Физика низких температур, 1995, т. 21, № 11, с. 1138–1147 УДК 536.75

Термо- и гидродинамика B-фазы сверхтекучей ферми-жидкости

М. Ю. Ковалевский

Национальный научный центр. Харьковский физико-технический институт, Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1

А. А. Рожков

Институт монокристаллов НАН Украины, Украина, 310001, г. Харьков, пр. Ленина, 60

Статья поступила в редакцию 21 июня 1995 г.

Гидро- и термодинамика B-фазы описаны в рамках фермижидкостного подхода. Получены и проанализированы спектры собственных колебаний системы. Форма Картана и сверхтекучий импульс представлены через параметры порядка. Установлено соотношение, связывающее потоки физических величин в случае локального равновесия. Уравнения гидро- и термодинамики представлены в галилеевой и релятивистской формах.

Гідро- та термодинаміку B-фази описано у рамках фермірідинного підходу. Одержано спектри вільних коливань системи. Форма Картана та надплинний імпульс виражено через параметри порядку. Виведено співвідношення, яке зв'язує між собою усі потоки фізичних величин у локально рівноважному стані. Рівняння гідро- та термодинаміки надано у галілеєвій й релятивістській формах.

Введение

С момента открытия сверхтекучести He-3 ферми-жидкость традиционно рассматривалась в следующих трех основных фазах: A, B и A_1. Впервые A- и B-фазы были теоретически описаны в работах [1,2]. В [3–6] в рамках феноменологических подходов был дан вывод уравнений гидродинамики, при этом оказался существенным учет взаимодействия между орбитальными и спиновыми переменными.

В последнее время появились работы, в которых рассматриваются другие возможные равновесные состояния ферми-жидкости [7–10]. Одним из таких состояний является состояние ферми-жидкости, аналогичное классической B-фазе He-3 с отличным от нуля равновесным вектором спирали. Это состояние удобно рассматривать, используя метод, развитый в работе [11] и называемый *фермижидкостным подходом*. Этот метод, пригодный также в случае сложных магнитоупорядоченных систем [12,13], может быть применен для исследования более широкого класса конденсированных сред.

В настоящей работе в рамках фермижидкостного подхода развита теория сверхтекучей ферми-жидкости в указанном выше состоянии. Построены термодинамика и уравнения бездиссипативной гидродинамики, при выводе которых не предполагалась галилеева или релятивистская инвариантность функционала энергии. Также получены уравнения гидродинамики и рассматривается термодинамика при наличии релятивистской инвариантности функционала энергии (для бозе-систем такие результаты представлены в работах [14–16]). Выведено уравнение для собственных колебаний, учитывающее взаимодействие между орбитальной и спиновой составляющими. Дополнительные термодинамические параметры (матрица поворота и сверхтекучая фаза), связанные с нарушением симметрии, выражены через параметр порядка системы.

Функционал энергии и его свойства симметрии

Описание физических процессов в многочастичных системах в фермижидкостном подходе основывается на задании энергии системы $E(\hat{f})$ как функционала статистического оператора $\hat{f}$ и комбинаторного выражения для энтропии:

$$E(\hat{f}) = \int d^3x e(\mathbf{x}, \hat{f}) .$$

Рассмотрим свойства симметрии функционала $e(\mathbf{x}, \hat{f})$. Реальные сильные взаимодействия инвариантны относительно однородных спиновых вращений и фазовых преобразований:

© М. Ю. Ковалевский, А. А. Рожков, 1995

$$e\left(\mathbf{x}, U_\varphi^+ \hat{f} U_\varphi\right) = e(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad U_\varphi = \exp(-i\varphi_\alpha \hat{S}_\alpha),$$
$$e\left(\mathbf{x}, U_\theta^+ \hat{f} U_\theta\right) = e(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad U_\theta = \exp(-i\theta\hat{N}), \quad (1)$$

где φ_α — угол поворота в спиновом пространстве; θ — сверхтекучая фаза; $\hat{S}_\alpha$ и $\hat{N}$ — операторы α-компоненты полного спина и числа частиц соответственно. Влияние анизотропных магнитных взаимодействий, в принципе, может быть учтено в рамках теории возмущений по этому слабому взаимодействию. Определим операторы энергии $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ и плотности энергии квазичастиц $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})$ соотношением

$$\hat{\varepsilon}(\hat{f}) = \frac{\delta E}{\delta \hat{f}} = \int d^3x \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}).$$

Согласно (1), имеем

$$U_\varphi^+ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}) U_\varphi = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, U_\varphi^+ \hat{f} U_\varphi),$$
$$U_\theta^+ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}) U_\theta = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, U_\theta^+ \hat{f} U_\theta), \quad (2)$$
$$\mathrm{Sp}\,[\hat{S}_\alpha, \hat{f}]\,\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}) = 0, \quad \mathrm{Sp}\,[\hat{N}, \hat{f}]\,\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}) = 0.$$

