УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА ВРЕМЕННОЙ ШКАЛЕ

Т. А. Лукьянова, А. А. Мартынюк

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3

We obtain sufficient conditions for an equilibrium state of a neuron system to be globally asymptotically stable in a time scale. New sufficient conditions for a system function to be regressive and new sufficient conditions for existence and uniqueness of an equilibrium state of a neuron system are given.

Отримано достатні умови глобальної асимптотичної стійкості стану рівноваги нейронної системи на часовій шкалі. Наведено нові достатні умови регресивності функції системи та нові достатні умови існування та єдиності стану рівноваги нейронної системи.

Динамика нейронной сети в непрерывном и дискретном случаях исследована достаточно подробно во многих работах (см. например, [1, 2] и приведенную там библиографию). На вопрос о том, что происходит в нейронной сети, работающей в режиме непрерывно дискретной во времени системы, „между” непрерывным и дискретным состояниями, позволяет дать ответ теория динамических уравнений на временной шкале. Задача о динамике нейронной сети на временной шкале является новой областью исследований, которая только начала развиваться. Экспоненциальная устойчивость для нейронных сетей специального вида (bidirectional associative memory) была рассмотрена в [3, 4]. Устойчивость нейронной сети в общем случае изучена в [5], где получены условия равномерной асимптотической и экспоненциальной устойчивости. При этом функции s_i должны быть ограниченными и липшицевыми, а зернистость временной шкалы не должна быть равной нулю.

В данной работе предложенный в [5] подход получил дальнейшее развитие. Как и в [5], условия глобальной асимптотической устойчивости получены в рамках второго метода Ляпунова с помощью квадратичной вспомогательной функции. При этом ослаблены по сравнению с [5] требования на функции s_i и зернистость временной шкалы, а именно, функции s_i должны быть липшицевыми, а зернистость временной шкалы может быть равной нулю. Кроме того, результаты данной работы дают лучшую, по сравнению с [5], оценку для зернистости временной шкалы $\mathbb{P}$.

Опишем кратко структуру статьи. В п. 1 приведены основные сведения из математического анализа на временной шкале, а также некоторые обозначения, определения и необходимые теоремы. Пункт 2 содержит предварительные результаты, а именно, теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и глобальной асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия. В п. 3 дано описание нейронной сети на временной шкале, получены достаточные условия регрессивности и достаточные условия существования единственного состояния равновесия нейронной сети. Пункт 4 содержит основной результат: достаточное условие глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия нейронной сети. В п. 5 эффективность полученных результатов продемонстрирована для нейронной сети на конкретной временной шкале $\mathbb{P}$.

1. Основные обозначения, определения и необходимые теоремы [6]. Временной шкалой $\mathbb{T}$ называется произвольное непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Примерами временной шкалы являются: множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, множество вещественных неотрицательных чисел $\mathbb{R}_+$, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$, множество $q^{\mathbb{N}_0} = \{q^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, где $q > 1$.

Для любого $t \in \mathbb{T}$ функции скачка вперед и скачка назад определяются соотношениями

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} \quad \text{и} \quad \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

соответственно. Если $\sigma(t) = t$ ($\rho(t) = t$), то точка $t \in \mathbb{T}$ называется плотной справа (слева), если $\sigma(t) > t$ ($\rho(t) < t$), — рассеянной справа (слева) соответственно. При этом предполагается, что $\inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ (т. е. $\sigma(t) = t$, если $\mathbb{T}$ содержит максимальный элемент t), и $\sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$ (т. е. $\rho(t) = t$, если $\mathbb{T}$ содержит минимальный элемент t).

Наряду с множеством $\mathbb{T}$ используется множество $\mathbb{T}^k$. Если $\mathbb{T}$ содержит рассеянный слева максимум m, то $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}\backslash\{m\}$, и $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ в остальных случаях.

Расстояние от произвольного элемента $t \in \mathbb{T}$ до его последователя называется зернистостью временной шкалы $\mathbb{T}$ и определяется формулой

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $\sigma(t) = t$ и $\mu(t) = 0$, если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $\sigma(t) = t + 1$, $\rho(t) = t - 1$ и $\mu(t) = 1$.

Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется Δ-дифференцируемой в точке $t_0 \in \mathbb{T}^k$, если существует такое $\gamma \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W = \{s \in \mathbb{T} : t_0 - \delta < s < t_0 + \delta\}$ такая, что выполняется неравенство

$$|[f(\sigma(t_0)) - f(s)] - \gamma[\sigma(t_0) - s]| < \varepsilon|\sigma(t_0) - s|$$

при всех $s \in W$. В этом случае обозначают $f^{\Delta}(t_0) = \gamma$.

Если функция $f(t)$ является Δ-дифференцируемой при любом $t \in \mathbb{T}^k$, то $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ является Δ-дифференцируемой на $\mathbb{T}^k$.

Если функции f, g Δ-дифференцируемы в точке $t \in \mathbb{T}^k$, то справедливы следующие утверждения:

1) сумма $f + g$ Δ-дифференцируема в точке $t \in \mathbb{T}^k$ и $(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$;

2) для любой постоянной $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f(t)$ Δ-дифференцируема в точке $t \in \mathbb{T}^k$ и $\alpha f^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$;

3) произведение fg Δ-дифференцируемо в точке $t \in \mathbb{T}^k$ и

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t));$$

4) $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)$.

Заметим, что если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $f^{\Delta}(t) = f'(t)$ является эйлеровой производной функции $f(t)$, а если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $f^{\Delta}(t) = \Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$, т. е. получаем первую разность для функции $f(t)$.

Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ является rd-непрерывной, если она непрерывна в плотных справа точках на $\mathbb{T}$ и существует левосторонний предел в плотных слева точках шкалы $\mathbb{T}$. Множество всех rd-непрерывных функций обозначают $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$.

Функция $f : \mathbb{T} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$, называется rd-непрерывной, если функция $g(t) = f(t, x(t))$ является покомпонентно rd-непрерывной для любой непрерывной функции $x : \mathbb{T} \to \mathcal{N}$.

