УДК 517 . 9

# ПОБУДОВА ЧАСТИННИХ АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

**К. В. Шатковська**

*Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова*
*Україна, 010030, Київ, вул. Пирогова, 9*
*e-mail: shatkovskakv@ukr.net*

*We construct partial asymptotic solutions of a linear differential system with slowly changing coefficients and a delay in the argument in the case where the characteristic equation has a multiple root.*

*Построены частные асимптотические решения линейной системы дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися коэффициентами и запаздывающим аргументом в случае кратного корня характеристического уравнения.*

У даній роботі розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$B(\tau)\frac{dx\,(t,\varepsilon)}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + C(\tau,\varepsilon)x(t-\Delta(\tau),\varepsilon), \tag{1}$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий $n$-вимірний вектор, $A(\tau,\varepsilon)$, $B(\tau)$, $C(\tau,\varepsilon)$ — дійсні або комплекснозначні квадратні матриці $n$-го порядку, $\tau = \varepsilon t \in [0;T]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий параметр.

Будемо вважати, що виконуються такі умови:

$1^\circ$) матриці $A(\tau,\varepsilon)$, $C(\tau,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра $\varepsilon$ :

$$A(\tau,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(\tau), \quad C(\tau,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k C_k(\tau); \tag{2}$$

$2^\circ$) коефіцієнти розвинень $(2)$, матриця $B(\tau)$ і функція $\Delta(\tau)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$;

$3^\circ$) $\Delta(\tau) \geq 0 \; \forall\tau \in [0;T]$;

$4^\circ$) $\det B(\tau) \equiv 0$ на $[0;T]$.

Системи рівнянь даного типу досліджувались у роботах [1 – 3]. Зокрема, в [1, 2] розроблено метод побудови асимптотичного розв'язку початкової задачі для системи (1) у випадку, коли $B(t) = E$, де $E$ — одинична матриця, а запізнення $\Delta$ є сталим. У цих же роботах розглядається можливість побудови частинних асимптотичних розв'язків даної системи у випадку змінного запізнення. При цьому досліджено випадки, коли відповідне характеристичне рівняння

$$\det\left(A_0(\tau) - \lambda E + e^{-\lambda\Delta(\tau)}C_0(\tau)\right) = 0 \tag{3}$$

має прості корені. Встановлено також, що у випадку кратних коренів рівняння (3) частинні розв'язки даної системи можна побудувати у вигляді розвинень за дробовими степенями параметра $\varepsilon$.

Система (1) з тотожно виродженою матрицею $B(\tau)$ вперше розглядалась у [3], де по аналогії з [1, 2] методом кроків побудовано асимптотику розв'язку початкової задачі за умови сталого запізнення.

У даній роботі вивчається питання про побудову асимптотики частинних розв'язків системи (1) у випадку, коли відповідне характеристичне рівняння

$$\det\left(A_0(\tau) - \lambda B(\tau) + e^{-\lambda\Delta(\tau)}C_0(\tau)\right) = 0 \tag{4}$$

має ізольований кратний корінь $\lambda_0(\tau)$ довільної кратності $p < \infty$. Запропонований метод побудови відповідних асимптотичних розвинень не залежить від того, якою є матриця $B(\tau)$ — виродженою чи невиродженою. Значення має лише стабільність її поведінки на заданому проміжку $[0;T]$. Виродженість матриці $B(\tau)$ має суттєвий вплив лише при обґрунтуванні асимптотичного характеру побудованих розв'язків. Тому отримані результати можна перенести й на той випадок, коли $B(\tau) = E$, розвиваючи цим самим дослідження, проведені в [1, 2], де через громіздкість викладок, обумовлених методом досліджень, розглянуто лише найпростішу ситуацію, коли $p = 2$.

Перш ніж перейти до побудови розв'язків системи (1), наведемо деякі допоміжні твердження, які використаємо в подальших викладках.

Розглянемо квадратну функціональну матрицю $F(\lambda) = \|f_{ij}(\lambda)\|^n$, елементами якої є деякі функції від параметра $\lambda$ (дійсного чи комплексного). Має місце наступне твердження.

**Лема.** *Нехай виконуються такі умови:*

*1) рівняння*

$$\det F(\lambda) = 0 \tag{5}$$

*має ізольований корінь $\lambda_0$ кратності $p < \infty$;*

*2)* $\operatorname{rank} F(\lambda_0) = n - 1$;

*3) матрична функція $F(\lambda)$ $p+1$ раз диференційовна в околі точки $\lambda = \lambda_0$.*

*Тоді кореню $\lambda_0$ рівняння (5) відповідає жорданів ланцюжок векторів $\varphi_i$, $i = \overline{1,p}$, завдовжки $p$, які задовольняють співвідношення*

$$\begin{gathered}
F(\lambda_0)\varphi_1 = 0, \\
F(\lambda_0)\varphi_2 + F'(\lambda_0)\varphi_1 = 0, \\
F(\lambda_0)\varphi_3 + \frac{1}{1!}F'(\lambda_0)\varphi_2 + \frac{1}{2!}F''(\lambda_0)\varphi_1 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F(\lambda_0)\varphi_p + \frac{1}{1!}F'(\lambda_0)\varphi_{p-1} + \frac{1}{2!}F''(\lambda_0)\varphi_{p-2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}F^{(p-1)}(\lambda_0)\varphi_1 = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

*При цьому рівняння*

$$F(\lambda_0)y + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i!} F^{(i)}(\lambda_0)\varphi_{p+1-i} = 0 \tag{7}$$

*нерозв'язне відносно вектора* $y$.

***Доведення.*** Для доведення леми необхідно показати розв'язність рівнянь (6) відносно векторів $\varphi_i$, $i = \overline{2, p}$, і нерозв'язність рівняння (7). Оскільки $\operatorname{rank} F(\lambda_0) = n - 1$, то існує відмінний від нуля мінор цієї матриці $(n-1)$-го порядку. Не зменшуючи загальності, будемо припускати, що цей мінор знаходиться в її лівому верхньому куті, тобто $\det \|f_{ij}(\lambda_0)\|_1^{n-1} \neq 0$. Тоді, як показано в [4, с. 58], необхідною і достатньою умовою розв'язності рівняння

$$F(\lambda_0)y = b$$

є виконання рівності

$$\begin{vmatrix} f_{11}(\lambda_0) & f_{12}(\lambda_0) & \ldots & f_{1,n-1}(\lambda_0) & b_1 \\ f_{21}(\lambda_0) & f_{22}(\lambda_0) & \ldots & f_{2,n-1}(\lambda_0) & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(\lambda_0) & f_{n2}(\lambda_0) & \ldots & f_{n,n-1}(\lambda_0) & b_n \end{vmatrix} = 0,$$

яку запишемо у вигляді

$$|f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), b| = 0,$$

позначивши через $f_i(\lambda_0)$, $i = \overline{1, n-1}$, $i$-й стовпець матриці $F(\lambda_0)$. Поклавши $p = 1$, доведемо, що

$$|f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), F'(\lambda_0)\varphi_1| \neq 0.$$