Другим важным свойством симметрии функционала $e(\mathbf{x}, \hat{f})$ является свойство трансляционной инвариантности

$$e\left(\mathbf{x} + \mathbf{y}, U_\mathbf{y}^+ \hat{f} U_\mathbf{y}\right) = e(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad U_\mathbf{y} = \exp(-iy_k \hat{P}_k), \quad (3)$$

где $\hat{P}_k$ — оператор импульса; y_k — параметр трансляции. Учитывая (3), получаем

$$U_\mathbf{y}^+ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \hat{f}) U_\mathbf{y} = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, U_\mathbf{y}^+ \hat{f} U_\mathbf{y}),$$
$$i\,\mathrm{Sp}\,[\hat{P}_k, \hat{f}]\,\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}) = \nabla_k e(\mathbf{x}, \hat{f}). \quad (4)$$

Сформулируем дифференциальные законы сохранения для плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, \hat{f}) = \mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$, $a = 0, k, 4, \alpha$ ($\zeta_\alpha(\mathbf{x}, \hat{f}) = \{\varepsilon(\mathbf{x}, \hat{f}), s_\alpha(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{x}), n(\mathbf{x})\}$). Поскольку соответствующие им операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (см., например, [17])

$$\left[\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{s}_\beta(\mathbf{x}')\right] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{s}_\gamma(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$
$$\left[\hat{n}(\mathbf{x}), \hat{n}(\mathbf{x}')\right] = 0,$$
$$\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}), \hat{\pi}_j(\mathbf{x}')\right] = \left(-\hat{\pi}_j(\mathbf{x})\nabla_i + \hat{\pi}_i(\mathbf{x}')\nabla_j'\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$
$$\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}), \hat{n}(\mathbf{x}')\right] = -in(\mathbf{x})\nabla_i\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$
$$\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}), \hat{s}_\alpha(\mathbf{x}')\right] = -is_\alpha(\mathbf{x})\nabla_i\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5)$$

а статистический оператор $\hat{f}$ подчиняется уравнению движения

$$\dot{\hat{f}} = i\left[\hat{f}, \hat{\varepsilon}(\hat{f})\right], \quad (6)$$

согласно свойствам симметрии (1), (3), получим уравнения

$$\dot{\zeta}_a(\mathbf{x}, \hat{f}) = -\nabla_k \zeta_{ak}(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad a = 0, i, 4, \alpha, \quad (7)$$

где

$$\zeta_{ak}(\mathbf{x}, \hat{f}) = \mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{\zeta}_{ak}(\mathbf{x}, \hat{f})$$

— плотности потоков аддитивных интегралов движения. Операторы плотности потоков $\hat{\zeta}_{ak}(\mathbf{x}, \hat{f})$ можно представить в терминах операторов плотностей $\hat{\zeta}_a(\mathbf{x}, \hat{f})$ [17]:

$$\hat{q}_k(\mathbf{x}, \hat{f}) = \frac{i}{2}\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\lambda \left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}')\right],$$
$$\hat{j}_{\alpha k}(\mathbf{x}, \hat{f}) = i\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\lambda \left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{s}_\alpha(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}')\right],$$
$$\hat{j}_k(\mathbf{x}, \hat{f}) = i\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\lambda \left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{n}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}')\right], \quad (8)$$
$$\hat{t}_{kj}(\mathbf{x}, \hat{f}) = -e(\mathbf{x}, \hat{f})\delta_{kj} + i\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\lambda \left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\pi}_j(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}')\right].$$

Состояние, соответствующее триплетному спариванию сверхтекучей ферми-жидкости, характеризуется параметром порядка, являющимся симметричным спинором [4]. Оператор параметра порядка, следуя [23], выберем в виде

$$\hat{\Delta}_{\alpha k} = \nabla_k \psi\, \sigma_2 \sigma_\alpha \psi - \psi\, \sigma_2 \sigma_\alpha \nabla_k \psi\,. \tag{9}$$

Согласно (9), выполняются соотношения

$$i\left[\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_{\beta i}(\mathbf{x}')\right] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\Delta}_{\gamma i}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \nabla_i\left(\hat{\Delta}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right),$$

$$i\left[\hat{n}(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_{\beta i}(\mathbf{x}')\right] = -2\hat{\Delta}_{\beta i}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{10}$$

$$i\left[\hat{\pi}_k(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_{\alpha i}(\mathbf{x}')\right] = \hat{\Delta}_{\alpha i}(\mathbf{x})\,\nabla_k \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \nabla\left(\hat{\Delta}_{\alpha i}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right),$$

