УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНОЇ БАГАТОЧАСТОТНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ

А. В. Дворник

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: a.dvornyk@gmail.com

We consider weakly nonlinear multifrequency autonomous differential system with small parameter in the right-hand side provided that the unperturbed system has a quasiperiodic general solution. System is reduced to a simpler form through averaging and splitting. We find sufficient conditions for preservation of an invariant torus under a small perturbation.

Рассматривается слабонелинейная многочастотная автономная система дифференциальных уравнений с малым параметром в правой части при условии, что невозмущенная система имеет квазипериодическое общее решение. С помощью усреднения и расщепления система приведена к более простому виду. Найдены достаточные условия сохранения инвариантного тора при малом возмущении.

1. Вступ. Будемо розглядати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \lambda Hx + \varepsilon X(x,\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu + \varepsilon F(x,\varphi), \tag{1}$$

де λH та μ — сталі матриця та вектор, $X(x,\varphi)$ та $F(x,\varphi)$ — достатньо гладкі по $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$ та $\varphi \in \mathbb{R}^{n_2}$ 2π-періодичні по φ дійснозначні функції, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Припускаємо, що

$$\lambda H = \operatorname{diag}(\lambda_1 H_1, \ldots, \lambda_{n_1} H_{n_1}),$$

$$\lambda_\nu > 0, \quad H_\nu = \begin{bmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & -a_\nu \end{bmatrix}, \quad a_\nu^2 + b_\nu c_\nu + 1 = 0, \quad \nu = \overline{1, n_1}.$$

Тоді $\pm i\lambda_\nu$, $\nu = \overline{1, n_1}$, — власні числа матриці λH, а загальний розв'язок системи (1) при $\varepsilon = 0$ є квазіперіодичним.

Тематика даної роботи знаходиться в межах загального методу асимптотичного інтегрування нелінійних систем, який викладено у [1, 2]. Система (1) зводиться до простішої завдяки усередненню, введенню полярних координат та розщепленню, до того ж права частина перетвореної системи залежить лише від повільних змінних.

За відсутності резонансу в наборі частот λ, μ (та в деяких резонансних випадках) відщеплюються амплітудні рівняння. Останні мають певні властивості, завдяки яким знаходяться достатні умови збереження інваріантного тора для малих ε. При цьому використовуються ідеї роботи А. М. Самойленка [3], де в такому контексті було розглянуто систему

$$\frac{dx}{dt} = \lambda Hx + \varepsilon X(x).$$

2. Асимптотичний метод. Через $\mathcal{T}_k$ будемо позначати k-вимірний тор $(C_1)^k$, де $C_1 = \mathbb{R}/[0; 2\pi]$ — коло одиничного радіуса.

Для чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}, \mu_1, \ldots, \mu_{n_2}$ введемо базис частот ω такий, що

$$\eta = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_0 & O \\ O & N_0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^0 \\ \omega^2 \end{bmatrix} = K\omega, \tag{2}$$

або

$$\lambda = K_{10}\omega^{10} = K_1\omega^1 + K_0\omega^0, \quad \mu = N_{20}\omega^{20} = N_2\omega^2 + N_0\omega^0,$$
$$\omega^{\nu 0} = \text{colon}\,(\omega^\nu, \omega^0), \quad \nu = 1, 2, \tag{3}$$

де K_ν та N_ν — цілочислові матриці розміру відповідно $n_1 \times m_\nu$ та $n_2 \times m_\nu$,

$$\text{rank}\, K = m, \quad \text{rank}\, K_{10} = m_{10}, \quad \text{rank}\, N_{20} = m_{20},$$
$$m_{j0} = m_j + m_0, \quad j = 1, 2, \quad m = m_1 + m_0 + m_2, \quad n = n_1 + n_2, \tag{4}$$

елементи ω лінійно незалежні над полем раціональних чисел.

Спочатку розглянемо випадок, коли $X(x, \varphi)$ та $F(x, \varphi)$ — квазіполіноми, тобто поліноми по $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$ і тригонометричні поліноми по $\varphi \in \mathcal{T}_{n_2}$, і застосуємо до системи (1) загальний метод асимптотичного інтегрування нелінійних систем, викладений у [1, 2].

