майже сталими, наближаючись до власних значень, отриманих при розрахунках для резервуара з плоским дном, заповненого рідиною на висоту h . На рис. 5, б показано залежність власних значень (чотирьох) від висоти h в іншому масштабі осі λ .

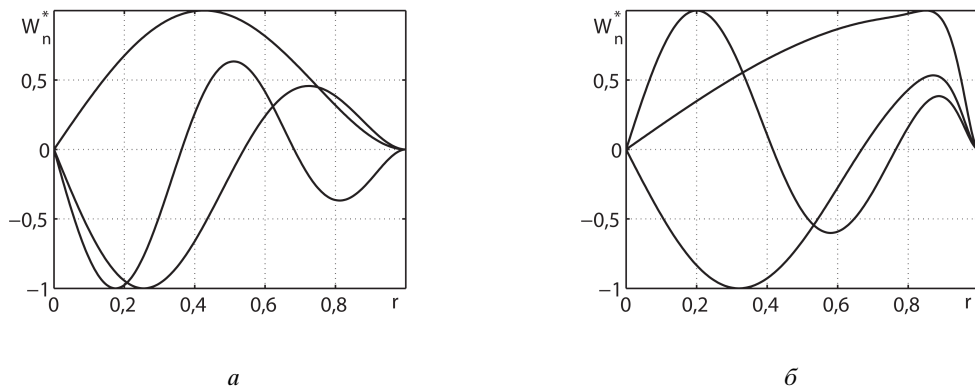


Рис. 4

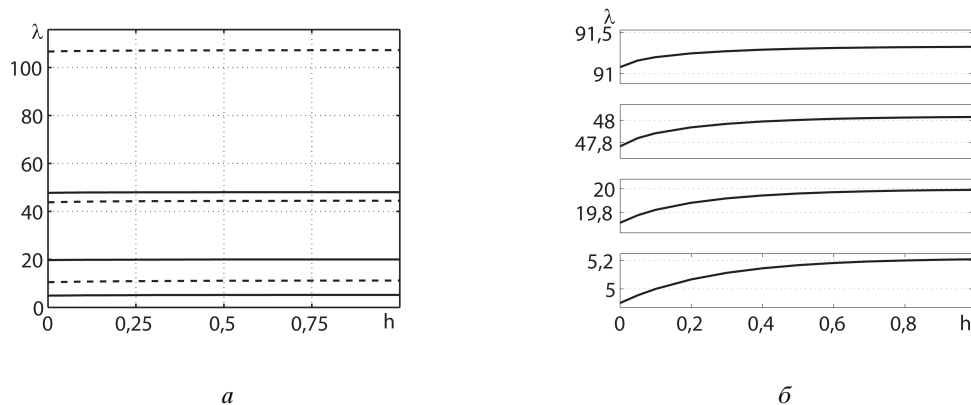


Рис. 5

Таблиця 5

a	0,001	0,005	0,01	ζ , %	0,001	0,005	0,01	ζ , %
	$T = 0,1$				$D = 0,02$			
λ_1	2,376 1,845	2,365 1,837	2,353 1,826	22,4	5,272 5,006	5,244 4,978	5,208 4,945	5,06
λ_2	5,673 5,154	5,610 5,097	5,535 5,029	9,15	20,52 20,37	20,28 20,14	19,99 19,85	0,72
λ_3	9,837 9,380	9,668 9,219	9,470 9,030	4,65	49,96 49,87	49,07 48,98	48,03 47,94	0,19
	$T = 0,5$				$D = 0,1$			
λ_1	4,391 4,125	4,371 4,107	4,347 4,084	6,06	11,31 11,19	11,25 11,13	11,18 11,06	1,08
λ_2	11,77 11,53	11,64 11,34	11,48 4,084	2,05	45,62 45,56	45,09 45,02	44,45 44,38	0,15
λ_3	21,18 20,97	20,82 20,62	20,39 20,19	0,99	111,55 111,51	109,57 109,53	107,24 107,20	0,04

У деяких роботах з гідропружності розглядають задачу за відсутності поля масових сил (статичної складової тиску на пружну поверхню), а також безінерційний пружний елемент на вільній поверхні рідини. Цим самим вводяться певні додаткові припущення.

Для розв'язування задачі гідропружності за умови нехтування статичною складовою тиску на пружну поверхню елемента вираз для безрозмірного параметра δ слід розглядати без доданка ε , а рівняння (9) і (10) для прогинів мембрани і пластинки — без доданка $\varepsilon W(r)$. Для з'ясування впливу цього члена на розрахунок власних коливань розглядуваної системи в табл. 5 наведено перші частотні параметри системи, отримані за загальною схемою розрахунку (верхні рядки) і за схемою без врахування члена εW (нижні рядки) для різних значень параметрів a і T (D). У стовпчиках ζ знаходяться максимальні значення відносних похибок для кожного із наведених власних значень, обчислених для різних a та відповідно фіксованих T або D .