Справедливы следующие утверждения:

1) если $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{T}$, то она является rd-непрерывной на $\mathbb{T}$;

2) функция $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ является rd-непрерывной на $\mathbb{T}$;

3) если функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-непрерывна, то функция $g \circ f$ также rd-непрерывна на $\mathbb{T}$.

Функция $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с производной $F^{\Delta}(t) = f(t)$ является Δ-антипроизводной функции $f(t)$ и тогда для любых $a, b \in \mathbb{T}$ определяется интеграл

$$\int\limits_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a).$$

Любая rd-непрерывная функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ имеет антипроизводную.

Обозначим $[\alpha, +\infty)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : t \geq \alpha\}$, $(\alpha, +\infty)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : t > \alpha\}$, $[\alpha, \beta)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : \alpha \leq t < \beta\}$, $(\alpha, \beta)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : \alpha < t < \beta\}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, и приведем некоторые необходимые в дальнейшем свойства интегрирования на временной шкале:

1) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$;

2) $\int_a^b \alpha f(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$;

3) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$;

4) $\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = \mu(t) f(t)$;

5) если $|f(t)| \leq g(t)$ на $[a, b)_{\mathbb{T}}$, то $|\int_a^b f(t)\Delta t| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$;

6) если $f(t) \geq 0$ при всех $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$, то $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$.

Функция $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется регрессивной, если оператор $\mathcal{I} + \mu(t) f(t, \cdot)$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$ обратим. Здесь $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — единичный оператор.

Функция $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ принадлежит K-классу, если она непрерывна, строго возрастает на $\mathbb{R}_+$ и $\psi(0) = 0$. Функция $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ принадлежит KR-классу, если $\psi \in K$-классу и $\lim_{r \to +\infty} \psi(r) = +\infty$.

Обозначим через $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ евклидову норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$, $B(x^*, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \delta\}$, $B_\delta = B(0, \delta)$, $\bar{B}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta\}$, $\|A\| = (\lambda_M(A^{\mathrm{T}} A))^{1/2}$ — норма матрицы $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda_M(A)$ — наибольшее собственное значение матрицы A, $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{T} : \mu(t) \neq 0\}$.

Пусть Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат, $I = [\tau, +\infty)_{\mathbb{T}}$ при некотором $\tau \in \mathbb{T}$. Будем говорить, что функция $V : I \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathcal{L}^1$, если она непрерывна по x, $V(t, 0) = 0$ при всех $t \in I$ и функция $V(t, x(t))$ имеет rd-непрерывную Δ-производную при всех Δ-дифференцируемых функциях $x : I \to \Omega$.

Отображение $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется гомеоморфизмом, если оно взаимно однозначное, непрерывно отображает множество $\mathbb{R}^n$ само на себя и обратное отображение также непрерывно.

Для произвольного отображения $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определим постоянную

$$m_{\mathbb{R}^n}(F) = \sup_{x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y} \frac{\langle F(x) - F(y), x - y \rangle}{\|x - y\|^2}.$$

Лемма 1 [7]. *Если $m_{\mathbb{R}^n}(F) < 0$, то отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом.*

Предположим, что на временной шкале $\mathbb{T}$ определена система динамических уравнений

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I, \tag{1}$$

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \quad t_0 \in I, \quad x_0 \in \Xi, \tag{2}$$

где $x \in \Xi$, Ξ — область в $\mathbb{R}^n$, $f : I \times \Xi \to \mathbb{R}^n$, $\sup \mathbb{T} = +\infty$. Предположим, что для задачи (1), (2) выполняются все условия существования единственного решения на бесконечном интервале $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ при любых начальных данных $(t_0, x_0) \in I \times \Xi$. Это решение будем обозначать $x(t) = x(t; t_0, x_0)$.

Определение 1. *Состояние равновесия $x(t) \equiv x^*$ системы (1) называется:*

1) устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in I$ существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x_0 \in B(x^*, \delta)$ и $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ имеет место неравенство $\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$;

2) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и для любого $t_0 \in I$ существует $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in B(x^*, \Delta)$ найдется $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon, x_0) > 0$ такое, что $\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$ при всех $t \in [t_0 + \sigma, +\infty)_{\mathbb{T}}$;

3) глобально асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и для любых $t_0 \in I$, $\Delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, а также для любого $x_0 \in B(x^*, \Delta)$ найдется $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon, x_0) > 0$ такое, что $\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$ при всех $t \in [t_0 + \sigma, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Выполним замену переменных $y(t) = x(t) - x^*$ и запишем начальную задачу (1), (2) в виде

$$y^{\Delta}(t) = g(t, y(t)), \quad t \in I, \tag{3}$$

$$y(t_0; t_0, y_0) = y_0, \quad t_0 \in I, \quad y_0 \in \Omega, \tag{4}$$

где $g(t, y) = f(t, y + x^*) - f(t, x^*)$, $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : y + x^* \in \Xi\}$.

Ясно, что поведение решения $x(t)$ системы (1) в окрестности состояния равновесия x^* эквивалентно поведению решения $y(t)$ системы (3) в окрестности нуля.

2. Предварительные результаты.

Теорема 1. *Если существуют функции $V \in \mathcal{L}^1$ и $a, b \in K$ такие, что при всех $(t, y) \in I \times \Omega$ выполнены неравенства*:

1) $a(\|y\|) \le V(t, y) \le b(\|y\|)$,

2) $V^{\Delta}(t, y(t))|_{(3)} \le 0$,

то состояние равновесия $y(t) = 0$ системы (3) устойчиво.

Доказательство. Пусть $t_0 \in I$ и $\{S(t) : t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}\}$ — семейство следующих утверждений:

> для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такая, что для всех $y_0 \in B_\delta$ выполняется неравенство $\|y(t; t_0, y_0)\| < \varepsilon$.