Асимптотичний розклад розв'язку $x = x(t, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(t, \varepsilon)$ шукаємо таким чином:

$$x = y + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu u_\nu(y, \theta), \quad \varphi = \theta + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu v_\nu(y, \theta),$$

де $y = y_t(y, \theta)$, $\theta = \theta_t(y, \theta)$ задовольняють усереднену систему

$$\frac{dy}{dt} = \lambda H y + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu Y_\nu(y, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = \mu + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu(y, \theta). \tag{5}$$

Тут u_ν та v_ν — розв'язки системи рівнянь

$$L_1\, u_\nu \equiv \mathcal{L} u_\nu - \lambda H u_\nu = X_\nu(y, \theta) - Y_\nu(y, \theta), \quad L_2\, v_\nu \equiv \mathcal{L} v_\nu = F_\nu(y, \theta) - \Phi_\nu(y, \theta),$$
$$\mathcal{L} u \equiv \frac{\partial u}{\partial y}\, \lambda H y + \frac{\partial u}{\partial \theta}\, \mu, \tag{6}$$

що задовольняють умови

$$S_1\, u_\nu(y,\, \theta) = 0, \quad S_2\, v_\nu(y,\, \theta) = 0,$$

де S_1 та S_2 — усереднюючі оператори;

$$X_1(y, \theta) = X(y, \theta), \quad F_1(y, \theta) = F(y, \theta),$$

$$X_\nu(y,\theta) = -\sum_{j=1}^{\nu-1}\left[\frac{\partial u_{\nu-j}(y,\theta)}{\partial y}Y_j(y,\,\theta) + \frac{\partial u_{\nu-j}(y,\,\theta)}{\partial\theta}\Phi_j(y,\theta)\right] +$$

$$+\ \frac{1}{(\nu-1)!}\frac{d^{\nu-1}}{d\varepsilon^{\nu-1}}X\left(y+\sum_{i=1}^{\nu-1}\varepsilon^i u_i(y,\theta),\,\theta+\sum_{i=1}^{\nu-1}\varepsilon^i v_i(y,\theta)\right)\Bigg|_{\varepsilon=0},$$

$$F_\nu(y,\theta) = -\sum_{j=1}^{\nu-1}\left[\frac{\partial v_{\nu-j}(y,\theta)}{\partial y}Y_j(y,\theta) + \frac{\partial v_{\nu-j}(y,\theta)}{\partial\theta}\Phi_j(y,\theta)\right] +$$

$$+\ \frac{1}{(\nu-1)!}\frac{d^{\nu-1}}{d\varepsilon^{\nu-1}}F\left(y+\sum_{i=1}^{\nu-1}\varepsilon^i u_i(y,\theta),\theta+\sum_{i=1}^{\nu-1}\varepsilon^i v_i(y,\theta)\right)\Bigg|_{\varepsilon=0},$$

$$\nu = \overline{2,\infty},$$

$$Y_\nu(y,\theta) = S_1X_\nu(y,\theta), \quad \Phi_\nu(y,\theta) = S_2F_\nu(y,\theta), \quad \nu = \overline{1,\infty}.$$

Оператори S_1 та S_2 діють таким чином:

$$S_1X(y,\theta) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda H\tau}X\left(e^{\lambda H\tau}y,\mu\tau+\theta\right)\,d\tau,$$

$$S_2F(y,\theta) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F\left(e^{\lambda H\tau}y,\mu\tau+\theta\right)d\tau. \tag{7}$$

Обернення операторів L_1 та L_2 для визначення розв'язків рівнянь (6) відбувається згідно з формулами

$$L_1^{-1}\left[X(y,\theta)-S_1X(y,\theta)\right] = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^s\left[e^{-\lambda H\tau}X\left(e^{\lambda H\tau}y,\mu\tau+\theta\right)-S_1X(y,\theta)\right]d\tau ds,$$

$$L_2^{-1}\left[F(y,\theta)-S_2\,F(y,\theta)\right] = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^s\left[F\left(e^{\lambda H\tau}y,\mu\tau+\theta\right)-S_2F(y,\theta)\right]d\tau ds. \tag{8}$$

Як видно з (7), (8), вибір за формулою (2) пари (K,ω) не впливає на асимптотичний алгоритм.

Врахувавши (3), (4), застосуємо до (7) формулу середнього значення квазіперіодичної функції:

$$S_1X(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}e^{-HK_{10}\psi^{10}}X\left(e^{HK_{10}\psi^{10}}y,N_{20}\psi^{20}+\theta\right)\,d\psi,$$

$$S_2F(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} F\left(e^{HK_{10}\psi^{10}}\, y,\; N_{20}\psi^{20}+\theta\right)\, d\psi, \tag{9}$$

$$\psi = \mathrm{colon}\,(\psi^1,\psi^0,\psi^2), \quad \psi^{j\,0} = \mathrm{colon}\,(\psi^j,\psi^0), \quad j=1,2, \quad \psi^\nu \in \mathcal{T}_{m_\nu}, \quad \nu = 0,1,2.$$