Нехай

$$\varphi_1 = \operatorname{col}\left(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_1^{(n)}\right).$$

Тоді, беручи до уваги, що

$$\alpha_1^{(1)} f_1(\lambda_0) + \alpha_1^{(2)} f_2(\lambda_0) + \ldots + \alpha_1^{(n)} f_n(\lambda_0) = 0, \tag{8}$$

і використовуючи властивості визначників, маємо

$$
\begin{aligned}
&|f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), F'(\lambda_0)\varphi_1| = \\
&= \left| f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_1'(\lambda_0)\alpha_1^{(1)} + f_2'(\lambda_0)\alpha_1^{(2)} + \ldots + f_n'(\lambda_0)\alpha_1^{(n)} \right| = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{(i)} \left| f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0) f_i'(\lambda_0) \right| = \\
&= \left| \alpha_1^{(1)} f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_1'(\lambda_0) \right| + \\
&\quad + \left| f_1(\lambda_0), \alpha_1^{(2)} f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_2'(\lambda_0) \right| + \ldots \\
&\quad\quad \ldots + \left| f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, \alpha_1^{(n-1)} f_{n-1}(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0) \right| + \\
&\quad + \left| f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \alpha_1^{(n)} f_n'(\lambda_0) \right| = \\
&= -\left| \alpha_1^{(n)} f_n(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_1'(\lambda_0) \right| - \\
&\quad - \left| f_1(\lambda_0), \alpha_1^{(n)} f_n(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_2'(\lambda_0) \right| - \ldots \\
&\ldots - \left| f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, \alpha_1^{(n)} f_n(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0) \right| + \\
&\quad + \left| f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \alpha_1^{(n)} f_n'(\lambda_0) \right| = \\
&= \alpha_1^{(n)} (|f_1'(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0)| + |f_1(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0)| + \ldots \\
&\quad\quad \ldots + |f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_n'(\lambda_0)|) = \alpha_1^{(n)} (\det F(\lambda))'_{\lambda=\lambda_0} \neq 0,
\end{aligned}
$$

оскільки $\alpha_1^{(n)} \neq 0$ завдяки відмінності від нуля вектора $\varphi_1$, а $(\det F(\lambda))'_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$ за припущенням.

Припустимо тепер, що $p = 2$. Тоді за доведеним

$$|f_1(\lambda_0 t), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), F'(\lambda_0)\varphi_1| = 0,$$

і друге рівняння в системі (6) є розв'язним. Позначаючи

$$\varphi_2 = \mathrm{col}\left(\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_2^{(n)}\right),$$

з нього отримуємо

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_2^{(i)} f_i(\lambda_0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{(i)} f_i'(\lambda_0) = 0. \tag{9}$$

Покажемо, що

$$|f_1(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), F'(\lambda_0)\varphi_2 + \frac{1}{2}\,F''(\lambda_0)\varphi_1| \neq 0.$$

Беручи до уваги рівності (8), (9) і використовуючи властивості визначників, дістаємо

$$|f_1(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), F'(\lambda_0)\varphi_2| = \left|f_1(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \sum_{i=1}^{n} \alpha_2^{(i)} f_i'(\lambda_0)\right| =$$

$$= \left|\alpha_2^{(1)} f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_1'(\lambda_0)\right| +$$

$$+ \left|f_1(\lambda_0), \alpha_2^{(2)} f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_2'(\lambda_0)\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, \alpha_2^{(n-1)} f_{n-1}(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0)\right| +$$

$$+ \left|f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \alpha_2^{(n)} f_n'(\lambda_0)\right| =$$

$$= - \left|\sum_{i=2}^{n} \alpha_2^{(i)} f_i(\lambda_0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{(i)} f_i'(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_1'(\lambda_0)\right| -$$

$$- \left|f_1(\lambda_0), \alpha_2^{(1)} f_1(\lambda_0) + \sum_{i=3}^{n} \alpha_2^{(i)} f_i(\lambda_0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{(i)} f_i'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_2'(\lambda_0)\right| - \ldots$$

$$\ldots - \left|f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-2}(\lambda_0), \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_2^{(i)} f_i(\lambda_0) + \alpha_2^{(n)} f_n(\lambda_0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{(i)} f_i'(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0)\right| +$$

$$+ \left|f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \alpha_2^{(n)} f_n'(\lambda_0)\right| =$$

$$= \left|f_1'(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \alpha_2^{(n)} f_n(\lambda_0)\right| +$$

$$+ \left|f_1'(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{(i)} f_i'(\lambda_0)\right| +$$

$$+ \left|f_1(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \alpha_2^{(n)} f_n(\lambda_0)\right| +$$

$$+ \left|f_1(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{(i)} f_i'(\lambda_0)\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|f_1(\lambda_0), \ldots, f_{n-2}(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0), \alpha_2^{(n)} f_n(\lambda_0)\right| +$$

$$+\left|f_1(\lambda_0),\ldots,f_{n-2}(\lambda_0),f'_{n-1}(\lambda_0),\sum_{i=1}^{n}\alpha_1^{(i)}f'_i(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f_1(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),\alpha_2^{(n)}f'_n(\lambda_0)\right|=$$

$$=\left|f'_1(\lambda_0),f_2(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),\alpha_2^{(n)}f_n(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f'_1(\lambda_0),\alpha_1^{(2)}f_2(\lambda_0),f_3(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),f'_2(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f'_1(\lambda_0),f_2(\lambda_0),\alpha_1^{(3)}f_3(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),f'_3(\lambda_0)\right|+\ldots$$

$$\ldots+\left|f'_1(\lambda_0),f_2(\lambda_0),\ldots,\alpha_1^{(n-1)}f_{n-1}(\lambda_0),f'_{n-1}(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f'_1(\lambda_0),f_2(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),\alpha_1^{(n)}f'_n(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f_1(\lambda_0),f'_2(\lambda_0),f_3(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),\alpha_2^{(n)}f_n(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|\alpha_1^{(1)}f_1(\lambda_0),f'_2(\lambda_0),f_3(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),f'_1(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f_1(\lambda_0),f'_2(\lambda_0),\alpha_1^{(3)}f_3(\lambda_0),f_4(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),f'_3(\lambda_0)\right|+\ldots$$

$$\ldots+\left|f_1(\lambda_0),f'_2(\lambda_0),f_3(\lambda_0),\ldots,\alpha_1^{(n-1)}f_{n-1}(\lambda_0),f'_{n-1}(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f_1(\lambda_0),f'_2(\lambda_0),f_3(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),\alpha_1^{(n)}f'_n(\lambda_0)\right|+\ldots$$