Утверждение $S(t_0)$ имеет вид: для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такая, что для всех $y_0 \in B_\delta$ имеет место неравенство $\|y(t_0; t_0, y_0)\| < \varepsilon$, и является верным, так как $y(t_0; t_0, y_0) = y_0$ и всегда можно выбрать $\delta < \varepsilon$.

Обозначим $S^* = \{t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} : S(t) \text{ не верно}\}$ и покажем, что $S^* = \varnothing$. Предположим обратное, т. е. что $S^* \neq \varnothing$. Из того, что $S^* \subseteq [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \subset \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ — замкнутое непустое подмножество $\mathbb{R}$, следует, что существует $\inf S^* = t^* \in \mathbb{T}$. Покажем, что утверждение $S(t^*)$ верно. Пусть $t^* = t_0$, тогда утверждение $S(t^*)$ верно. Пусть $t^* > t_0$ и $S(t^*)$ неверно, т. е. существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого $\delta_1 > 0$ существует $y_{01} \in B_{\delta_1}$ такое, что выполняется неравенство $\|y(t^*; t_0, y_{01})\| \geq \varepsilon_1$.

Поскольку $t^* = \inf S^*$, $t^* > t_0$, то для всех $t \in [t_0, t^*)_{\mathbb{T}}$ утверждение $S(t)$ верно. Поэтому для $\varepsilon < b^{-1}(a(\varepsilon_1))$ существует постоянная $\delta_2 = \delta_2(t_0, \varepsilon) > 0$ такая, что для всех $y_0 \in B_{\delta_2}$ имеет место неравенство $\|y(t; t_0, y_0)\| < \varepsilon$. Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для решения $y(t) = y(t; t_0, y_{01})$ при $t \in [t_0, t^*)_{\mathbb{T}}$ и $y_{01} \in B_\delta$ получаем неравенство

$$a(\varepsilon_1) \leq a(\|y(t^*)\|) \leq V(t^*, y(t^*)) \leq V(t, y(t)) \leq b(\|y(t)\|) < b(\varepsilon),$$

откуда следует, что $\varepsilon > b^{-1}(a(\varepsilon_1))$. Получили противоречие, т. е. утверждение $S(t^*)$ верно, $\inf S^* = t^* \notin S^*$. Значит, существует $t_2 > t^*$ такое, что $t_2 \in S^*$, т. е. существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует $y_{02} \in B_\delta$ такое, что выполняется неравенство $\|y(t_2; t_0, y_{02})\| \geq \varepsilon_2$. Поскольку $t^* \notin S^*$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta^* = \delta^*(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для $y_0 \in B_{\delta^*}$ имеет место неравенство $\|y(t^*; t_0, y_0)\| < \varepsilon$. Для $\varepsilon < b^{-1}(a(\varepsilon_2))$ выберем $\delta_2 = \min\{\delta, \delta^*\}$, тогда для решения $y(t) = y(t; t_0, y_{02})$ выполняются неравенства

$$a(\varepsilon_2) \leq a(\|y(t_2)\|) \leq V(t_2, y(t_2)) \leq V(t^*, y(t^*)) \leq b(\varepsilon), \tag{5}$$

откуда следует, что $\varepsilon \geq b^{-1}(a(\varepsilon_2))$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Для произвольных $t \in \mathbb{T}$, $\varsigma > 0$ обозначим

$$t^\varsigma = \begin{cases} t + \varsigma, & \text{если} \quad t + \varsigma \in \mathbb{T}, \\ \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t + \varsigma\}, & \text{если} \quad t + \varsigma \notin \mathbb{T}, \end{cases}$$

и, для удобства, $t_0^\varsigma = (t_0)^\varsigma$. Легко видеть, что если $u < v$, $u, v \in \mathbb{T}$, то $u^\varsigma \leq v^\varsigma$.

Теорема 2. *Пусть существуют функции* $V \in \mathcal{L}^1$, $\kappa \in C_{rd}(I)$ *и* $a, b, c \in K$ *такие, что при всех* $(t, y) \in I \times \Omega$ *выполнены неравенства*:

1) $a(\|y\|) \leq V(t, y) \leq b(\|y\|)$,

2) $V^\Delta(t, y)|_{(3)} \leq -\kappa(t)c(\|y(t)\|)$.

Если при любом $t_0 \in I$

$$\int_{t_0}^{t} \kappa(s)\Delta s \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

то состояние равновесия $y(t) \equiv 0$ *системы (3) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Устойчивость состояния равновесия $y(t) \equiv 0$ системы (3) следует из теоремы 1.

Пусть $t_0 \in I$. Выберем постоянную $\alpha > 0$ так, чтобы $\bar{B}_\alpha \subset \Omega$ и для любого $t_0 \in I$ положим

$$V^{-1}_{t_0,\alpha} = \{y \in \Omega : V(t_0, y) \leq a(\alpha)\}.$$

Пусть утверждение S_0 имеет вид: для любых $y_0 \in V^{-1}_{t_0,\alpha}$ и $\varepsilon > 0$ существует постоянная $\varsigma = \varsigma(t_0, \varepsilon, y_0) > 0$ такая, что имеет место неравенство $\|y(t_0^\varsigma; t_0, y_0)\| < \varepsilon$.

Предположим, что утверждение S_0 неверно, т. е. существуют $y_{01} \in V^{-1}_{t_0,\alpha}$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что для любой постоянной $\varsigma > 0$ имеет место неравенство $\|y(t_0^\varsigma; t_0, y_{01})\| \geq \varepsilon_1$.

Поскольку $\int_{t_0}^{t} \kappa(s)\Delta s \to +\infty$ при $t \to +\infty$, для $\eta > a(\alpha)/c(\varepsilon_1)$ существует постоянная $\varsigma_1 = \varsigma_1(t_0, \varepsilon_1)$ такая, что $\int_{t_0}^{t_0^{\varsigma_1}} \kappa(s)\Delta s > \eta$.

Любое $s \in [t_0, t_0^{\varsigma_1})_{\mathbb{T}}$ можно записать в виде $s = t_0^{\varsigma_2}$, где $\varsigma_2 = s - t_0$. Поэтому для всех $s \in [t_0, t_0^{\varsigma_1})_{\mathbb{T}}$ выполняется неравенство $\|y(s; t_0, y_{01})\| \geq \varepsilon_1$.