Далі розглянемо (8). Тоді з урахуванням (3), (9) отримаємо

$$\int\limits_0^s \left[e^{-\lambda H\tau} X\left(e^{\lambda H\tau}y, \mu\tau+\theta\right) - S_1X(y,\theta)\right]\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^s \left[e^{-HK_{10}\omega^{10}\tau} X\left(e^{HK_{10}\omega^{10}\tau}\, y,\; N_{20}\omega^{20}\tau+\theta\right) - S_1X(y,\theta)\right]\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^s \sum_{k\neq 0} X_k(y,\theta)e^{i(k,\omega)\tau}d\tau = \sum_{k\neq 0}\frac{X_k(y,\theta)}{i(k,\omega)}\left[e^{i(k,\omega)s}-1\right], \tag{10}$$

де

$$X_k(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} e^{-HK_{10}\psi^{10}} X\left(e^{HK_{10}\psi^{10}}y, N_{20}\psi^{20}+\theta\right) e^{-i(k,\psi)}\, d\psi, \quad k\in\mathbb{Z}^m. \tag{11}$$

Згідно з (8), (10), (11) маємо

$$L_1^{-1}\left[X(y,\theta) - S_1X(y,\theta)\right] = \sum_{k\neq 0}\frac{X_k(y,\theta)}{i(k,\omega)}.$$

Аналогічно

$$L_2^{-1}\left[F(y,\theta) - S_2F(y,\theta)\right] = \sum_{k\neq 0}\frac{F_k(y,\theta)}{i(k,\omega)},$$

де

$$F_k(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} F\left(e^{HK_{10}\psi^{10}}y, N_{20}\psi^{20}+\theta\right) e^{-i(k,\psi)}d\psi, \quad k\in\mathbb{Z}^m.$$

Оскільки розглядувані функції є дійсними, то

$$L_1^{-1}\left[X(y,\theta) - S_1X(y,\theta)\right] = \sum_{k\neq 0}\frac{X_k^1(y,\theta)}{(k,\omega)}, \quad L_2^{-1}\left[F(y,\theta) - S_2F(y,\theta)\right] = \sum_{k\neq 0}\frac{F_k^1(y,\theta)}{(k,\omega)},$$

$$X_k^1(y,\theta) = \mathrm{Im}\, X_k(y,\theta) = -\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} e^{-HK_{10}\psi^{10}} X\left(e^{HK_{10}\psi^{10}}y, N_{20}\psi^{20}+\theta\right)\sin(k,\psi)\, d\psi,$$

$$F_k^1(y,\theta) = \operatorname{Im} F_k(y,\theta) = -\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} F\left(e^{HK_{10}\psi^{10}}y, N_{20}\psi^{20}+\theta\right)\sin(k,\psi)\,d\psi, \quad k\in\mathbb{Z}^m.$$

3. Перетворення усередненої системи. Має місце така теорема.

Теорема 1. *У будь-якій області, що не перетинається з гіперплощинами $y_{2j-1} = y_{2j} = 0$, $j = 1,\dots,n_1$, усереднена система (5) рівносильна системі типу*

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu\ge1}\varepsilon^\nu V_\nu(h,\psi), \quad \frac{d\psi}{dt} = \sum_{\nu\ge1}\varepsilon^\nu W_\nu(h,\psi), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega + \sum_{\nu\ge1}\varepsilon^\nu Z_\nu(h,\psi), \tag{12}$$

де $h\in\mathbb{R}^{n_1}$, $\operatorname{colon}(\psi,\theta)\in\mathcal{T}_n$, а функції V_ν, W_ν та Z_ν мають у області таку ж гладкість, що й Y_ν та Φ_ν.

Перехід від системи (5) до (12) відбувається шляхом введення полярних координат та їх лінійного перетворення.

Доведення. Визначимо γ_ν з рівнянь

$$a_\nu\cos2\gamma_\nu = \frac{b_\nu + c_\nu}{2}\sin2\gamma_\nu, \quad \nu = \overline{1,n_1},$$

і покладемо

$$B_\nu = \begin{bmatrix}\sin\gamma_\nu\\ \cos\gamma_\nu\end{bmatrix}, \quad B_\nu^+ = B_\nu^T, \quad \nu=\overline{1,n_1}.$$

$$B = \operatorname{diag}(B_1,\dots,B_{n_1}), \quad B^+ = B^T, \quad H = \operatorname{diag}(H_1,\dots,H_{n_1}),$$

$$e^{H\psi} = \operatorname{diag}(e^{H_1\psi_1},\dots,e^{H_{n_1}\psi_{n_1}}).$$

Згідно з [3] маємо

$$H^2 = -E, \quad B^+HB = 0, \quad B^+B = E, \quad e^{H\psi} = H\sin\psi + E\cos\psi, \tag{13}$$

де E — одинична матриця відповідного розміру.