где $\hat{\Delta} = i/2\,\psi\,\sigma_2\psi$ — оператор параметра порядка синглетного спаривания, удовлетворяющий коммутационным соотношениям

$$i\left[\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\Delta}(\mathbf{x}')\right] = 0\,,\quad i\left[\hat{n}(\mathbf{x}), \hat{\Delta}(\mathbf{x}')\right] = -2\hat{\Delta}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,,\quad i\left[\hat{\pi}_k(\mathbf{x}), \hat{\Delta}(\mathbf{x}')\right] = \hat{\Delta}(\mathbf{x})\,\nabla_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,. \tag{11}$$

При локальных спиновых

$$\underline{U}_\varphi = \exp\left(-i\int d^3x \varphi_\alpha(\mathbf{x})\,\hat{s}_\alpha(\mathbf{x})\right)$$

и фазовых преобразованиях

$$\underline{U}_\theta = \exp\left(-i\int d^3x \theta(\mathbf{x})\,\hat{n}(\mathbf{x})\right),$$

согласно (5), операторы $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, \hat{f})$ преобразуются по формулам

$$\begin{gathered}
\underline{U}_\varphi^{+}\,\hat{s}_\alpha(\mathbf{x})\underline{U}_\varphi = a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\,\hat{s}_\beta(\mathbf{x})\,,\\
\underline{U}_\theta^{+}\hat{s}_\alpha(\mathbf{x})\underline{U}_\theta = \hat{s}_\alpha(\mathbf{x})\,,\\
\underline{U}_\varphi^{+}\hat{n}(\mathbf{x})\underline{U}_\varphi = \hat{n}(\mathbf{x})\,,\ \underline{U}_\theta^{+}\hat{n}(\mathbf{x})\underline{U}_\theta = \hat{n}(\mathbf{x})\,,\\
\underline{U}_\varphi^{+}\hat{\pi}_i(\mathbf{x})\underline{U}_\varphi = \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + \underline{\omega}_{\alpha i}(\mathbf{x})\,\hat{\underline{s}}_\alpha(\mathbf{x})\,,\\
\underline{U}_\theta^{+}\hat{\pi}_i(\mathbf{x})\underline{U}_\theta = \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + p_i(\mathbf{x})\,\hat{n}(\mathbf{x})\,,\\
\underline{U}_\varphi^{+}\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})\underline{U}_\varphi = \hat{\varepsilon}\left(\mathbf{x}, p_i(\mathbf{x}), \hat{f}\right),\\
\underline{U}_\theta^{+}\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})\underline{U}_\theta = \hat{\varepsilon}\left(\mathbf{x}, \omega_i(\mathbf{x}), \hat{f}\right).
\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ — локальные углы поворота; $\theta(\mathbf{x})$ — локальная сверхтекучая фаза. Ортогональная матрица поворота $a_{\alpha\beta}(\varphi)$ с учетом (12) может быть записана в виде

$$a_{\alpha\beta}(\varphi) = \left(\exp\left(-\varepsilon\varphi\right)\right)_{\alpha\beta}. \tag{13}$$

Правая форма Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}$ (см. [18]) в терминах матрицы поворота определяется равенством

$$\underline{\omega}_{\alpha k}(a) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(a\,\nabla_k\,\tilde{a}\right)_{\gamma\beta} \tag{14}$$

и удовлетворяет тождеству Маурера—Картана

$$\nabla_k \underline{\omega}_{\alpha i} - \nabla_i \underline{\omega}_{\alpha k} = \left[\underline{\omega}_k \times \underline{\omega}_i\right]_\alpha. \tag{15}$$

Градиент сверхтекучей фазы θ, имеющий смысл свертекучего импульса $p_k = \nabla_k\theta$, удовлетворяет соотношению

$$\nabla \times \mathbf{p} = 0\,.$$

При локальных фазовых и спиновых преобразованиях операторы параметров порядка изменяются по законам

$$\begin{gathered}
\underline{U}_\varphi^{+}\hat{\Delta}(\mathbf{x})\underline{U}_\varphi = \hat{\Delta}(\mathbf{x})\,,\\
\underline{U}_\theta^{+}\hat{\Delta}(\mathbf{x})\underline{U}_\theta = \hat{\Delta}(\mathbf{x})\exp\left(-2i\vartheta(\mathbf{x})\right),\\
\underline{U}_\varphi^{+}\hat{\Delta}_{\alpha i}(\mathbf{x})\underline{U}_\varphi = a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\hat{\Delta}_{\beta i}(\mathbf{x}) - \underline{\omega}_{\alpha i}(\mathbf{x})\hat{\Delta}(\mathbf{x})\,,\\
\underline{U}_\theta^{+}\hat{\Delta}_{\alpha i}(\mathbf{x})\underline{U}_\theta = \hat{\Delta}_{\alpha i}(\mathbf{x})\exp\left(-2i\vartheta(\mathbf{x})\right).
\end{gathered} \tag{16}$$

Соотношения (5), (8), (11) необходимы для построения термодинамики и нахождения плотностей потоков аддитивных интегралов движения.