$$\ldots+\left|f_1(\lambda_0),\ldots,f_{n-2}(\lambda_0),f'_{n-1}(\lambda_0),\alpha_2^{(n)}f_n(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|\alpha_1^{(1)}f_1(\lambda_0),f_2(\lambda_0),\ldots,f_{n-2}(\lambda_0),f'_{n-1}(\lambda_0),f'_1(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f_1(\lambda_0),\alpha_1^{(2)}f_2(\lambda_0),f_3(\lambda_0),\ldots,f_{n-2}(\lambda_0),f'_{n-1}(\lambda_0),f'_2(\lambda_0)\right|+\ldots$$

$$\ldots+\left|f_1(\lambda_0),\ldots,\alpha_1^{(n-2)}f_{n-2}(\lambda_0),f'_{n-1}(\lambda_0),f'_{n-2}(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f_1(\lambda_0),\ldots,f_{n-2}(\lambda_0),f'_{n-1}(\lambda_0),\alpha_1^{(n)}f'_n(\lambda_0)\right|+$$

$$+\left|f_1(\lambda_0),\ldots,f_{n-1}(\lambda_0),\alpha_2^{(n)}f'_n(\lambda_0)\right|=$$

$$=\alpha_2^{(n)}\sum_{i=1}^{n}\left|f_1(\lambda_0),\ldots,f_{i-1}(\lambda_0),f'_i(\lambda_0),f_{i+1}(\lambda_0),\ldots,f_n(\lambda_0)\right|+$$

$$+\,\alpha_1^{(n)}\Bigg(\big|f_1'(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0)\big| +$$

$$+\sum_{i=3}^{n}\big|f_1(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), \ldots, f_{i-1}(\lambda_0), f_i'(\lambda_0), f_{i+1}(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0)\big| +$$

$$+\big|f_1'(\lambda_0), f_2(\lambda_0), f_3'(\lambda_0), f_4(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0)\big| +$$

$$+\big|f_1(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3't(\lambda_0), f_4(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0)\big| +$$

$$+\sum_{i=4}^{n}\big|f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), f_3'(\lambda_0), f_4(\lambda_0), \ldots, f_{i-1}(\lambda_0), f_i'(\lambda_0), f_{i+1}(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0)\big| + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i=1}^{n-1}\big|f_1(\lambda_0), \ldots, f_{i-1}(\lambda_0), f_i'(\lambda_0), f_{i+1}(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_n'(\lambda_0)\big|\Bigg) +$$

$$+\,\alpha_1^{(1)}(|f_1'(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_1(\lambda_0)| +$$

$$+\big|f_1'(\lambda_0), f_2(\lambda_0), f_3'(\lambda_0), f_4(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_1(\lambda_0)\big| + \ldots$$

$$\ldots + |f_1'(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-2}(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0), f_1(\lambda_0)|) +$$

$$+\,\alpha_1^{(2)}(|f_1'(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), f_{n-1}(\lambda_0), f_2(\lambda_0)| +$$

$$+\big|f_1(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3'(\lambda_0), f_4(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_2(\lambda_0)\big| + \ldots$$

$$\ldots + |f_1(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), \ldots, f_{n-2}(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0), f_2(\lambda_0)|) + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_1^{(n-1)}(|f_1'(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-2}(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0), f_{n-1}(\lambda_0)| +$$

$$+\big|f_1(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), \ldots, f_{n-2}(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0), f_{n-1}(\lambda_0)\big| + \ldots$$

$$\ldots + |f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-3}(\lambda_0), f_{n-2}'(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0), f_{n-1}(\lambda_0)|).$$

У свою чергу

$$\left|f_(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \frac{1}{2}\,F''(\lambda_0)\varphi_1\right| = \frac{1}{2}\,\left|f_1(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \sum_{i=1}^{n}\alpha_1^{(i)}f_i''(\lambda_0)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{n}\left|f_1(\lambda_0), \ldots, f_{i-1}(\lambda_0), \alpha_1^{(i)}f_i(\lambda_0), f_{i+1}(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_i''(\lambda_0)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\,\alpha_1^{(n)}\sum_{i=1}^{n}\big|f_1(\lambda_0), \ldots, f_{i-1}(\lambda_0), f_i''(\lambda_0), f_{i+1}(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), f_n(\lambda_0)\big|\,.$$

Тоді, врахувавши, що

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f_1(\lambda_0), \ldots, f_{i-1}(\lambda_0), f_i'(\lambda_0), f_{i+1}(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0) \right| = (\det F(\lambda_0))' = 0,$$

і використавши співвідношення (8), матимемо

$$\left| f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), F'(\lambda_0)\varphi_2 + \frac{1}{2} F''(\lambda_0)\varphi_1 \right| =$$

$$= \alpha_1^{(n)} \left( \sum_{i=2}^{n} \left| f_1'(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{i-1}(\lambda_0), f_i'(\lambda_0), f_{i+1}(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0) \right| + \right.$$

$$+ \sum_{i=3}^{n} \left| f_1(\lambda_0), f_2'(\lambda_0), f_3(\lambda_0), \ldots, f_{i-1}(\lambda_0), f_i'(\lambda_0), f_{i+1}(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0) \right| + \ldots$$

$$+ \left| f_1(\lambda_0), \ldots, f_{n-2}(\lambda_0), f_{n-1}'(\lambda_0), f_n'(\lambda_0) \right| +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left| f_1(\lambda_0), \ldots, f_{i-1}(\lambda_0), f_i''(\lambda_0), f_{i+1}(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0) \right| \right) = \frac{1}{2} \alpha_1^{(n)} (\det F(\lambda_0))'' \neq 0.$$

Продовжуючи аналогічні міркування, методом математичної індукції доведемо, що

$$\left| f_1(\lambda_0), f_2(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} F^{(i)}(\lambda_0)\varphi_{k+1-i} \right| = \frac{1}{k!} \alpha_1^{(n)} \frac{d^k}{d\lambda^k} (\det F(\lambda_0)) = 0$$

при $k < p$ і, отже, рівняння (6) розв'язні відносно векторів $\varphi_i$, $i = \overline{1, p}$, а

$$\left| f_1(\lambda_0), \ldots, f_{n-1}(\lambda_0), \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i!} F^{(i)}(\lambda_0)\varphi_{p+1-i} \right| = \frac{1}{p!} \alpha_1^{(n)} \frac{d^p}{d\lambda^p} (\det F(\lambda_0)) \neq 0,$$

звідки випливає несумісність рівняння (7).

Лему доведено.

Позначимо тепер через $F(\tau, \lambda)$ квазіполіном

$$F(\tau, \lambda) = A_0(\tau) - \lambda B(\tau) + e^{-\lambda\Delta(\tau)} C_0(\tau), \tag{9'}$$

який визначає властивості системи рівнянь (1).

Припустимо, що виконуються такі умови:

5°) рівняння (4) на заданому відрізку $[0; T]$ має ізольований корінь $\lambda_0(\tau)$ кратності $p < \infty$;

6°) $\operatorname{rank} F(\tau, \lambda_0(\tau)) = n - 1 \; \forall \tau \in [0; T]$.