Интегрируя неравенство из условия 2 теоремы 2, получаем

$$V(t_0^{\varsigma_1}, y(t_0^{\varsigma_1})) \leq V(t_0, y_0) - \int\limits_{t_0}^{t_0^{\varsigma_1}} \kappa(s) c(\|y(s)\|)\Delta s < a(\alpha) - c(\varepsilon_1) \int\limits_{t_0}^{t_0^{\varsigma_1}} \kappa(s)\Delta s \leq a(\alpha) - c(\varepsilon_1)\eta < 0,$$

что невозможно. Значит, утверждение S_0 верно.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon_1 = b^{-1}(a(\varepsilon)) > 0$. Поскольку утверждение S_0 верно, для любого $y_0 \in V^{-1}_{t_0,\alpha}$ и для $\varepsilon_1 > 0$ существует постоянная $\varsigma = \varsigma(t_0, \varepsilon, y_0) > 0$ такая, что имеет место неравенство $\|y(t_0^\varsigma; t_0, y_0)\| < \varepsilon_1$.

Так как для всех $t \in [t_0 + \varsigma, +\infty)_{\mathbb{T}} = [t_0^\varsigma, +\infty)_{\mathbb{T}}$ выполняется $t \geq t_0^\varsigma$, для решения $y(t) = y(t; t_0, y_0)$ получаем неравенство

$$a(\|y(t)\|) \leq V(t, y(t)) \leq V(t_0^\varsigma, y(t_0^\varsigma)) \leq b(\|y(t_0^\varsigma)\|) < b(\varepsilon_1),$$

откуда имеем $\|y(t)\| \leq a^{-1}b(\varepsilon_1) = \varepsilon$ для всех $t \in [t_0 + \varsigma, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Итак, для любых $y_0 \in V^{-1}_{t_0,\alpha}$ и $\varepsilon > 0$ существует постоянная $\varsigma = \varsigma(t_0, \varepsilon, y_0) > 0$ такая, что имеет место неравенство $\|y(t; t_0, y_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \in [t_0 + \varsigma, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Выбирая постоянную $\Delta > 0$ так, чтобы $b(\Delta) \leq a(\alpha)$, получаем $B_\Delta \subset V^{-1}_{t_0,\alpha}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если условия теоремы 2 выполнены для $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $a \in KR$, то состояние равновесия $y(t) \equiv 0$ системы (3) глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Поскольку $a(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, для любого $\Delta > 0$ всегда найдется $\alpha > 0$ такое, что выполняется неравенство $b(\Delta) \leq a(\alpha)$. Далее доказательство проводится так же, как и в предыдущей теореме.

3. Нейронная сеть на временной шкале. В этом пункте рассматривается нейронная сеть на временной шкале, динамика которой описывается уравнением вида

$$x^\Delta(t) = -Bx(t) + Ts(x(t)) + J, \quad t \in I. \tag{6}$$

Решение $x(t; t_0, x_0)$ при $t = t_0$ принимает значение x_0, т. е.

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \quad t_0 \in I, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

где $I = [\tau, +\infty)_{\mathbb{T}}$ при некотором $\tau \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ — произвольная временная шкала, для которой $\sup \mathbb{T} = +\infty$. В системе (6) $x^{\Delta}(t)$ — Δ-производная на временной шкале $\mathbb{T}$, вектор $x \in \mathbb{R}^n$ характеризует состояние нейронов, $T = \{t_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, компоненты t_{ij} описывают связи между i- и j-м нейронами, $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $s(x) = (s_1(x_1), s_2(x_2), \ldots, s_n(x_n))^{\mathrm{T}}$, функция s_i описывает ответ i-го нейрона, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = \operatorname{diag}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $J \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор внешнего входа.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $x^{\Delta} = d/dt$ и начальная задача (6), (7) эквивалентна начальной задаче для непрерывной нейронной системы типа Хопфилда [8]

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Bx(t) + Ts(x(t)) + J, \quad t \geq \tau, \tag{8}$$

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \quad t_0 \geq \tau, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $x^{\Delta}(k) = x(k+1) - x(k) = \Delta x(k)$, $I = \{\tau, \tau+1, \tau+2, \ldots\}$ и начальная задача (6), (7) эквивалентна следующей [2]:

$$\Delta x(k) = -Bx(k) + Ts(x(k)) + J, \quad t \in I, \tag{10}$$

$$x(k_0; k_0, x_0) = x_0, \quad k_0 \in I, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Введем следующие предположения:

S_1. Вектор-функция $f(x) = -Bx + Ts(x) + J$ является регрессивной.

S_2. Существуют положительные постоянные $L_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $|s_i(u) - -s_i(v)| \leq L_i|u - v|$ при всех $u, v \in \mathbb{R}$.

Если выполняются предположения S_1, S_2, то при любых начальных данных $(t_0, x_0) \in \in I \times \mathbb{R}^n$ задача (6), (7) имеет точно одно решение на бесконечном интервале $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ [9].