Згідно з [1] $Y_\nu\in\operatorname{Ker}L_1$, $\Phi_\nu\in\operatorname{Ker}L_2$ і, отже, мають місце рівності

$$Y_\nu(y',\theta') = e^{-\lambda Ht}Y_\nu(e^{\lambda Ht}y', \mu t+\theta'), \quad \Phi_\nu(y',\theta') = \Phi_\nu(e^{\lambda Ht}y',\mu t+\theta'). \tag{14}$$

У квазіперіодичних функціях рівності (14) перейдемо до границі при $|t|\to\infty$ і з урахуванням (3) отримаємо

$$\begin{gathered} Y_\nu(y',\theta') = e^{-HK_{10}\widetilde{\psi}^{10}}Y_\nu(e^{HK_{10}\widetilde{\psi}^{10}}y', N_2\widetilde{\psi}^2 + N_0\widetilde{\psi}^0+\theta'),\\ \Phi_\nu(y',\theta') = \Phi_\nu\left(e^{HK_{10}\widetilde{\psi}^{10}}y', N_2\widetilde{\psi}^2 + N_0\widetilde{\psi}^0+\theta'\right), \end{gathered} \tag{15}$$

де $\widetilde{\psi}\in\mathcal{T}_m$, $\theta'\in\mathcal{T}_{n_2}$, $y'\in\mathbb{R}^{2n_1}$ є довільними.

Введемо полярні координати (ψ, h) :

$$y = e^{H\psi}Bh, \quad h \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \psi \in \mathcal{T}_{n_2}. \tag{16}$$

З (16) виразимо dy/dt через ψ, h та їхні похідні, підставимо отриманий вираз у (5) і, врахувавши (13), отримаємо систему, що рівносильна (5) (за винятком гіперплощин $h_j = 0$, $j = \overline{1, n_1}$):

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B^+ e^{-H\psi} Y_\nu(e^{H\psi}Bh, \theta), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \lambda - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B^+ H e^{-H\psi} Y_\nu(e^{H\psi}Bh, \theta)/h, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \mu + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu(e^{H\psi}Bh, \theta). \end{aligned} \tag{17}$$

Під діленням векторів розуміємо покоординатне ділення.

У нерезонансному випадку ($m = n$) рівність (15) має простий вигляд

$$Y_\nu(y', \theta') = e^{-H\psi} Y_\nu(e^{H\psi}y', \theta + \theta'), \quad \Phi_\nu(y', \theta') = \Phi_\nu(e^{H\psi}y', \theta + \theta'). \tag{18}$$

Покладемо у (18) $y' = Bh$, $\theta' = 0$ і підставимо (18) у (17):

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B^+ Y_\nu(Bh, 0), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \lambda - \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B^+ H Y_\nu(Bh, 0)/h, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \mu + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu(Bh, 0). \end{aligned} \tag{19}$$

Тут відокремлено перше рівняння з повільною змінною h, бо права частина системи не залежить від ψ та θ.

У резонансному випадку за допомогою (3), (4) продовжимо перетворення системи (17).

Для будь-якої матриці A розміру $p_1 \times p_2$ за умов $p_2 < p_1$ та $\operatorname{rank} A = p_2$ введемо псевдообернену до неї матрицю A^+ за формулою

$$A^+ = [A^T A]^{-1} A^T.$$

При цьому, очевидно, має місце рівність

$$A^+ A = E.$$

Виберемо цілочислові матриці K_3 та N_3 відповідно порядків $n_1 \times (n_1 - m_{10})$ та $n_2 \times \times (n_2 - m_{20})$ з умов

$$K_{10}^T K_3 = 0, \quad N_{20}^T N_3 = 0, \quad \operatorname{rank} K_3 = n_1 - m_{10}, \quad \operatorname{rank} N_3 = n_2 - m_{20}. \tag{20}$$

Це можна зробити, взявши, наприклад, за K_3 та N_3 матриці, що складаються відповідно з $n_1 - m_{10}$ та $n_2 - m_{20}$ лінійно незалежних стовпчиків матриць

$$d_1(E - K_{10}K_{10}^+) \quad \text{та} \quad d_2(E - N_{20}N_{20}^+),$$

де d_1 та d_2 — деякі цілі числа.