Квазисредние в фермижидкостном подходе

Равновесный статистический оператор нормального состояния $\hat{f}$ находится из требования максимума энтропии при фиксированных значениях функционала энергии $E(\hat{f})$, спина $S_\alpha(\hat{f}) = \mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{S}_\alpha$, импульса $P_k = \mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{P}_k$ и числа частиц $N = \mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{N}$. Вводя множители Лагранжа $Y_a = \{Y_0, Y_\alpha, Y_i, Y_4\}$, соответствующие величинам E, S_α, P_k, N, из условия экстремума для термодинамического потенциала Ω

$$\delta\Omega(\hat{f}, Y) = 0\,,$$

$$\Omega(\hat{f}, Y) = -S(\hat{f}) + Y_0 E(\hat{f}) + Y_\alpha\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{S}_\alpha +$$

$$+ Y_k\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{P}_k + Y_4\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{N}\,,$$

$$S(\hat{f}) = -\mathrm{Sp}\left\{\hat{f}\ln\hat{f} + (1-\hat{f})\ln(1-\hat{f})\right\}$$

получаем уравнение самосогласования

$$\hat{f} = \left[\exp\left(Y_0\hat{\varepsilon}(\hat{f}) + Y_\alpha\hat{S}_\alpha + Y_k\hat{P}_k + Y_4\hat{N}\right) + 1\right]^{-1}. \tag{17}$$

Здесь Y_α — термодинамические силы. Состояние, описываемое статистическим оператором (19), обладает в соответствии с (2), (4) свойствами симметрии:

$$[\hat{f}, \hat{P}_k] = 0\,, \quad [\hat{f}, \hat{\Sigma}_\alpha] = 0\,, \quad [\hat{f}, \hat{\varepsilon}(\hat{f})] = 0\,,$$

$$[\hat{f}, \hat{N}] = 0\,, \quad [\hat{f}, \hat{L}_i] = 0\,, \tag{18}$$

где $\hat{\Sigma}_\alpha = \hat{S}_\alpha - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Y_\beta\,\partial/\partial Y_\gamma$ — обобщенный оператор спина; $\hat{L}_i = \hat{M}_i - i\varepsilon_{ikl}Y_k\partial/\partial Y_l$ — обобщенный оператор орбитального момента, $\hat{M}_i = \int d^3[\mathbf{x}\times\pi]_i$. Легко видеть, что для состояния (18) будет справедлив 2-й закон термодинамики

$$d\omega = \zeta_a dY_a\,, \quad \omega = \lim_{V\to\infty}\Omega/V = \omega(Y)\,. \tag{19}$$

Для описания B-фазы сверхтекучей ферми-жидкости модифицируем определение равновесного статистического оператора. С этой целью, в соответствии с концепцией квазисредних [19], определим равновесное среднее равенством

$$a(\mathbf{x}, \hat{f}) = \mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{a}(\mathbf{x}) = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\mathrm{Sp}\,\hat{f}_\nu\hat{a}(\mathbf{x})\,,$$

$$\hat{f}_\nu = \left[\exp\left(Y_a\hat{\gamma}_a + \nu Y_0\hat{G}\right) + 1\right]^{-1}, \tag{20}$$

где $\hat{a}(\mathbf{x})$ — произвольный квазилокальный оператор; $\hat{G}$ — источник, нарушающий соотношения симметрии (18). Источник $\hat{G}$ представляет собой линейный функционал операторов параметров порядка $\hat{\Delta}$, $\hat{\Delta}_{\alpha k}$:

$$\hat{G} = \int d^3x\left\{g_{\alpha k}(\mathbf{x}, t)\,\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}, t)\hat{\Delta}(\mathbf{x}) + \text{э.с.}\right\}.$$

Конкретный вид функций $g(\mathbf{x}, t)$, $g_{\alpha k}(\mathbf{x}, t)$ определяется свойствами симметрии состояния равновесия. Условия симметрии в B-фазе имеют вид

$$\left[\hat{f}, \hat{P}_k - q_k n_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha + p_k\hat{N}\right] = 0\,,$$

$$\left[\hat{f}, \hat{M}_k + a'_{k\alpha}\hat{\Sigma}_\alpha\right] = 0\,,$$

$$\left[\hat{f}, Y_0\hat{\varepsilon}(\hat{f}) + Y_0\underline{\omega}_{\alpha 0}\hat{\Sigma}_\alpha + Y_0 p_0\hat{N}\right] = 0\,, \tag{21}$$