Обозначим $L = \max\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$, $\underline{b} = \min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $\overline{b} = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение S_2. Если при любом $t \in \mathcal{T}$ имеет место неравенство $(\underline{b} - L\|T\|)\mu(t) - 1 > 0$, то функция $f(x) = -Bx + Ts(x) + J$ регрессивна для любого $J \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Достаточно показать, что отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $F(x) = x + \mu(t)(-Bx + Ts(x) + J)$, является гомеоморфизмом при каждом фиксированном $t \in \mathbb{T}$. Если $\mu(t) = 0$, то отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $F(x) = x$, является гомеоморфизмом. Пусть теперь $t \in \mathcal{T}$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle = \langle x - y + \mu(t)[-B(x-y) + T(s(x) - s(y))], x - y\rangle =$$
$$= \langle x - y, x - y\rangle - \mu(t)\langle B(x-y), x-y\rangle + \mu(t)\langle T(s(x) - s(y)), x - y\rangle. \tag{12}$$

Оценив отдельно каждое из слагаемых

$$\langle x - y, x - y\rangle = \|x - y\|^2,$$

$$\langle B(x-y), x-y\rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i(x_i-y_i)^2 \geq \underline{b}\,\|x-y\|^2,$$

$$\langle T(s(x)-s(y)), x-y\rangle \leq \|Tg(s(x)-s(y))\|\|x-y\| \leq L\|T\|\|x-y\|^2,$$

для скалярного произведения (12) при всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ получим оценку

$$\Big\langle F(x)-F(y), x-y\Big\rangle \leq \|x-y\|^2 - \mu(t)\,\underline{b}\,\|x-y\|^2 + \mu(t)L\|T\|\|x-y\|^2 =$$

$$= \big(1-\mu(t)[\,\underline{b}-L\|T\|]\big)\|x-y\|^2 = -\big(\mu(t)[\,\underline{b}-L\|T\|]-1\big)\,\|x-y\|^2.$$

Отсюда делаем вывод, что

$$m_{\mathbb{R}^n}(F) = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n,\; x\neq y} \frac{\langle F(x)-F(y), x-y\rangle}{\|x-y\|^2} \leq -(\mu(t)[\,\underline{b}-L\|T\|]-1) < 0,$$

откуда, согласно лемме 1, следует, что отображение $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнено предположение S_2 и имеет место неравенство $\underline{b} - L\|T\| > 0$. Тогда существует состояние равновесия системы (6), и это состояние равновесия единственно.*

Доказательство. Для того чтобы состояние $x(t) \equiv x^*$ было состоянием равновесия системы (6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$-Bx^* + Ts(x^*) + J = 0.$$

Рассмотрим отображение $H:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $H(x) = -Bx + Ts(x) + J$, и оценим скалярное произведение

$$\langle H(x)-H(y), x-y\rangle = \langle -B(x-y) + T(s(x)-s(y)), x-y\rangle =$$

$$= -\langle B(x-y), x-y\rangle + \langle T(s(x)-s(y)), x-y\rangle \leq$$

$$\leq -\underline{b}\,\|x-y\|^2 + L\|T\|\,\|x-y\|^2 = -(\underline{b}-L\|T\|)\|x-y\|^2.$$

Отсюда делаем вывод, что

$$m_{\mathbb{R}^n}(H) = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n, x\neq y} \frac{\langle H(x)-H(y), x-y\rangle}{\|x-y\|^2} \leq -(\underline{b}-L\|T\|) < 0,$$

и, согласно лемме 1, отображение $H:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом, откуда и следует существование единственного состояния равновесия системы (6).

Теорема 4 доказана.

4. Устойчивость нейронной сети. Пусть $x(t) \equiv x^*$ — состояние равновесия системы (6). Выполним замену переменных $y(t) = x(t) - x^*$ и запишем начальную задачу (6), (7) в виде

$$y^{\triangle}(t) = -By(t) + Tg(y(t)), \quad t \in I, \tag{13}$$

$$y(t_0; t_0, y_0) = y_0, \quad t_0 \in I, \quad y_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(y) = s(y + x^*) - s(x^*)$.

Если для системы (6) выполняются предположения S_1, S_2, то для системы (13) верны следующие утверждения:

G_1) Вектор-функция $-By + Tg(y)$ является регрессивной;

G_2) $\|g(u) - g(v)\| \le L\|u - v\|$ при всех $u, v \in \mathbb{R}^n$ и $L = \max\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$;

G_3) $g(0) = 0$.

Обозначим $c = 2(\underline{b} - L\|T\|)/(\bar{b} + L\|T\|)^2$.

Теорема 5. *Предположим, что для системы (6) выполнены предположения S_1, S_2. Если для любого $t_0 \in I$*

$$\int\limits_{t_0}^{t} (c - \mu(s))\Delta s \to +\infty \quad \textit{при} \quad t \to +\infty, \tag{15}$$

то существует единственное состояние равновесия системы (6), и это состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство. Покажем вначале существование и единственность состояния равновесия системы (6). Для этого, в силу теоремы 4, необходимо показать, что $\underline{b} - L\|T\| > 0$. Предположим, что $\underline{b} - L\|T\| \le 0$. Тогда при всех $t \in \mathbb{T}$

$$c - \mu(t) = 2\frac{(\underline{b} - L\|T\|)}{(\bar{b} + L\|T\|)^2} - \mu(t) \le 0.$$

Из условия (15) следует, что для $M > 0$ существует достаточно большое $t_1 \in \mathbb{T}$, $t_1 > t_0$, такое, что при всех $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$ выполняется неравенство $\int_{t_0}^{t}(c - \mu(t))\Delta s > M$, откуда приходим к противоречию $0 < M < \int_{t_0}^{t}(c - \mu(t))\Delta s \le 0$. Значит, $\underline{b} - L\|T\| > 0$ и существует единственное состояние равновесия системы (6).

Покажем его глобальную асимптотическую устойчивость. Поведение состояния $x(t)$ системы (6) в окрестности состояния равновесия $x(t) \equiv x^*$ эквивалентно поведению состояния $y(t)$ системы (13) в окрестности нуля. Для доказательства теоремы применим функцию Ляпунова $v(y) = y^{\mathrm{T}}y$. Если $y(t)$ дифференцируема в точке $t \in \mathbb{T}^k$, для Δ-производной функции $v(y(t))$ имеем выражение

$$v^{\Delta}(y(t)) = (y^{\mathrm{T}}(t)\, y(t))^{\Delta} = y^{\mathrm{T}}(t)\, y^{\Delta}(t) + [y^{\mathrm{T}}(t)]^{\Delta}\, y(\sigma(t)) =$$

$$= y^{\mathrm{T}}(t)\, y^{\Delta}(t) + [y^{\Delta}(t)]^{\mathrm{T}}\big(y(t) + \mu(t)y^{\Delta}(t)\big) = 2y^{\mathrm{T}}(t)\, y^{\Delta}(t) + \mu(t)\|y^{\Delta}(t)\|^2.$$