Дані табл. 5 свідчать про те, що нехтування статичною складовою тиску рідини на поверхні мембрани (пластинки) може призвести до істотних помилок при обчисленні значень частот зв'язаних коливань рідини й мембрани (пластинки). При цьому ці помилки практично не залежать від відносної товщини мембрани (пластинки) і істотно залежать від її натягу (жорсткості). Так, у випадку мембрани максимальна відмінність від „точних” значень для першого власного значення при $T = 0,1$ не перевищує 22,4%, а при $T = 0,5$ — 6,06%, відповідні величини для третього власного значення при $T = 0,1$ — 4,65%, а при $T = 0,5$ — 0,99%. Аналогічні результати обчислення значень λ отримано для гідропружної системи „пластинка – рідина”.

При цьому із наведених результатів випливає, що зі збільшенням номера власної частоти системи відносна похибка обчислення зменшується. Подібний характер має і залежність відносної похибки від величини параметра натягу (жорсткості). Із табл. 5 випливає, що при збільшенні T (D) відхилення від „точних” значень λ зменшується (відповідно при зменшенні — збільшується), а при досить малих значеннях параметрів $T = 0,004$ або $D = 0,004$ досягає значення 92%.

Для розв'язання задачі гідропружності при наявності безінерційного пружного елемента на вільній поверхні рідини у рівняннях (9) і (10) у виразі для безрозмірного параметра δ слід знехтувати алгебраїчним доданком γ^2 . При дослідженні коливань цієї ме-

ханічної системи розбіжність отриманих частот зв'язаних коливань з „точними” також залежить від параметра натягу (жорсткості) і з ростом номера частоти зменшується.

Висновки. В роботі запропоновано аналітичний розв'язок задачі гідропружності про власні коливання ідеальної нестисливої рідини в резервуарі у формі прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном і з пружною мембраною (пластинкою) на вільній поверхні рідини. Після застосування методу розкладу за власними функціями додатково введеної спектральної задачі з параметром у граничній умові вихідну задачу гідропружності зведено до однорідної граничної задачі для інтегро-диференціального рівняння відносно прогину мембрани або пластинки. Використовуючи метод декомпозиції області меридіонального перерізу резервуара, побудовано скінченне число власних функцій і власних значень допоміжної спектральної задачі. На цій основі знайдено точний розв'язок отриманого інтегро-диференціального рівняння. В результаті знаходження власних частот гідропружної системи зведено до розв'язання трансцендентного рівняння. На конкретних прикладах для частково заповненого рідиною резервуара, що має форму прямого кругового циліндра з півсферичним дном, наведено аналіз отриманих розв'язків та результати розрахунку частот і форм коливань даної механічної системи.

1. Докучаев Л. В. О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана // Строит. механика и расчет сооружений. — 1972. — № 1. — С. 49–54.
2. Siekman J., Chang S. C. On the change of natural frequencies of a sloshing liquid by movable divides // Acta mech. — 1971. — **11**. — P. 73–86.
3. Bauer H. F. Hydroelastische Schwingungen einer Oberflächenspannungsstruktur in einem Satellitenbehälter // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. — 1981. — **5**, № 5. — S. 303–313.
4. Bauer H. F. Frequencies of a hydroelastic rectangular system // Forsch. Ingenieur. — 1993. — **59**, № 1, 2. — P. 18–22.
5. Троценко В. А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикл. механика. — 1995. — **31**, № 8. — С. 74–80.
6. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном // Динамические системы: межвед. науч. сб. — 2006. — Вып. 21. — С. 7–13.
7. Троценко В. А. О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 6. — С. 166–177.
8. Троценко В. А., Богун Р. И. Поперечные колебания жидкости в длинном цилиндрическом контейнере с мембраной или упругой пластинкой на свободной поверхности // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 379–404.
9. Троценко В. А., Богун Р. И. Колебания жидкости в осесимметричном резервуаре с мембраной на свободной поверхности // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 2. — С. 304–333.
10. Феценко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы расчета присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 251 с.
11. Шмаков В. П. Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова–Галеркина к решению краевых задач // Инж. журн. Механика твердого тела. — 1967. — № 5. — С. 129–136.
12. Лейбензон Л. С. О натуральных периодах колебания плотины, подпирающей реку: Собр. трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1951. — **1**. — С. 157–161.
13. Швейко Ю. Ю., Кулешов В. Б. Неосесимметричные колебания круглых и кольцевых пластин, взаимодействующих с жидкостью // Исследования по теории сооружений. — 1972. — № 19. — С. 28–40.
14. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: Из-во иностр. лит., 1949. — 799 с.

Одержано 29.12.09,
після доопрацювання — 02.07.10