Тоді згідно з доведеною вище лемою цьому кореню відповідає жорданів ланцюжок завдовжки $p$, вектори якого $\varphi_i(\tau)$, $i = \overline{1, p}$, задовольняють співвідношення

$$F(\tau, \lambda_0(\tau))\, \varphi_1(\tau) = 0, \tag{10}$$

$$F(\tau,\lambda_0(\tau))\,\varphi_k(\tau)+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}\,F_\lambda^{(i)}\,(\tau,\lambda_0(\tau))\varphi_{k-i}(\tau)\,=\,0,\quad k\,=\,\overline{2,p}. \tag{11}$$

Вектори $\varphi_i(\tau)$, $i=\overline{1,p}$, із рівняння (10), (11) визначаються неоднозначно. Цю неоднозначність усунемо, визначаючи їх таким чином. Оскільки всі елементи матриць $A_0(\tau)$, $B(\tau)$, $C_0(\tau)$ і функція $\Delta(\tau)$ згідно з умовою $2^\circ$ нескінченно диференційовні на заданому відрізку $[0;T]$, то за лемою 3.1 із [1, с. 117] функція $\lambda_0(\tau)$ також нескінченно диференційовна на цьому відрізку. Отже, всі елементи матриці $F(\tau,\lambda_0(\tau))$ нескінченно диференційовні на $[0;T]$, і згідно з [5] $\varphi_1(\tau)$ можна визначити так, щоб він мав похідні будь-якого порядку. Позначивши його через $\varphi(\tau)$, наступні вектори даного ланцюжка визначатимемо за формулами

$$\varphi_k(\tau)\,=\,-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}\,H(\tau)F_\lambda^{(i)}(\tau,\lambda_0(\tau))\varphi_{k-i}(\tau),\quad k\,=\,\overline{2,p}, \tag{12}$$

де $H(\tau)$ — напівобернена матриця до матриці $F(\tau,\lambda_0(\tau))$, яку визначимо так, щоб усі її елементи були нескінченно диференційовними на заданому проміжку [2].

Враховуючи рекурентний характер формули (12), її можна перетворити до вигляду

$$\varphi_k(\tau)\,=\,\sum_{i=1}^{k}(-1)^iP_i^k(H(\tau)F_\lambda(\tau,\lambda_0(\tau)))\varphi(\tau),\quad k\,=\,\overline{1,p}, \tag{13}$$

де символом $P_i^k(H(\tau)F_\lambda(\tau,\lambda_0(\tau)))$ позначено суму всіх можливих добутків і множників

$$\frac{1}{s_1!}\,H(\tau)F_\lambda^{(s_1)}(\tau,\lambda_0(\tau)),\,\frac{1}{s_2!}H(\tau)F_\lambda^{(s_2)}(\tau,\lambda_0(\tau)),\ldots,\,\frac{1}{s_i!}H(\tau)F_\lambda^{(s_i)}(\tau,\lambda_0(\tau))$$

таких, що $s_1+s_2+\ldots+s_i\,=\,k$ :

$$P_i^k(HF_\lambda)\,=\sum_{s_1+s_2+\ldots+s_i=k}\frac{1}{s_1!}HF_\lambda^{(s_1)}\frac{1}{s_2!}HF_\lambda^{(s_2)}\cdots\frac{1}{s_i!}HF_\lambda^{(s_i)}.$$

Формула (13) легко доводиться методом математичної індукції.

Позначимо через $\psi(\tau)$ елемент нуль-простору матриці $F^*(\tau,\lambda_0(\tau))$, спряженої з $F(\tau,\lambda_0(\tau))$, який, як і вектор $\varphi(\tau)$, визначимо так, щоб він був нескінченно диференційовним на $[0;T]$. Тоді з розв'язності рівнянь (11) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(F_\lambda^{(i)}(\tau,\lambda_0(\tau))\varphi_{k-i}(\tau),\psi(\tau)\right)\,=\,0,\quad k\,=\,\overline{2,p},\quad\forall\tau\,\in\,[0;T]. \tag{14}$$

Оскільки при $k\,=\,p+1$ рівняння нерозв'язне, то

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i!}\left(F_\lambda^{(i)}(\tau,\lambda_0(\tau))\varphi_{p+1-i}t(\tau),\psi(\tau)\right)\,\neq\,0\quad\forall\tau\,\in\,[0;T].$$

Із урахуванням (13) ці співвідношення набирають вигляду

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\left(\tilde{P}_i^k(HF_\lambda)\varphi,\psi\right)=0,\quad k=\overline{1,p-1},$$
$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^i(\tilde{P}_i^p(HF_\lambda)\varphi,\psi)\neq 0\quad\forall\tau\in[0;T],\tag{15}$$

де символи $\tilde{P}_i^k(HF_\lambda)$ і $P_i^k(HF_\lambda)$ пов'язані співвідношенням

$$H\tilde{P}_i^k(HF_\lambda)=P_i^k(HF_\lambda).$$

Оскільки вектор $\psi(\tau)$ визначається з точністю до довільного скалярного множника, то за рахунок цього множника можна досягти, щоб

$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\left(\tilde{P}_i^k(HF_\lambda)\varphi,\psi\right)=1,\tag{16}$$

що й буде передбачатись у подальших викладках.

Перейдемо до побудови розв'язків системи рівнянь (1). Має місце така теорема.

**Теорема.** *Нехай виконуються умови 1°–5°, а також наступна:*

$$\Big(A_1(\tau)\varphi(\tau)+e^{-\lambda_0(\tau)\Delta(\tau)}C_1(\tau)\varphi(\tau)-B(\tau)\varphi'(\tau)-$$
$$-\Delta(\tau)e^{-\lambda_0(\tau)\Delta(\tau)}C_0(\tau)\varphi'(\tau)+\frac{1}{2}e^{-\lambda_0(\tau)\Delta(\tau)}\Delta^2(t)\lambda_0'(t)C_0(t),\psi(\tau)\Big)\neq 0\quad\forall\tau\in[0;T].\tag{17}$$

*Тоді система рівнянь (1) на проміжку $\left[0;\dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ має $p$ частинних формальних розв'язків вигляду*

$$x(t,\varepsilon)=u(\tau,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda(s,\mu)ds\right),\tag{18}$$

*де $u(\tau,\mu)$ — $n$-вимірний вектор, $\lambda(\tau,\mu)$ — скалярна функція, які зображуються у вигляді формальних розвинень*

$$u(\tau,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k u_k(\tau),\quad\lambda(\tau,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\lambda_k(\tau),\tag{19}$$

*в яких $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$.*

***Доведення.*** Необхідно показати, що вектор-функція (18) формально задовольняє систему (1).

Підставляючи (18) у (1), маємо

$$A(\tau,\varepsilon)u(\tau,\mu) = \lambda(\tau,\mu)B(\tau)u(\tau,\mu)-$$
$$- C(\tau,\varepsilon)u(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau-\varepsilon\Delta(\tau)}\lambda(s,\mu)ds\right) + \varepsilon B(\tau)u'(\tau,\mu) \qquad (20)$$

(тут і далі штрихом позначено диференціювання по змінній $\tau$).