Для производной функции v вдоль решений системы (13) получаем

$$v^{\Delta}(y(t))|_{(13)} = -2y^{\mathrm{T}}(t)By(t) + 2y^{\mathrm{T}}(t)Tg(y(t)) + \mu(t)\|By(t) - Tg(y(t))\|^2. \qquad (16)$$

Оценивая отдельно каждое из слагаемых в (16), находим

$$y^{\mathrm{T}}Tg(y) \le \|y\|\|T\|\|g(y)\| \le L\|T\|\|y\|^2,$$

$$\|By - Tg(y)\|^2 \le \big(\|B\| + L\|T\|\big)^2\|y\|^2 = \big(\bar{b} + L\|T\|\big)^2\|y\|^2,$$

и для производной функции v вдоль решений системы (13) имеем

$$\begin{aligned} v^{\Delta}(y(t))|_{(13)} &\le -2\,\underline{b}\,\|y(t)\|^2 + 2L\|T\|\|y(t)\|^2 + \mu(t)\big(\bar{b} + L\|T\|\big)^2\|y(t)\|^2 = \\ &= -\left(2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu(t)(\bar{b} + L\|T\|)^2\right)\|y(t)\|^2 = \\ &= -(\bar{b} + L\|T\|)^2\left(\frac{2\underline{b} - 2L\|T\|}{(\bar{b} + L\|T\|)^2} - \mu(t)\right)\|y(t)\|^2 = \\ &= -(\bar{b} + L\|T\|)^2\,(c - \mu(t))\,\|y(t)\|^2 = -\xi(t)\phi(y(t)), \end{aligned}$$

где $\xi(t) = c - \mu(t)$, $\phi(s) = (\bar{b} + L\|T\|)^2 s^2 \in KR$.

В силу условия (15)

$$\int\limits_{t_0}^{t}\xi(s)\Delta s \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

и, следовательно, выполняются все условия следствия 1, поэтому состояние равновесия $y(t) \equiv 0$ системы (13) глобально асимптотически устойчиво, что эквивалентно глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия $x(t) \equiv x^*$ системы (6).

Теорема доказана.

Следствие 2. *Предположим, что для системы (6) выполнены предположения S_1, S_2. Если существует постоянная μ^* такая, что $0 < \mu^* < c$ и при всех $t \in I$ имеет место неравенство $\mu(t) \le \mu^*$, то существует единственное состояние равновесия системы (6), и это состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Для произвольной временной шкалы $\mathbb{T}$ из определения Δ-производной для функции $p(t) = t$ следует, что $p^{\Delta}(t) = 1$ при $t \in \mathbb{T}^k$, и для любых $t, t_0 \in \mathbb{T}^k$ справедливо равенство $\int_{t_0}^{t}\Delta s = t - t_0$. Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t}(c - \mu(s))\Delta s \ge \int\limits_{t_0}^{t}(c - \mu^*)\Delta s = (c - \mu^*)\int\limits_{t_0}^{t}\Delta s = (c - \mu^*)\,(t - t_0) \to +\infty$$

при $t \to +\infty$.

Следствие доказано.

Замечание 1. Следствие 2 содержит в себе теорему 2 из работы [5]. В теореме 2 из работы [5] заключение об устойчивости состояния равновесия системы (6) при выполнении неравенства $2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu^*(\overline{b} + L\|T\|)^2 \geq 0$ возможно только в случае $\mathbb{T}\backslash\mathcal{T} = \varnothing$.

Выполнение неравенства $0 < \mu^* < c$, аналогичного неравенству $2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu^*(\overline{b} + L\|T\|)^2 \geq 0$, позволяет на основе следствия 2 сделать заключение об устойчивости состояния равновесия системы (6) в случае, когда $\mathbb{T}\backslash\mathcal{T} \neq \varnothing$.

Кроме того, выполнение оценки $0 < \mu^* < c$ гарантирует существование единственного состояния равновесия системы (1), в то время как в работе [5] для этого необходимы дополнительные условия.

5. Пример. Зафиксируем $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и рассмотрим временную шкалу

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(n_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) =$$
$$= \left(\bigcup_{i=0}^{n_0} \big[i(\alpha+\beta_1), i(\alpha+\beta_1)+\alpha \big] \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \big[\nu_0 + j(\alpha+\beta_2), \nu_0 + j(\alpha+\beta_2)+\alpha \big] \right),$$

где α, β_1, $\beta_2 > 0$, $\nu_0 = n_0(\alpha+\beta_1)+\alpha+\beta_1$. Временная шкала $\mathbb{P}$ — это бесконечная последовательность отрезков длины α, из которых первые n_0+1 находятся на расстоянии β_1 друг от друга, а все остальные — на расстоянии β_2. Функция зернистости для такой временной шкалы имеет вид

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \in \bigcup_{i=0}^{n_0} \big[i(\alpha+\beta_1), i(\alpha+\beta_1)+\alpha \big), \\ \beta_1, & \text{если} \quad t \in \bigcup_{i=0}^{n_0} \{ i(\alpha+\beta_1)+\alpha \}, \\ 0, & \text{если} \quad t \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \big[\nu_0 + j(\alpha+\beta_2), \nu_0 + j(\alpha+\beta_2)+\alpha \big), \\ \beta_2, & \text{если} \quad t \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \{ \nu_0 + j(\alpha+\beta_2)+\alpha \}. \end{cases}$$

Утверждение 1. *Справедливы равенства*

$$\int_0^t \mu(s)\Delta s = \begin{cases} \beta_1^2 i, & t \in \bigcup_{i=0}^{n_0} [i(\alpha+\beta_1), i(\alpha+\beta_1)+\alpha], \\ \beta_1^2(n_0+1)+\beta_2^2 j, & t \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \big[\nu_0 + j(\alpha+\beta_2), \nu_0 + j(\alpha+\beta_2)+\alpha \big]. \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство. Функция $\mu(t)$ является rd-непрерывной на $\mathbb{P}$, поэтому интеграл $\int_{t_2}^{t_1} \mu(s)\Delta s$ существует при любых t_1, $t_2 \in \mathbb{P}$.