Виконаємо заміну змінних

$$\begin{gathered} \psi = K_{10}\psi^{10} + K_3\psi^3 = K_1\psi^1 + K_0\psi^0 + K_3\psi^3, \quad \psi^{10} = K_{10}^+\psi, \quad \psi^3 = K_3^+\psi, \\ \theta = N_{20}\theta^{20} + N_3\theta^3 = N_2\theta^2 + N_0\theta^0 + N_3\theta^3, \quad \theta^{20} = N_{20}^+\theta, \quad \theta^3 = N_3^+\theta. \end{gathered} \tag{21}$$

У (15) покладемо

$$y' = e^{HK_3\psi^3}Bh, \quad \theta' = N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3, \quad \widetilde{\psi}^0 = \psi^0, \quad \widetilde{\psi}^1 = \psi^1, \quad \widetilde{\psi}^2 = \theta^2,$$

тоді $N_2\widetilde{\psi}^2 + N_0\widetilde{\psi}^0 + \theta' = \theta$ і згідно з (15) та (21) маємо

$$\begin{gathered} e^{-H\psi}Y_\nu(e^{H\psi}Bh, \theta) = e^{-HK_3\psi^3}Y_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right], \\ \Phi_\nu(e^{H\psi}Bh, \theta) = \Phi_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right]. \end{gathered} \tag{22}$$

За допомогою (20), (21) та (22) перетворимо систему (17):

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu B^+ e^{-HK_3\psi^3}Y_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right],$$

$$\frac{d\psi^3}{dt} = -\sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu K_3^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3}Y_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right]/h,$$

$$\frac{d\theta^3}{dt} = \sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu N_3^+\Phi_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right], \tag{23}$$

$$\frac{d\psi^{10}}{dt} = \omega^{10} - \sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu K_{10}^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3}Y_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right]/h,$$

$$\frac{d\theta^{20}}{dt} = \omega^{20} + \sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^\nu N_{20}^+\Phi_\nu\left[e^{HK_3\psi^3}Bh, N_0\left(\theta^0 - \psi^0\right) + N_3\theta^3\right].$$

Продовжимо розщеплення системи (23). Для цього позначимо

$$\xi^0 = \theta^0 - \psi^0 \tag{24}$$

і, врахувавши (3), (21) та (24), два останніх рівняння (23) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi^0}{dt} &= \omega^0 - J_0 \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu K_{10}^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] /h, \\
\frac{d\theta^0}{dt} &= \omega^0 + P_0 \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right], \\
\frac{d\psi^1}{dt} &= \omega^1 - J_1 \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu K_{10}^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] /h, \\
\frac{d\theta^2}{dt} &= \omega^2 + P_2 \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right],
\end{aligned} \tag{25}$$

де J_i та P_j — блочні матриці відповідного розміру, що складаються з горизонтально розташованих одиничної та нульової матриць.

У (25) замість першого (або другого) рівняння візьмемо різницю другого й першого рівнянь та долучимо до (25) три перших рівняння (23). З урахуванням (24) отримаємо розщеплену систему з повільними змінними h, ψ^3, θ^3 та ξ^0 :

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu B^+ e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right],$$

$$\frac{d\psi^3}{dt} = -\sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu K_3^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] /h,$$

$$\frac{d\theta^3}{dt} = \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu N_3^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right],$$

$$\frac{d\xi^0}{dt} = \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu \Big\{ P_0 N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] + $$
$$+ J_0 K_{10}^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] /h \Big\},$$

$$\frac{d\theta^0}{dt} = \omega^0 + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu P_0 N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right],$$

$$\frac{d\psi^1}{dt} = \omega^1 - \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu J_1 K_{10}^+ B^+ H e^{-HK_3\psi^3} Y_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right] /h,$$

$$\frac{d\theta^2}{dt} = \omega^2 + P_2 \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu N_{20}^+ \Phi_\nu \left[e^{HK_3\psi^3} Bh, N_0\xi^0 + N_3\theta^3 \right],$$

що й потрібно було довести.

Теорему 1 доведено.

Нарешті, вкажемо заміну, що зводить систему (5) до отриманого вище вигляду. Враховуючи (16), (21) та (24), маємо

$$y = e^{K_1\psi^1 + K_0(\theta^0 - \xi^0) + K_3\psi^3} Bh, \quad \theta = N_2\theta^2 + N_0\theta^0 + N_3\theta^3.$$

4. Аналіз усередненої системи у нерезонансному випадку. Розглянемо випадок, коли $m = n$. Тоді $Y_\nu(y, \theta)$ та $\Phi_\nu(y, \theta)$, що фігурують у системі (19), не залежать від θ.