$$\underline{\omega}_{\alpha 0} = Y_0^{-1}\left(\underline{Y}_\alpha + Y_k\underline{\omega}^0_{\alpha k}\right),$$

$$p_0 = Y_0^{-1}\left(Y_4 + Y_k p_k\right), \quad \underline{\omega}^0_{\alpha k} = q_k n_\alpha\,,$$

q_k — вектор магнитной спирали; p_k — сверхтекучий импульс; единичный вектор n_α находится из условия непротиворечивости соотношений (21) и может быть представлен в виде $n_\alpha = Y_\alpha/|Y|$. Согласно (6), (21), имеем

$$g(\mathbf{x}, t) = \exp\left(-2i\theta(\mathbf{x})\right),$$

$$g_{\alpha k}(\mathbf{x}, t) = a'_{k\beta}\,a_{\beta\alpha}\left(\varphi(\mathbf{x}, t)\right)\exp\left(-2i\theta(\mathbf{x})\right),$$

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \varphi^0_\alpha + n_\alpha(\mathbf{q}\mathbf{x} - ht)\,, \tag{22}$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \theta_0 + \mathbf{p}\mathbf{x} - p_0 t\,,$$

где $h_\alpha = n_\alpha h$; $a'_{k\alpha}$ — матрица однородного поворота спиновой подсистемы относительно орбитальной. В соответствии с определением (14), правая форма Картана для матрицы поворота $a(\mathbf{x}, t)$ (22) равна

$$\underline{\omega}_{\alpha k} = q_k\underline{n}_\alpha\,, \quad \underline{n}^2_\alpha = 1 \tag{23}$$

и не зависит от координат и времени в состоянии полного равновесия. Из условий симметрии (23) следует, что равновесные значения плотности спина $s_\alpha(\mathbf{x}, t)$ зависят от координат и времени посредством матрицы поворота: $s_\alpha(\mathbf{x}, t) = a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)s_\beta$. Сверхтекучий импульс и средние остальных аддитивных интегралов движения не зависят от координат и времени в состоянии равновесия. Таким образом, состояние равновесия B-фазы сверхтекучей ферми-жидкости характеризуется термодинамическими силами Y_a, вектором спирали $\mathbf{q}$, сверхтекучим импульсом $\mathbf{p}$, углами поворота φ_α и сверхтекучей фазой θ. В реальной ферми-жидкости He-3B в равновесии реализуется состояние с $\mathbf{q} = 0$ и $\mathbf{s} = 0$.

Термодинамика и потоки в локально равновесном состоянии

Для конденсированных сред с нарушенной неабелевой группой симметрии не все равновесные плотности потоков могут быть представлены в терминах равновесного термодинамического потенциала [20, 22]. Поэтому необходимо сформулировать термодинамику и найти плотности потоков исходя из локально равновесного состояния, статистический оператор которого определяется равенством

$$\hat{f}\{Y(\mathbf{x}), a(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})\} = \left[\exp\int d^3x\left(Y_0(\mathbf{x})\,\hat{\xi}_a(\mathbf{x}, \hat{f}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \nu Y_0(\mathbf{x})\left(g(\mathbf{x})\hat{\Delta}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) + \text{э.с.}\right)\right) + 1\right]^{-1}, \tag{24}$$

где $g(\mathrm{x})$, $g_\alpha(\mathrm{x})$ — некоторые c-числовые функции. Термодинамические силы $Y(\mathrm{x})$, сверхтекучий импульс $\mathrm{p}(\mathrm{x})$ и ортогональная матрица $a(\mathrm{x})$ являются произвольными функциями координат. В состоянии полного равновесия $Y(\mathrm{x}) = Y$, $p(\mathrm{x}) = p$, и структура ортогональной матрицы $a_{\alpha\beta}(\mathrm{x})$ определяется формулой (22). Рассматривая локально равновесное состояние, целесообразно перейти от оператора (24) к оператору

$$\hat{f}\{Y, a, p\} = \underline{U}_\theta \underline{U}_\varphi \hat{f}\{Y, a, p\} \underline{U}_\varphi^+ \underline{U}_\theta^+ =$$

$$= \left[\exp \int d^3x \left(\underline{Y}_a(\mathrm{x})\, \hat{\zeta}_a(\mathrm{x}, \hat{f}) + \nu Y_0(\mathrm{x}) \left(g(\mathrm{x}) \underline{U}_\theta \underline{U}_\varphi \hat{\Delta}(\mathrm{x}) \underline{U}_\varphi^+ \underline{U}_\theta^+ + \mathbf{g}_\alpha(\mathrm{x}) \underline{U}_\theta \underline{U}_\varphi \hat{\Delta}_\alpha(\mathrm{x}) \underline{U}_\varphi^+ \underline{U}_\theta^+ + \text{э.с.}\right)\right) + 1\right]^{-1}, \tag{25}$$

где $\hat{\zeta}_a(\mathrm{x}) = \underline{U}_\theta \underline{U}_\varphi \hat{\zeta}_a(\mathrm{x}) \underline{U}_\varphi^+ \underline{U}_\theta^+$, $\underline{Y} = aY$.