Вначале отметим, что для произвольной временной шкалы $\mathbb{T}$ из определения Δ-производной для функций $F_1(t) \equiv a$, $a \in \mathbb{R}$, и $F_2(t) = t$ следует, что $F_1^{\Delta}(t) = 0$ и $F_2^{\Delta}(t) = 1$ при $t \in \mathbb{T}^k$, и для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{T}^k$ справедливы равенства

$$\int_{t_1}^{t_2} 0 \cdot \Delta s = 0 \quad \text{и} \quad \int_{t_1}^{t_2} \Delta s = t_2 - t_1.$$

Заметим далее, что при всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n_0$

$$\int\limits_{i(\alpha+\beta_1)+\alpha}^{(i+1)(\alpha+\beta_1)} \mu(s)\Delta s = \int\limits_{i(\alpha+\beta_1)+\alpha}^{\sigma(i(\alpha+\beta_1)+a)} \mu(s)\Delta s = \mu^2(i(\alpha+\beta_1)+\alpha) = \beta_1^2.$$

Кроме того, так как $\mu(t) = 0$ на $[i(\alpha+\beta_1), i(\alpha+\beta_1)+\alpha)$, при всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n_0$

$$\left| \int\limits_{i(\alpha+\beta_1)}^{i(\alpha+\beta_1)+\alpha} \mu(s)\Delta s \right| \le \int\limits_{i(\alpha+\beta_1)}^{i(\alpha+\beta_1)+\alpha} 0 \cdot \Delta s = 0.$$

Далее доказательство проводим методом математической индукции по i. При $t \in [0, \alpha)$ $\int_0^t \mu(s)\Delta s = \int_0^t 0 \cdot \Delta s = 0$. При $t = \alpha$ имеем $\int_0^\alpha \mu(s)\Delta s = 0$, т. е. при $i = 0$ равенство (17) выполнено для всех $t \in [0, \alpha]$.

Предположим, что при $i = k$, $k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$, равенство (17) выполняется, т. е.

$$\int\limits_0^t \mu(s)\Delta s = \beta_1^2 k \quad \text{при} \quad t \in \big[k(\alpha+\beta_1), k(\alpha+\beta_1)+\alpha\big].$$

Пусть $t = (k+1)(\alpha+\beta_1)$, тогда

$$\int\limits_0^t \mu(s)\Delta s = \int\limits_0^{k(\alpha+\beta_1)+\alpha} \mu(s)\Delta s + \int\limits_{k(\alpha+\beta_1)+\alpha}^{(k+1)(\alpha+\beta_1)} \mu(s)\Delta s = \beta_1^2 k + \beta_1^2 = (k+1)\beta_1^2.$$

Пусть $t \in \big((k+1)(\alpha+\beta_1), (k+1)(\alpha+\beta_1)+\alpha\big)$, тогда

$$\int\limits_0^t \mu(s)\Delta s = \int\limits_0^{(k+1)(\alpha+\beta_1)} \mu(s)\Delta s + \int\limits_{(k+1)(\alpha+\beta_1)}^{t} 0\Delta s = (k+1)\beta_1^2 + 0 = (k+1)\beta_1^2.$$

Пусть теперь $t = (k+1)(\alpha+\beta_1)+\alpha$, тогда

$$\int\limits_0^t \mu(s)\Delta s = \int\limits_0^{(k+1)(\alpha+\beta_1)} \mu(s)\Delta s + \int\limits_{(k+1)(\alpha+\beta_1)}^{(k+1)(\alpha+\beta_1)+\alpha} \mu(s)\Delta s = (k+1)\beta_1^2 + 0 = (k+1)\beta_1^2.$$

Имеем

$$\int\limits_0^t \mu(s)\Delta s = (k+1)\beta_1^2$$

при всех $t \in \big[(k+1)(\alpha+\beta_1), (k+1)(\alpha+\beta_1)+\alpha\big]$. Итак, равенство

$$\int\limits_0^t \mu(s)\Delta s = \beta_1^2 i \quad \text{при} \quad t \in \bigcup_{i=0}^{n_0} [i(\alpha+\beta_1), i(\alpha+\beta_1)+\alpha]$$

доказано. Вторая часть выражения (17) доказывается аналогично.

Исходя из равенства (17) при $t \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \big[\nu_0 + j(\alpha+\beta_2), \nu_0 + j(\alpha+\beta_2)+\alpha\big]$, для интеграла из теоремы 5 получаем оценку

$$\int\limits_{t_0}^t (c-\mu(s))\Delta s = \int\limits_0^t (c-\mu(s))\Delta s - \int\limits_0^{t_0} (c-\mu(s))\Delta s =$$

$$= c\int\limits_0^t \Delta s - \int\limits_0^t \mu(s)\Delta - \int\limits_0^{t_0} (c-\mu(s))\Delta s =$$

$$= c\,t - \beta_1^2(n_0+1) - \beta_2^2 j - \int\limits_0^{t_0} (c-\mu(s))\Delta s \geq$$

$$\geq c\,\nu_0 + jc(\alpha+\beta_2) - \beta_1^2(n_0+1) - \beta_2^2 j - \int\limits_0^{t_0} (c-\mu(s))\Delta s =$$

$$= j(c(\alpha+\beta_2)-\beta_2^2) + A(t_0) = j(-\beta_2^2 + c\beta_2 + \alpha c) + A(t_0),$$

где $A(t_0) = c\,\nu_0 - \beta_1^2(n_0+1) - \int_0^{t_0}(c-\mu(s))\Delta s$.

Если $-\beta_2^2 + c\beta_2 + \alpha c > 0$, то $\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^t (c-\mu(s))\Delta s = +\infty$ и доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть выполнены предположения S_1, S_2 и имеет место неравенство*

$$0 < \beta_2 < (c + \sqrt{c^2 + 4\alpha c})/2. \tag{18}$$

Тогда существует единственное состояние равновесия системы (6), и это состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво.