Позначимо

$$\tilde{u}(\tau,\mu) = u\left(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\mu\right),$$
$$g(\tau,\mu) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau-\varepsilon\Delta(\tau)}\lambda(s,\mu)ds\right)$$

і розкладемо ці функції в формальні ряди за степенями параметра $\mu$.

Згідно з (19) для вектор-функції $\tilde{u}(\tau,\mu)$ маємо

$$\tilde{u}(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k u_k(\tau-\varepsilon\Delta(\tau)).$$

Оскільки

$$\left.\frac{d^s u_k(\tau-\varepsilon\Delta(\tau))}{d\varepsilon^s}\right|_{\varepsilon=0} = (-1)^s\Delta^s(\tau)u_k^{(s)}(\tau)$$

і, отже,

$$u_k(\tau-\varepsilon\Delta(\tau)) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}(-1)^s\Delta^s(\tau)u_k^{(s)}(\tau)\varepsilon^s,$$

то

$$\tilde{u}(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{1}{s!}\Delta^s(\tau)u_k^{(s)}(\tau)\mu^{k+sp}.$$

Ввівши індекс $k+sp=j$ замість $k$, дістанемо

$$\tilde{u}(\tau,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=sp}^{\infty}(-1)^s\frac{1}{s!}\Delta^s(\tau)u_{j-sp}^{(s)}(\tau)\mu^j = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\left[\frac{j}{p}\right]}(-1)^s\frac{1}{s!}\Delta^s(\tau)u_{j-sp}^{(s)}(\tau)\mu^j,$$

де символом $[a]$ позначено цілу частину числа $a$.

Отже,

$$\tilde{u}(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\tilde{u}_k(\tau), \qquad (21)$$

де

$$\tilde{u}_k(\tau) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]} (-1)^i \frac{1}{i!} \Delta^i(\tau) u_{k-ip}^{(i)}(\tau), \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{22}$$

Зокрема,

$$\tilde{u}_k(\tau) = u_k(\tau), \quad k < p. \tag{23}$$

Для розвинення в ряд функції $g(\tau, \mu)$ розглянемо спочатку вираз

$$a(\tau, \mu) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\tau}^{\tau - \varepsilon\Delta(\tau)} \lambda(s, \mu)\, ds,$$

який з урахуванням (19) записується у вигляді

$$a(\tau, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r a_r(\tau, \varepsilon), \tag{24}$$

де

$$a_r(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\tau}^{\tau - \varepsilon\Delta(\tau)} \lambda_r(s)\, ds, \quad r = 0, 1, \ldots .$$

Щоб розвинути функції $a_r(\tau, \varepsilon)$ в формальний ряд за степенями $\varepsilon$, знайдемо спочатку їх похідні по $\varepsilon$ (при фіксованому $\tau$ ), а потім обчислимо їх при $\varepsilon = 0$ за допомогою граничного переходу при $\varepsilon \to 0$. Методом математичної індукції неважко переконатись, що

$$a_r^{(k)}(\tau, \varepsilon) = (-1)^k k! \Bigg[ \varepsilon^{-(k+1)} \int\limits_{\tau}^{\tau - \varepsilon\Delta(\tau)} \lambda_r(s)\, ds +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(i+1)!} \Delta^{i+1} \varepsilon^{i-k} \lambda_r^{(i)}(\tau - \varepsilon\Delta(\tau)) \Bigg], \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{25}$$

Записуючи підінтегральну функцію $\lambda_r(s)$ за формулою Тейлора в околі точки $s = \tau$ у вигляді

$$\lambda_r(s) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_r^{(i)}(\tau)}{i!} (s - \tau)^i + \frac{\lambda_r^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (s - \tau)^{k+1}, \quad c \in (\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \tau),$$

маємо

$$\int\limits_{\tau}^{\tau - \varepsilon\Delta(\tau)} \lambda_r(s)\, ds = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \frac{\lambda_r^{(i)}(\tau)}{(i+1)!} \varepsilon^{i+1} \Delta^{i+1} + (-1)^k \frac{\lambda_r^{(k+1)}(c)}{(k+2)!} \varepsilon^{k+2} \Delta^{k+2}. \tag{26}$$

Підставивши (26) у (25), дістанемо

$$a_r^{(k)}(\tau,\varepsilon) = (-1)^k k!\varepsilon^{-k}\Delta(\tau)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(i+1)!}\,\varepsilon^i\Delta^i(\tau)\left[\lambda_r^{(i)}(\tau-\varepsilon\Delta(\tau))+(-1)^{i+1}\lambda_r^{(i)}(\tau)\right]-$$

$$-\frac{\lambda_r^{(k)}(\tau)\Delta^{k+1}(\tau)}{k+1}+\ldots, \qquad (27)$$

де трьома крапками позначено доданки, які прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$.

Застосовуючи формулу Тейлора до функції $\lambda_r^{(i)}(\tau-\varepsilon\Delta(\tau))$ в околі точки $\tau$, маємо

$$\lambda_r^{(i)}(\tau-\varepsilon\Delta(\tau)) = \sum_{j=0}^{k-i}(-1)^j\frac{1}{j!}\lambda_r^{(i+j)}(\tau)\varepsilon^j\Delta^j+(-1)^{k+1+i}\frac{\lambda_r^{(k+1-i)}(c_i)}{(k+1-i)!}\,\varepsilon^{k+1-i}\Delta^{k+1-i},$$

$$c_i \in (\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\tau).$$

Підставляючи цей вираз у (27), після нескладних перетворень, пов'язаних із перегрупуванням доданків та заміною індексів, отримуємо

$$a_r^{(k)}(\tau,\varepsilon t) = -\frac{\lambda_r^{(k)}(\tau)\Delta^{k+1}}{k+1}+k!\,\Delta^{k+1}\lambda_r^{(k)}(\tau)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{1}{(i+1)!}\frac{1}{(k-i)!}+$$

$$+(-1)^k k!\varepsilon^{-k}\Delta\left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\lambda_r^{(j)}(\tau)\varepsilon^j\Delta^j\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\frac{1}{(i+1)!}\frac{1}{(j-i)!}-\frac{1}{(j+1)!}\right)\right]+\ldots.$$

Оскільки

$$\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\frac{1}{(i+1)!}\frac{1}{(j-i)!}-\frac{1}{(j+1)!} = \sum_{i=0}^{j+1}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!}\frac{1}{(j+1-i)!} =$$

$$= -\frac{1}{(j+1)!}\sum_{i=0}^{j+1}(-1)^i\frac{1}{i!}\frac{(j+1)!}{(j+1-i)!} = -\frac{1}{(j+1)!}\sum_{i=0}^{j+1}(-1)^i C_{j+1}^i = 0$$