Определим локально равновесный термодинамический потенциал:

$$\Omega(\hat{f}, Y) = -S(\hat{f}) + \int d^3x Y_a(\mathrm{x})\, \mathrm{Sp}\, \hat{f} \hat{\zeta}_a(\mathrm{x}) . \tag{26}$$

Здесь $Y_a(\mathrm{x})$ — множители Лагранжа, соответствующие величинам $\zeta_a(\mathrm{x}) = \mathrm{Sp}\, \hat{f} \hat{\zeta}_a(\mathrm{x})$. Из (11), (25), (26) следует, что локально равновесный термодинамический потенциал Ω является функционалом термодинамических сил $\underline{Y}_a = \{Y_0, \underline{Y}_\alpha, Y_i, Y_4\}$, правой формы Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}(\mathrm{x}')$ и сверхтекучей фазы θ:

$$\Omega = \Omega\left(\underline{Y}(\mathrm{x}'), \underline{\omega}_k(\mathrm{x}'), \mathrm{p}(\mathrm{x}')\right) = \int d^3x \omega \left(x, \underline{Y}(\mathrm{x}'), \underline{\omega}_k(\mathrm{x}'), \theta(\mathrm{x}')\right) . \tag{27}$$

Здесь ω — плотность термодинамического потенциала. Подставляя в (26) $\hat{f}$ вместо $\hat{f}$ и варьируя потенциал Ω по термодинамическим силам Y, матрице поворота $a(\mathrm{x})$ и сверхтукучей фазе θ, получаем второе начало термодинамики для локально равновесного состояния:

$$\delta\omega = \varepsilon \delta Y_0 + \underline{s}_\alpha \delta \underline{Y}_\alpha + \pi_k \delta Y_k + n \delta Y_4 + \left(Y_0 \underline{j}_{\alpha k} + Y_k \underline{s}_\alpha\right) \delta \underline{\omega}_{\alpha k} + \left(Y_0 j_k + Y_k n\right) \delta p_k , \tag{28}$$

где

$$\underline{s}_\alpha(\mathrm{x}) = \mathrm{Sp}\, \hat{\underline{f}} \hat{\underline{s}}_\alpha(\mathrm{x}) = a_{\alpha\beta}(\mathrm{x})\, s_\beta , \quad \underline{j}_{\alpha k} = a_{\alpha\beta} j_{\beta k} = \frac{1}{Y_0} \frac{\delta\omega}{\delta \underline{\omega}_{\alpha k}} - \frac{Y_k}{Y_0} \frac{\delta\omega}{\delta \underline{Y}_\alpha} , \quad j_k = \frac{1}{Y_0} \frac{\delta\omega}{\delta p_k} - \frac{Y_k}{Y_0} \frac{\delta\omega}{\delta Y_4} .$$

Если теперь ввести плотность энтропии $\sigma = -\omega + Y_a \zeta_a$, то (28) можно переписать в следующем виде:

$$\delta\varepsilon = T\delta\sigma + \left(\underline{j}_{\alpha k} + \frac{Y_k}{Y_0} \underline{s}_\alpha\right) \delta \underline{\omega}_{\alpha k} + \frac{\underline{Y}_a}{Y_0} \delta \zeta_a + \left(j_k + \frac{Y_k}{Y_0} n\right) \delta p_k , \tag{29}$$

где

$$\underline{j}_{\alpha k} = \frac{\delta\varepsilon}{\delta \underline{\omega}_{\alpha k}} + \underline{s}_\alpha \frac{\delta\varepsilon}{\delta\pi_k} , \quad j_k = \frac{\delta\varepsilon}{\delta p_k} + n \frac{\delta\varepsilon}{\delta\pi_k} .$$

Получим теперь выражение для тензора натяжений. С этой целью введем унитарное преобразование произвольных деформаций

$$\underline{U}_\eta = \exp\left\{-i \int d^3x \eta_i(\mathrm{x})\, \hat{\pi}_i(\mathrm{x})\right\}$$

и рассмотрим вариацию по параметру $\eta_i(\mathrm{x})$ от модифицированного потенциала

$$\Omega_\eta = -S(\hat{f}) + Y_a\, \mathrm{Sp}\, \underline{U}_\eta \hat{f} \underline{U}_\eta^+ \hat{\gamma}_a ,$$