Для зручності запишемо змінну y у вигляді

$$y = \text{colon}\left(y^1, \ldots, y^{n_1}\right), \quad y^j = \begin{bmatrix} y_{2j-1} \\ y_{2j} \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, n_1}.$$

Тоді система (5) набере вигляду

$$\begin{gathered} \frac{dy^j}{dt} = \lambda_j H_j y^j + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu Y_\nu^j \left(y^1, \ldots, y^{n_1}\right), \quad j = \overline{1, n_1}, \\ \frac{d\theta_k}{dt} = \mu_k + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu^k \left(y^1, \ldots, y^{n_1}\right), \quad k = \overline{1, n_2}. \end{gathered} \tag{26}$$

Диференціюючи (18) по ψ_j для компоненти Y_ν^j і покладаючи $\psi = 0$, доводимо, що гіперплощина

$$y^j = 0$$

є інваріантною при $j = \overline{1, n_1}$ для системи (5), до того ж в околі гіперплощини

$$y^j = 0, \quad j = \overline{1, n'}, \quad n' \leqslant n_1,$$

система (26) рівносильна наступній:

$$\begin{gathered} \frac{dy^j}{dt} = \lambda_j H_j y^j + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu H_j \frac{\partial Y_\nu^j \left(y^1, \ldots, y^{n'}, B_{n'+1}h_{n'+1}, \ldots, B_{n_1}h_{n_1}\right)}{\partial y^j} H_j y^j, \ j = \overline{1, n'}, \\ \frac{dh_p}{dt} = -\sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B_p^+ H_p \frac{\partial Y_\nu^p \left(y^1, \ldots, y^{n'}, B_{n'+1}h_{n'+1}, \ldots, B_{n_1}h_{n_1}\right)}{\partial y^p} H_p B_p h_p, \\ \frac{d\psi_p}{dt} = \lambda_p + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu B_p^+ \frac{\partial Y_\nu^p \left(y^1, \ldots, y^{n'}, B_{n'+1}h_{n'+1}, \ldots, B_{n_1}h_{n_1}\right)}{\partial y^p} H_p B_p, \ p = \overline{n'+1, n_1}, \\ \frac{d\theta_k}{dt} = \mu_k + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \Phi_\nu^k \left(y^1, \ldots, y^{n'}, B_{n'+1}h_{n'+1}, \ldots, B_{n_1}h_{n_1}\right), \ k = \overline{1, n_2}. \end{gathered} \tag{27}$$

Згідно з [3] матриці рівнянь у варіаціях, що відповідають положенням рівноваги

$$h_j = 0, \quad j = \overline{1, n'}, \quad h_p = h_p^0 > 0, \quad p = \overline{n' + 1, n_1},$$

та

$$y^j = 0, \quad j = \overline{1, n'}, \quad h_p = h_p^0 > 0, \quad p = \overline{n' + 1, n_1}, \tag{28}$$

амплітудних рівнянь відповідно систем (19) та (27), мають вигляд

$$\begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left\{\sum\limits_{i\geq 1} \varepsilon^i \alpha_i^j\right\} & O \\ \sum\limits_{i\geq 1} \varepsilon^i C_i^{(2)} & \sum\limits_{i\geq 1} \varepsilon^i C_i \end{bmatrix} \text{ та } \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left\{\sum\limits_{i\geq 1} \varepsilon^i \alpha_i^j E + (\lambda_j + \sum\limits_{i\geq 1} \varepsilon^i \beta_i^j) H_j\right\} & O \\ \sum\limits_{i\geq 1} \varepsilon^i C_i^{(1)} & \sum\limits_{i\geq 1} \varepsilon^i C_i \end{bmatrix}, \tag{29}$$

де α_i^j та β_i^j — деякі сталі, C_i, $C_i^{(1)}$ та $C_i^{(2)}$ — деякі сталі матриці.

Тому множини дійсних частин власних чисел цих двох матриць збігаються. Така сама властивість має місце, зокрема, для перших наближень відповідно систем (19) та (27). Тоді ряди в (29) обірвуться на першому доданку.

5. Збереження інваріантного тора. Узагальнимо задачу, взявши $X(x, \varphi)$ та $F(x, \varphi)$ з ширшого класу функцій. За умови існування та гладкості $u_1(y, \theta)$ і $v_1(y, \theta)$, визначених за формулами (8), зберігаються в першому наближенні всі властивості асимптотичного методу.