згідно з властивістю біномних коефіцієнтів, а

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{1}{(i+1)!}\frac{1}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{1}{(i+1)!}\frac{1}{(k-i)!}+(-1)^{k+1}\frac{1}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}+(-1)^{k+1}\frac{1}{(k+1)!},$$

то звідси дістаємо

$$a_r^{(k)}(\tau,\varepsilon) = (-1)^{k+1}\frac{\lambda_r^{(k)}(\tau)\Delta^{k+1}(\tau)}{k+1}+\ldots.$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, остаточно маємо

$$a_r^{(k)}(\tau, 0) = (-1)^{k+1} \frac{1}{k+1} \lambda_r^{(k)}(\tau) \Delta^{k+1}(\tau), \quad k, r = 0, 1, \ldots . \tag{28}$$

Записавши тепер ряди Тейлора для функцій $a_r(\tau, \varepsilon)$, підставимо їх у (24). Згрупувавши в отриманому розвиненні доданки при однакових степенях $\mu$, дістанемо

$$a(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \alpha_k t(\tau), \tag{29}$$

де

$$\alpha_k(\tau) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]} (-1)^{i+1} \frac{1}{(i+1)!} \lambda_{k-ip}^{(i)}(\tau) \Delta^{i+1}(\tau), \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{30}$$

Маючи розвинення (29) для функції $a(\tau, \mu)$, функцію $g(t, \mu) = e^{a(t, \mu)}$ запишемо у вигляді ряду Тейлора в околі $a(t, 0) = \alpha_0(\tau) = -\lambda_0(\tau)\Delta(\tau)$ :

$$g(t, \mu) = e^{a(t,0)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (a(t, \mu) - a(t, 0))^s = e^{-\lambda_0(\tau)\Delta(\tau)} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \alpha_k(\tau)\right)^s\right).$$

Згрупувавши доданки з однаковими степенями $\mu$, остаточно отримаємо

$$g(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k g_k(\tau), \tag{31}$$

де

$$g_k(\tau) = e^{-\lambda_0(\tau)\Delta(\tau)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} P_i^k(\alpha), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{32}$$

а

$$P_i^k(\alpha) = \sum_{j_1 + j_2 + \ldots + j_i = k} \alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \ldots \alpha_{j_i}$$

— сума всіх можливих добутків $i$ множників $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_i}$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює $k$.

Повернемось до рівняння (20). Із урахуванням введених вище позначень запишемо його у вигляді

$$A(\tau, \varepsilon) u(\tau, \mu) = \lambda(\tau, \mu) B(\tau) u(\tau, \mu) - C(\tau, \varepsilon) \tilde{u}(\tau, \mu) g(\tau, \mu) - \varepsilon B(\tau) u'(\tau, \mu). \tag{33}$$

Підставивши в це рівняння розвинення (2), (21), (31) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $\mu$, отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$F(\tau, \lambda_0(\tau)) u_0(\tau) = 0, \tag{34}$$

$$F(\tau, \lambda_0(\tau)) u_k(\tau) = b_k(\tau), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

де

$$b_k(\tau) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i(\tau) B(\tau) - g_i^{(1)}(\tau) C_0(\tau)) u_{k-i}(\tau) + d_k(\tau), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{36}$$

$$d_k(\tau) = -\sum_{i=0}^{k-p} \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-i}{p}\right]} g_i(\tau) C_j(\tau) \tilde{u}_{k-i-jp}(\tau) - \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]} A_i(\tau) u_{k-pi}(\tau) +$$

$$+ B(\tau) u'_{k-p}(\tau) - \sum_{i=0}^{k-p} g_i(\tau) C_0(\tau) \hat{u}_{k-i}(\tau) - \sum_{i=p}^{k} g_i^{(2)}(t) C_0(t) u_{k-i}(t), \;\; k = p, p+1, \ldots, \tag{37}$$

і у відповідності з (22) введено позначення

$$\tilde{u}_k(\tau) = u_k(\tau) + \hat{u}_k(\tau), \hat{u}_k(\tau) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]} (-1)^i \frac{1}{i!} \Delta^i(\tau) u^{(i)}_{k-pi}(\tau), \quad k = p, p+1, \ldots,$$

$$g_i(t) = g_i^{(1)}(t) + g_i^{(2)}(t), \tag{38}$$

де $g_i^{(1)}(t)$ — та частина виразу $g_i(t)$, яка містить тільки перший доданок $\lambda_k(t)\Delta(t)$ в складі $a_k(t)$, а $g_i^{(2)}(t)$ — друга частина, яка містить усі наступні доданки відповідно до формули (30) (при $k < p$, $g_i^{(1)}(t) = g_i t(t)$).

З рівняння (35) знайдемо

$$u_0(\tau) = \varphi(\tau). \tag{39}$$

Рівняння (35) будуть розв'язними відносно векторів $u_k(\tau)$ тоді і тільки тоді, коли вектори $b_k(\tau)$ будуть ортогональними до вектора $\psi(\tau)$ — елемента нуль-простору матриці $F^*(\tau, \lambda_0(\tau))$ :

$$(b_k(\tau), \psi(\tau)) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{40}$$

За виконання цієї умови вектори $u_k(\tau)$ визначатимемо за формулою

$$u_k(\tau) = H(\tau)\, b_k(\tau), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{41}$$

Умову (40) використаємо для знаходження функцій $\lambda_k(\tau)$, $k = 1, 2, \ldots$. З цією метою перетворимо вираз для вектора $b_k(\tau)$, виконавши взаємну підстановку формул (36), (39). При $k < p$ маємо

$$b_1(\tau) = -\lambda_1(\tau) F'_\lambda(\tau, \lambda_0(\tau)) \varphi(\tau),$$

$$b_2(\tau) = \lambda_1^2(\tau)\left[F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau))H(\tau)F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau)) - \frac{1}{2}F_\lambda''(\tau,\lambda_0(\tau))\right]\varphi(\tau) -$$

$$-\lambda_2(\tau)F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau))\varphi(\tau),$$

$$b_3(\tau) = \lambda_1^3(\tau)\left[-F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau))(H(\tau)F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau)))^2 + \frac{1}{2!}F_\lambda''t(\tau,\lambda_0(\tau))H(\tau)F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau))H(\tau)F_\lambda''(\tau,\lambda_0(\tau)) - \frac{1}{3!}F_\lambda'''(\tau,\lambda_0(\tau))\right]\varphi(\tau) +$$

$$+2\lambda_1(\tau)\lambda_2(\tau)\left[F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau))H(\tau)F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau)) - \frac{1}{2!}F_\lambda''(\tau,\lambda_0(\tau))\right]\varphi(\tau) -$$

$$-\lambda_3(\tau)F_\lambda'(\tau,\lambda_0(\tau))\varphi(\tau),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Аналізуючи ці формули, приходимо до висновку, що в загальному випадку

$$b_k(\tau) = \sum_{j=1}^{k} P_j^k(\lambda)\sum_{i=1}^{j}(-1)^i\tilde{P}_i^j(H(\tau)F_\lambda(\tau,\lambda_0(\tau)))\varphi, \quad k < p. \tag{42}$$