которая может быть записана в виде

$$\delta_\eta \Omega_\eta = -i \int d^3x d^3x' \delta\eta_i(\mathrm{x}')\, \mathrm{Sp}\, \hat{f} \left[\hat{\pi}_i(\mathrm{x}'), Y_a(\mathrm{x}) \hat{\zeta}_a(\mathrm{x})\right].$$

Варьируя Ω_η по η и используя коммутационные соотношения (6), получаем тензор натяжений

$$t_{ik} = -\frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{p_i}{Y_0} \frac{\partial\omega}{\partial p_k} + \frac{\underline{\omega}_{\alpha i}}{Y_0} \frac{\partial\omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} . \tag{30}$$

Чтобы найти выражение для плотности потока энергии, воспользуемся соотношением [13], связывающим плотности потоков физических величин в состоянии равновесия, справедливым и в случае локального равновесия:

$$\underline{Y}_a\left(Y_k\underline{\xi}_a + Y_0\underline{\xi}_{ak}\right) = 0\,.$$

Отсюда следует

$$\omega_k = -\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0} - \frac{p_0}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k} - \frac{\underline{\omega}_{\alpha 0}}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}}\,. \quad (31)$$

Выражения для плотностей потоков (29), (30), (31) в локально равновесном состоянии можно записать в компактном виде:

$$\underline{\zeta}_{ak} = -\frac{\partial}{\partial\underline{Y}_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial p_0}{\partial\underline{Y}_a}\frac{\partial\omega}{\partial p_k} + \frac{\partial\omega_{\alpha 0}}{\partial\underline{Y}_a}\frac{\partial\omega}{\partial\omega_{\alpha k}}\,.$$

Используя очевидное соотношение

$$i\int d^3x'\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}),\, Y_a(\mathbf{x}')\hat{\xi}_a(\mathbf{x}')\right] = 0\,,$$

пренебрегая градиентами $\nabla\underline{Y}$, $\nabla\omega_k$ и учитывая, что $\nabla_k a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\alpha\rho}\omega_{\rho k}$, приходим к равенству

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\underline{Y}_\beta\frac{\partial\omega}{\partial\underline{Y}_\gamma} + \underline{\omega}_{\beta k}\frac{\partial\omega}{\partial\underline{\omega}_{\gamma k}}\right) = 0 \quad (32)$$

или

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\underline{s}_\beta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\gamma} + \underline{\omega}_{\beta k}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\gamma k}}\right) = 0\,. \quad (33)$$

Отметим, что термодинамический потенциал в общем случае является функционалом инвариантов:

$$\omega = \omega\Big(Y_0,\, \underline{Y}^2, Y^2, Y_4,\, p^2,\, \underline{\omega}\,p^2,\, \underline{\omega}_k^{\,2},\, Y_k p_k,\, Y_k\underline{\omega}_{\alpha k}\underline{Y}_\alpha,$$
$$(\underline{Y\omega}_k)^2,\, p_k\underline{\omega}_{\alpha k}\underline{Y}_\alpha,\, (Y_i\underline{\omega}_i)^2,\, (p_i\underline{\omega}_{\alpha i})(Y_k\underline{\omega}_{\alpha k})\Big)\,. \quad (34)$$

Ортогональная матрица поворота и сверхтекучая фаза как функционалы произвольного статистического оператора

Введем ортогональную матрицу поворота как функционал неравновесного статистического оператора $\hat{f}$ в неявном виде соотношениями

$$\mathbf{e}_1 a(\mathbf{x},\hat{f})\mathbf{u}(\mathbf{x},\hat{f}) = 0\,,\quad \mathbf{e}_1 a(\mathbf{x},\hat{f})\mathbf{v}(\mathbf{x},\hat{f}) = 0\,,$$
$$\mathbf{e}_2 a(\mathbf{x},\hat{f})\mathbf{v}(\mathbf{x},\hat{f}) = 0\,. \quad (35)$$

Здесь $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$) — некоторый фиксированный репер; u_α, v_α представляют собой средние от операторов:

$$\hat{u}_\alpha(\mathbf{x}) = i\xi_i\left(\hat{\Delta}_{\alpha i}(\mathbf{x})\hat{\Delta}^+(\mathbf{x}) - \hat{\Delta}(\mathbf{x})\hat{\Delta}^+_{\alpha i}(\mathbf{x})\right),$$
$$\hat{v}_\alpha(\mathbf{x}) = i\xi_i\left(\hat{\Delta}^+(\mathbf{x})\hat{\Delta}_{\alpha i}(\mathbf{x}) - \hat{\Delta}^+_{\alpha i}(\mathbf{x})\hat{\Delta}(\mathbf{x})\right) \quad (36)$$