Теорема 2. *Нехай права частина системи така, що:*

1) для деяких цілих s та l, $2 \leqslant s \leqslant l$, та для деякої області $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^{2n_1}$ $X(x, \varphi) \in C^l(D)$, $F(x, \varphi) \in C^l(D)$, а також існують визначені за формулами (8)

$$u_1(y, \theta) = L_1^{-1}\left[X(y, \theta) - S_1 X(y, \theta)\right] \in C^s(D), \quad v_1(y, \theta) = L_2^{-1}\left[F(y, \theta) - S_2 F(y, \theta)\right] \in C^s(D),$$

де $D = \widetilde{D} \times \mathcal{T}_{n_2}$;

2) для $Y_1(y, \theta) = S_1 X(y, \theta)$ та $\Phi_1(y, \theta) = S_2 F(y, \theta)$, визначених за формулами (9), мають місце рівності

$$Y_1(y', \theta') = e^{-H\psi} Y_1(e^{H\psi} y', \theta + \theta'), \quad \Phi_1(y', \theta') = \Phi_1(e^{H\psi} y', \theta + \theta'); \tag{30}$$

3) система, складена з амплітудних рівнянь першого наближення системи (19),

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon U(h),$$

має таке положення рівноваги

$$h = h^0 \geqslant 0 : U(h^0) = 0,$$

що тор $x = g(\widetilde{\psi})$, заданий рівностями

$$x^{j_k} = 0, \quad k = \overline{1, n'},$$
$$x^{j_k} = e^{H_{j_k}\psi_{j_k}} B_{j_k} h^0_{j_k}, \quad \psi_{j_k} \in \mathcal{T}_1, \quad k = \overline{n' + 1, n_1}, \tag{31}$$

де n' — кількість нульових координат вектора h_0, j_k, $k = \overline{n' + 1, n_1}$, — індекси ненульових координат вектора h_0, $\widetilde{\psi} = (\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_{n_1 - n'}})$, належить області D, а власні числа матриці

$$\widetilde{U} = \frac{\partial U(h^0)}{\partial h} \tag{32}$$

не мають нульових дійсних частин.

Тоді можна вказати таке число $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ система рівнянь (1) має $(n - n')$-вимірний інваріантний тор

$$x = f(\widetilde{\psi}, \varphi, \varepsilon),$$

де $f \in C^{s-2}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_{n-n'})$.

Цей тор задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| f(\widetilde{\psi}, \varphi, \varepsilon) - g(\widetilde{\psi}) \|_{s-2} = 0 \tag{33}$$

і є експоненціально стійким, якщо дійсні частини власних чисел матриці (32) від'ємні, та експоненціально дихотомічним, якщо є власні числа матриці (32) як із від'ємними, так і з додатними дійсними частинами.

Доведення. Обмежимося стислою схемою міркувань.

Використавши заміну

$$x = y + \varepsilon u_1(y, \theta), \quad \varphi = \theta + \varepsilon v_1(y, \theta), \tag{34}$$

отримаємо систему, права частина якої містить аналогічні до (5) доданки при ε^0 та ε^1, а також додатковий залишок при ε^2, який у загальному випадку залежить від усіх змінних та від ε.

Оскільки мають місце рівності (30), тобто (18) для $\nu = 1$, то для першого наближення усередненої системи виконуються всі властивості, досліджені для нерезонансного випадку, в тому числі й щодо власних чисел матриць (29).

За умовами теореми нам відомі знаки дійсних чисел матриці рівнянь у варіаціях відповідно до (28).

Використавши, наприклад, ідею [4], після нескладних лінійних перетворень для отриманої системи за допомогою послідовних наближень та теореми Асколі – Арцела можна довести існування інваріантного тора як нерухомої точки інтегрального оператора. Оцінка його гладкості погіршується внаслідок підстановки (34) у (1), а також у момент застосування теореми Асколі – Арцела.

Отриманий у процесі доведення вигляд інваріантного тора для перетвореної системи, а також (34) свідчать про виконання границі (33).

Питання стійкості та дихотомії інваріантного тора можна дослідити, наприклад, застосувавши міркування з доведення леми III гл. V монографії [5], де за допомогою теореми Банаха про нерухому точку знаходяться відповідні односторонньо інваріантні множини.

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що умова 2 теореми 2 автоматично виконується у нерезонансному випадку, а тор (31) є інваріантним многовидом першої підсистеми вихідної системи (1) при $\varepsilon = 0$.

Якщо (30) не виконується, то для розщепленої усередненої системи загального вигляду (25) можна застосувати загальну теорію збурення інваріантних торів [6].