Доведемо цю формулу методом математичної індукції. Її справедливість при $k = \overline{1,3}$ встановлено вище. Припустимо, що вона справджується при $k < s < p$. Згідно з (36)

$$b_s = \sum_{i=1}^{s}(\lambda_i B - g_i C_0)u_{s-i}. \tag{43}$$

У свою чергу, враховуючи (32), маємо

$$\lambda_i B - g_i C_0 = \lambda_i B - e^{-\lambda_0\Delta}\sum_{k=1}^{i}(-1)^k\frac{1}{k!}\Delta^k P_k^i(\lambda)C_0 =$$

$$= \lambda_i B + \Delta e^{-\lambda_0\Delta}P_1^i(\lambda)C_0 - e^{-\lambda_0\Delta}\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\frac{1}{k!}\Delta^k P_k^i(\lambda)C_0 =$$

$$= \lambda_i(B + \Delta e^{-\lambda_0\Delta}C_0) - e^{-\lambda_0\Delta}\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\frac{1}{k!}\Delta^k P_k^i(\lambda)C_0 =$$

$$= -\lambda_i F_\lambda' - \sum_{k=2}^{i}\frac{1}{k!}F_\lambda^{(k)}P_k^i(\lambda) = -\sum_{k=1}^{i}P_k^i(\lambda)\frac{1}{k!}F_\lambda^{(k)}. \tag{44}$$

Крім того, згідно з (41) за припущенням індукції

$$u_{s-i} = \sum_{j=1}^{s-i} P_j^{s-i}(\lambda) \sum_{r=1}^{j} (-1)^r P_r^j (HF_\lambda)\varphi, \quad i = \overline{1, s-1}.$$

Підставивши ці вирази в (43), отримаємо

$$b_s = -\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=1}^{s-i} P_k^i(\lambda) P_j^{s-i}(\lambda) \frac{1}{k!} F_\lambda^{(k)} \sum_{r=1}^{j} (-1)^r P_r^j (HF_\lambda)\varphi + (\lambda_s B - g_s C_0)\varphi.$$

Змінивши порядок підсумовування, будемо мати

$$b_s = -\sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-k} \sum_{i=k}^{s-j} P_k^i(\lambda) P_j^{s-i}(\lambda) \frac{1}{k!} F_\lambda^{(k)} \sum_{r=1}^{j} (-1)^r P_r^j (HF_\lambda)\varphi + (\lambda_s B - g_s C_0)\varphi.$$

Взявши до уваги, що

$$\sum_{i=k}^{s-j} P_k^i(\lambda) P_j^{s-i}(\lambda) = P_{k+j}^s(\lambda),$$

дістанемо

$$b_s = -\sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-k} P_{k+j}^s(\lambda) \frac{1}{k!} F_\lambda^{(k)} \sum_{r=1}^{j} (-1)^r P_r^j (HF_\lambda)\varphi + (\lambda_s B - g_s C_0)\varphi.$$

Поклавши $k + j = i$ замість $j$ і змінивши порядок підсумовування, отримаємо

$$b_s = \sum_{i=2}^{s} P_i^s(\lambda) \sum_{r=1}^{i-1} (-1)^{r+1} \sum_{k=1}^{i-r} \frac{1}{k!} F_\lambda^{(k)} P_r^{i-k} (HF_\lambda)\varphi + (\lambda_s B - g_s C_0)\varphi.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{i-r} \frac{1}{k!} F_\lambda^{(k} P_r^{i-k}(HF_\lambda) = \tilde{P}_{r+1}^i (HF_\lambda),$$

то, поклавши $r + 1 = j$ і врахувавши (44), знайдемо

$$b_s = \sum_{i=2}^{s} P_i^s(\lambda) \sum_{j=2}^{i} (-1)^j \tilde{P}_j^i (HF_\lambda)\varphi - \sum_{i=1}^{s} P_i^s(\lambda) \tilde{P}_1^s (HF_\lambda) = \sum_{i=1}^{s} P_i^s(\lambda) \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \tilde{P}_j^i (HF_\lambda)\varphi,$$

звідки випливає, що формула (42) справджується і при $k = s$. Отже, вона має місце при всіх $k < p$.

При $k \geq p$ у складі виразу для вектора $b_k$ з'являються доданки „другого роду", які містять вектори $d_k(\tau)$, $k = p, p+1, \ldots$. Позначивши частину виразу для вектора $b_k$, яка містить ці доданки, через $\overline{b}_k(\tau)$, продовжимо далі, при $k \geq p$, взаємну підстановку формул

(36), (41). Очевидно, що при цьому перший доданок виразу (36), до складу якого не входитимуть члени „другого роду", перетворюватиметься так само, як і при $k < p$, і набуватиме вигляду (42). Водночас для векторів $\bar{b}_k(\tau)$ матимемо

$$\bar{b}_p = d_p,$$

$$\bar{b}_{p+1} = (\lambda_1 B - g_1 C_0) H d_p + d_{p+1},$$

$$\bar{b}_{p+2} = \left[((\lambda_1 B - g_1 C_0)H)^2 + (\lambda_2 B - g_2 C_0)H\right] d_p + (\lambda_1 B - g_1 C_0) H d_{p+1} + d_{p+2},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Продовжуючи цей процес, методом математичної індукції встановлюємо, що в загальному випадку має місце формула

$$\bar{b}_{p+k} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} P_i^j((\lambda B - g C_0) H) d_{p+j-1} + d_{p+k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{45}$$

де

$$P_i^j((\lambda B - g C_0)H) = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_i=j} (\lambda_{s_1} B - g_{s_1} C_0) H (\lambda_{s_2} B - g_{s_2} C_0) H \ldots (\lambda_{s_i} B - g_{s_i} C_0) H$$

— сума всіх можливих добутків $i$ множників вигляду $(\lambda_{s_k} B - g_{s_k} C_0)H$, $k = \overline{1, i}$, з натуральними індексами, сума яких дорівнює $j$.