Замечание 3. Оценка (18) для функции зернистости всегда лучше, чем оценка $0 < \max\{\beta_1, \beta_2\} < c$, которую дает следствие 2.

В качестве численного примера на временной шкале

$$\mathbb{P}_{0,1,\beta_1,\beta_2} = [0;1] \cup \big(\cup_{j=0}^{\infty}\big[1+\beta_1+j(1+\beta_2), 2+\beta_1+j(1+\beta_2)\big]\big)$$

рассмотрим двухкомпонентную нейронную сеть

$$\begin{aligned} x_1^{\Delta} &= -b_1x_1 + t_{11}s_1(x_2) + t_{12}s_2(x_2) + u_1, \\ x_2^{\Delta} &= -b_2x_1 + t_{21}s_1(x_1) + t_{22}s_2(x_2) + u_2, \end{aligned} \tag{19}$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 = b_2 = 1$, $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & -0,7 \end{pmatrix}$, $s_1(r) = s_2(r) = \operatorname{th} r$. Для временной шкалы $\mathbb{P}_{0,1,\beta 1,\beta_2}$ функция зернистости

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0;1) \bigcup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \left[1 + \beta_1 + j(1+\beta_2), 2 + \beta_1 + j(1+\beta_2)\right) \right), \\ \beta_1, & t = 1, \\ \beta_2, & t \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \left\{2 + \beta_1 + j(1+\beta_2)\right\}. \end{cases}$$

Запишем постоянные, фигурирующие в условиях теоремы 5:

$$L_1 = L_2 = 1, \quad \underline{b} = \overline{b} = 1, \quad \|T\| = 0,77,$$

$$c = 0,15, \quad c_1 = (c + \sqrt{c^2 + 4c})/2 = 0,46.$$

Условие регрессивности $\max\{\beta_1, \beta_2\} \le 0,54$ получим, использовав теорему 6 из [5].

Видим, что если $\beta_1 < 0,54$, $\beta_2 < 0,46$, то выполняются все условия утверждения 2 и, следовательно, существует единственное состояние равновесия системы (19), причем это состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво.

Заметим, что если $\max\{\beta_1, \beta_2\} < 0,15$, то заключение об устойчивости можно сделать как на основании следствия 2, так и на основании утверждения 2.

При $\beta_1 \in (0,15; 0,54)$, $\beta_2 < 0,46$, $\beta_1 > \beta_2$, имеем $\mu^* = \beta_1 > c$. В этом случае зернистость $\mu(t)$ временной шкалы $\mathbb{P}$ ограничена сверху на всем $\mathbb{P}$ константой β_1, которая появляется на первом отрезке $[0,1]$. Условия следствия 2 не выполняются, и сделать заключение об устойчивости состояние равновесия системы (19) на основе следствия 2 не представляется возможным. На бесконечности зернистость $\mu(t)$ временной шкалы $\mathbb{P}$ ограничена другой константой β_2, связанной с отрезками $\cup_{j=0}^{\infty} \left[1 + \beta_1 + j(1+\beta_2), 2 + \beta_1 + j(1+\beta_2)\right]$, и условие (15) выполняется. Значит, выполняются все условия утверждения 2 и, следовательно, существует единственное состояние равновесия системы (19), причем это состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво. Отметим, что для данного примера применить теорему 2 из работы [5] нельзя.

6. Выводы. В настоящей работе получил дальнейшее развитие предложенный в [5] подход к исследованию устойчивости состояния равновесия нейронной системы типа Хопфилда на произвольной временной шкале. При этом ослаблены требования на функции s_i и зернистость временной шкалы.

Получены предварительные результаты, а именно, теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и глобальной асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия приведенной системы. В работе [6] аналогичные результаты получены в предположении, что зернистость временной шкалы нигде не равна нулю. В данной работе такое ограничение не требуется.

Дано описание нейронной сети на временной шкале, получены достаточные условия регрессивности функции системы и достаточные условия существования единственного состояния равновесия нейронной сети. Существование единственного состояния равновесия доказано при более слабых, чем в [5], предположениях на функции s_i. Получено достаточное условие глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия нейронной сети.

Эффективность полученных результатов продемонстрирована для нейронной сети на конкретной временной шкале $\mathbb{P}$. Утверждение 2 дает лучшую, по сравнению с [5], оценку для зернистости временной шкалы $\mathbb{P}$.

1. *Wang K., Michel A. N.* Robustness and perturbation analysis of a class of artifical neural Networks // Neural Networks. — 1994. — **7**. — P. 251 – 259.
2. *Feng Z., Michel A. N.* Robustness analysis of a class of discrete-time systems with applications to neural networks // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2003. — **3**, № 1. — P. 75 – 86.
3. *Chen A., Du D.* Global exponential stability of delayed BAM network on time scale // Neurocomputing. — 2008. — **71**. — P. 3582 – 3588.
4. *Li Y., Chen X., Zhao L.* Stability and existence of periodic solutions to delayed Cohen-Grossberg BAM neural networks with impulses on time scales // Neurocomputing. — 2009. — **72**. — P. 1621 – 1630.
5. *Мартынюк А. А., Лукьянова Т. А.* Об устойчивости нейронной сети на временной шкале // Докл. НАН Украины. — 2010.
6. *Bohner M., Martynyuk A. A.* Elements of stability theory of A. M. Liapunov for dynamic equations on time scales // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2007. — **7**, № 3. — P. 225 – 251.
7. *Wan A., Wang M., Peng J., Qiao H.* Exponential stability of Cohen — Grossberg neural networks with a general class of activation functions // Phys. Lett. A. — 2006. — **350**. — P. 96 – 102.
8. *Hopfield J. J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1984. — **81**. — P. 3088 – 3092.
9. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales: An introduction with applications. — Boston: Birkhäuser, 2001.

Получено 10.07.09