6. Частинний резонансний випадок. Знайдемо умови, з яких випливає виконання умови 2 теореми 2 у випадку, коли може мати місце резонанс.

Легко бачити, що з рівностей

$$\begin{gathered}
Y_1(y,\,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} e^{-H\psi_1}X\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right)\,d\psi, \\
\Phi_1(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} F\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right)\,d\psi, \quad \psi_1\in\mathcal{T}_{n_1}, \quad \psi_2\in\mathcal{T}_{n_2},
\end{gathered} \tag{35}$$

випливає виконання (30).

Позначимо

$$\widetilde{X}_k(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} e^{-H\psi_1}X\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right)e^{-i(k,\psi)}d\psi,$$

$$\widetilde{F}_k(y,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi} F\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right)e^{-i(k,\psi)}d\psi, \quad k\in\mathbb{Z}^n,$$

$$\psi_1\in\mathcal{T}_{n_1}, \quad \psi_2\in\mathcal{T}_{n_2}.$$

Тоді

$$\begin{gathered}
e^{-H\psi_1}X\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widetilde{X}_k(y,\theta)e^{i(k,\psi)}, \\
F\left(e^{H\psi_1}y,\psi_2+\theta\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widetilde{F}_k(y,\theta)e^{i(k,\psi)}.
\end{gathered} \tag{36}$$

Для матриці K з (2) позначимо

$$Q = \left\{\operatorname{Ker} K^T \bigcap \mathbb{Z}^n\right\}\setminus\{0\}.$$

Із (36) та (9) отримуємо

$$\begin{aligned} S_1X(y,\theta) &= \sum_{(k,\eta)=0} \widetilde{X}_k(y,\theta) = \widetilde{X}_0(y,\theta) + \sum_{k\in Q} \widetilde{X}_k(y,\theta), \\ S_2F(y,\theta) &= \sum_{(k,\eta)=0} \widetilde{F}_k(y,\theta) = \widetilde{F}_0(y,\theta) + \sum_{k\in Q} \widetilde{F}_k(y,\theta). \end{aligned} \tag{37}$$

Рівності (35) у нових позначеннях набирають вигляду

$$Y_1(y,\theta) = \widetilde{X}_0(y,\theta), \quad \Phi_1(y,\theta) = \widetilde{F}_0(y,\theta). \tag{38}$$

Взявши до уваги [3], легко показати, що перехід у (3) від базиса ω до ω_1 (або навіть перехід від η до η_1) не змінює вигляд (37) усереднюючих операторів, якщо

$$K_1 = KR, \quad R = K^+K_1, \quad \det R \neq 0.$$

Позначимо

$$Q_l = \{k \in Q||k| \leqslant l\}.$$

Нехай $X(x,\varphi)$ — квазіполіном:

$$X(x,\varphi) = \sum_{|r|\leqslant M_1, |k|\leqslant M_2} X_{rk}x^r e^{i(k,\varphi)}.$$

Тоді $e^{-H\psi_1}X(e^{H\psi_1}y, \psi_2+\theta)$ є тригонометричним поліномом по ψ, що містить гармоніки $e^{i(k,\varphi)}$ з $|k| \leqslant M_1+M_2+1$. Тому перший ряд (37) зводиться до суми

$$S_1X(y,\theta) = \sum_{(k,\eta)=0} \widetilde{X}_k(y,\theta) = \widetilde{X}_0(y,\theta) + \sum_{k\in Q_{M_1+M_2+1}} \widetilde{X}_k(y,\theta). \tag{39}$$

Аналогічно для квазіполінома $F(x,\varphi)$ маємо

$$S_2F(y,\theta) = \sum_{(k,\eta)=0} \widetilde{F}_k(y,\theta) = \widetilde{F}_0(y,\theta) + \sum_{k\in Q_{M_1+M_2}} \widetilde{F}_k(y,\theta). \tag{40}$$

Якщо при цьому

$$Q_{M_1+M_2+1} = \varnothing,$$

то згідно з (39), (40) маємо (38), тобто виконується умова 2 теореми 2.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Общие вопросы теории асимптотического интегрирования систем нелинейной механики. — Киев, 1987. — 67 с. — (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 87.41).

2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики // Укр. мат. журн. — 1979. — **31**, № 1. — С. 42–53.

3. *Самойленко А. М.* Асимптотический метод исследования m-частотных колебательных систем // Там же. — 1998. — **50**, № 10. — С. 1366 – 1387.

4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Асимптотическое исследование слабо нелинейных колебательных систем. — Киев, 1976. — 54 с. — (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 76.5).

5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.

6. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

Одержано 20.08.09