Об'єднавши формули (42), (45), остаточно дістанемо такий вираз для векторів $b_k(\tau)$:

$$b_k(\tau) = \sum_{j=1}^{k} P_j^k(\lambda) \sum_{i=1}^{j} (-1)^i \tilde{P}_i^j(\lambda)(HF_\lambda)\varphi + \sum_{j=1}^{k-p} \sum_{i=1}^{j} P_i^j((\lambda B - g C_0 t) H) d_{p+j-1} + d_k, \tag{46}$$

$$k = 1, 2, \ldots.$$

Скористаємось тепер формулою (46) і умовою (40) для визначення коефіцієнтів $\lambda_k(\tau)$ розвинення (19) для функції $\lambda(\tau, \mu)$. Згідно з (15) при $k < p$ умова (40) виконується. При $k = p$ із урахуванням (15), (16) вона записується у вигляді

$$P_p^p(\lambda) + (d_p, \psi) = 0.$$

Взявши до уваги, що $P_p^p(\lambda) = \lambda_1^p(\tau)$ і згідно з (37), (39), (33), (38)

$$d_p(\tau) = -g_0(\tau) C_0(\tau) \varphi(\tau) - A_1(\tau)\varphi(\tau) + B(\tau)\varphi'(\tau) - g_0(\tau) C_0(\tau) \hat{u}_p(\tau) =$$

$$= -\left(A_1(\tau) + e^{\lambda_0(\tau)\Delta(\tau)} C_1(\tau)\right)\varphi(\tau) + \left(B(\tau) + \Delta(\tau) e^{-\lambda_0(\tau)\Delta(\tau)} C_0(\tau)\right)\varphi'(\tau) =$$

$$= -\left(A_1(\tau) + e^{-\lambda_0(\tau)\Delta(\tau)} C_1(\tau)\right)\varphi(\tau) - F'_\lambda(\tau, \lambda_0(\tau))\varphi'(\tau),$$

звідси з огляду на умову (17) отримаємо $p$ різних функцій $\lambda_1(\tau)$:

$$\lambda_1^{(s)}(\tau) = \sqrt[p]{|(d_p(\tau), \psi(\tau))|} \left(\cos \frac{\arg(-(d_p, \psi)) + 2\pi(s-1)}{p} + i \sin \frac{\arg(-(d_p, \psi)) + 2\pi(s-1)}{p}\right), \tag{47}$$

$$s = \overline{1, p}.$$

Зафіксувавши одну з цих функцій, наступний коефіцієнт $\lambda_2(\tau)$ знайдемо з умови (40) при $k = p + 1$. Згідно з (46), (15), (16) ця умова запишеться у вигляді

$$P_p^{p+1}(\lambda) + P_{p+1}^{p+1}(\lambda) \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \left(\tilde{P}_i^{p+1}(HF_\lambda)\varphi, \psi\right) + ((\lambda_1 B - g_1 C_0) H d_p, \psi) + (d_{p+1}, \psi) = 0,$$

звідки

$$\lambda_2(\tau) = -\frac{1}{p\lambda_1^{p-1}} \left[\lambda_1^{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i (\tilde{P}_i^{p+1}(HF_\lambda)\varphi, \psi) + ((\lambda_1 B - g_1 C_0) H d_p, \psi) + (d_{p+1}, \psi)\right].$$

Якщо в такий спосіб функції $\lambda_i(\tau)$ (а отже, й вектори $u_i(\tau)$) буде визначено при $i < s$, то $\lambda_s(\tau)$ знаходиться з умови (40) при $k = p+s-1$. Дійсно, поклавши у виразі (46) $k = p+$ $+s-1$, і виділивши доданки з шуканою функцією $\lambda_s(t)$ та взявши до уваги співвідношення (15), (16), матимемо

$$P_p^{p+s-1}(\lambda) + \sum_{j=p+1}^{p+s-1} P_j^{p+s-1}(\lambda) \sum_{i=1}^{j} (-1)^i ((\tilde{P}_i^j(HF_\lambda)\varphi, \psi)) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{i=1}^{j} (P_i^j((\lambda B - g C_0) H) d_{p+j-1}, \psi) + (d_{p+s-1}, \psi) = 0. \tag{48}$$

Оскільки $P_p^{p+s-1}(\lambda) = p\lambda_1^{p-1}(\tau)\lambda_s(\tau) + \hat{P}_p^{p+s-1}(\lambda)$, де вираз $\hat{P}_p^{p+s-1}(\lambda)$ містить тільки ті $\lambda_i$, індекси яких $i < s$, а два наступних доданки в (48) містять уже відомі вирази згідно з припущенням індукції, то звідси знайдемо

$$\lambda_s(\tau) = -\frac{1}{p\lambda_1^{p-1}} \left[\hat{P}_p^{p+s-1}(\lambda) + \sum_{j=p+1}^{p+s-1} P_j^{p+s-1}(\lambda) \sum_{i=1}^{j} (-1)^i (\tilde{P}_i^j(HF_\lambda)\varphi, \psi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{i=1}^{j} (P_i^j((\lambda B - g C_0) H) d_{p+j-1}, \psi) + (d_{p+s-1}, \psi)\right]. \tag{49}$$

За допомогою рекурентних формул (47), (49), (41), (36), (37) можна послідовно визначити будь-які коефіцієнти формальних розвинень (19). Існування похідних, які містяться в цих формулах, запезпечується умовою 2° та нескінченною диференційовністю функції

$\lambda_0(\tau)$, вектор-функцій $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ і матриці $H(\tau)$. Згідно з (47) таким способом будується $p$ різних лінійно незалежних формальних розв'язків системи (1).

Теорему доведено.

Використовуючи методи робіт [1, 2] та результати асимптотичного аналізу загального розв'язку вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь, проведеного в [2], можна показати, що побудовані описаним способом формальні розв'язки системи (1) мають асимптотичний характер при $\varepsilon \to 0$. А саме, якщо вироджена система диференціальних рівнянь $B(\tau)\dfrac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x(t,\varepsilon)$ при досить малих $\varepsilon > 0$ задовольняє умови теореми про звідність до центральної канонічної форми [2, с. 62] і елементи спектра матричних в'язок $A(\tau,\varepsilon) - \lambda B(\tau)$, $B(\tau) - \omega A(\tau,\varepsilon)$ такі, що їх дійсні частини не змінюють знак на заданому відрізку $[0;T]$, то для кожного формального розв'язку системи (1) існує такий точний розв'язок $\tilde{x}(t,\varepsilon)$, що при будь-якому $t \in [0;L]$, $L < \dfrac{T}{\varepsilon}$, виконується нерівність

$$\|x_m(t,\varepsilon) - \tilde{x}(t,\varepsilon)\| \leq c\mu^{m+1-r} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda_m(s,\varepsilon)\,ds\right),$$

де $x_m(t,\varepsilon)$ — $m$-те наближення, утворене з формального розв'язку (18) шляхом обривання відповідних розвинень (19) на $m$-му члені; $r$ — натуральне число, яке визначається структурою спектра граничних матричних в'язок $A_0(\tau) - \lambda B(\tau)$, $B(\tau) - \omega A_0(\tau)$, поведінкою збурювальних матриць $A_k(\tau)$, $k = 1, 2, \ldots$, та числом $L$; $c$ — деяка стала, що не залежить від $\varepsilon$.


1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Пидченко Ю. П., Сотниченко Н. А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — Киев: Наук. думка, 1981. — 294 с.
2. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
3. *Самусенко П. Ф.* Побудова асимптотичних розв'язків систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу та виродженою матрицею при похідних // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 4. — С. 527–539.
4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. — М.: Наука, 1974. — Т. 3, ч. 1. — 323 с.
5. *Sibuya Y.* Some global properties of functions of one variable // Math. Anal. — 1965. — **161**, № 1. — P. 67–77.


*Одержано 18.12.08*