(ξ_i — единичный пространственный вектор). Легко убедиться, что при спиновых вращениях операторы (36) изменяются как спиновые векторы:

$$\underline{U}^+_\varphi\hat{v}_\alpha(\mathbf{x})\underline{U}_\varphi = a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\,\hat{v}_\beta(\mathbf{x})\,,$$
$$\underline{U}^+_\varphi\,\hat{u}_\alpha(\mathbf{x})\underline{U}_\varphi = a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\,\hat{u}_\beta(\mathbf{x})\,. \quad (37)$$

При фазовых преобразованиях они не изменяются:

$$\underline{U}^+_\theta\,\hat{u}_\alpha(\mathbf{x})\underline{U}_\theta = \hat{u}_\alpha(\mathbf{x}),\ \underline{U}^+_\theta\,\hat{v}_\alpha(\mathbf{x})\underline{U}_\theta = \hat{v}_\alpha(\mathbf{x})\,. \quad (38)$$

Согласно (35), (16), справедливы формулы

$$a\left(\mathbf{x},\,\underline{U}^+_\varphi\hat{f}\underline{U}_\varphi\right) = a(\mathbf{x},\hat{f})b(\mathbf{x})\,,$$
$$a\left(\mathbf{x},\,\underline{U}^+_\theta\hat{f}\underline{U}_\theta\right) = a(\mathbf{x},\hat{f})\,. \quad (39)$$

Рассмотрим вариацию ортогональной матрицы поворота $a(\mathbf{x},\hat{f})$, связанную с вариацией статистического оператора $\delta\hat{f}$:

$$\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\hat{f}) = a_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\hat{f}+\delta\hat{f}) - a_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\hat{f}) =$$
$$= a_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\hat{f})\,\chi_{\gamma\beta}(\mathbf{x},\hat{f})\,, \quad (40)$$

где

$$\chi_{\gamma\beta}(\mathbf{x},\hat{f},\delta\hat{f}) = \mathrm{Sp}\,\delta\hat{f}\hat{\chi}_{\gamma\beta}(\mathbf{x},\hat{f})\,,$$
$$\hat{\chi}_{\gamma\beta}(\mathbf{x},\hat{f}) = -\hat{\chi}_{\beta\gamma}(\mathbf{x},\hat{f})\,.$$

Если ввести дуальную величину

$$\hat{\chi}_\gamma(\mathbf{x},\hat{f}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\chi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\hat{f}),$$

то вариацию (40) можно представить в виде

$$\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\hat{f}) = a_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\hat{f})\,\varepsilon_{\gamma\beta\lambda}\,\mathrm{Sp}\,\delta\hat{f}\hat{\chi}_\lambda(\mathbf{x},\hat{f})\,. \quad (41)$$

Разлагая выражения (39) по малым φ и θ, получаем соотношения

$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}'),\hat{\chi}_\beta(\mathbf{x},\hat{f})\right] = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,,$$
$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{n}(\mathbf{x}'),\hat{\chi}_\beta(\mathbf{x},\hat{f})\right] = 0\,. \quad (42)$$

При преобразованиях трансляций, принимая во внимание (35), находим

$$a\left(\mathbf{x},\,\underline{U}^+_y\hat{f}\underline{U}_y\right) = a(\mathbf{x}-\mathbf{y},\hat{f})b(\mathbf{x})\,, \quad (43)$$

из (43) получаем

$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{P}_k, \hat{\chi}_\alpha(\mathbf{x}, \hat{f})\right] = \omega_{\alpha k}(\mathbf{x}, \hat{f}) , \qquad (44)$$

где $\omega_{\alpha k} = a_{\beta\alpha}\,\underline{\omega}_{\beta k}$ — левая форма Картана. Варьируя условия (35) и используя свойства оператора $\hat{\chi}_\alpha$ (44), (46), получаем явный вид оператора $\hat{\chi}$ [21]:

$$\hat{\chi}_\alpha = \frac{1}{\kappa^2}\left\{(\hat{\mathbf{v}}\vec{\kappa})u_\alpha - (\hat{\mathbf{u}}\vec{\kappa})v_\alpha + \frac{\kappa_\alpha}{v^2}\left[(\mathbf{uv})(\hat{\mathbf{vv}}) - (\mathbf{u}\hat{\mathbf{v}})v^2\right]\right\}, \qquad (45)$$

где $\vec{\kappa} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Используя формулу $\hat{\chi}$ (45), находим выражение для формы Картана через параметры порядка в явном виде:

$$\omega_{\alpha k} = z_{\alpha k} + d_\alpha q_k ,$$
$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}), \hat{\chi}_\alpha(\mathbf{x}', \hat{f})\right] = \omega_{\alpha i}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \qquad (46)$$

где $z_{\alpha k} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\beta \nabla_k d_\gamma$; $q_k = m_\alpha \nabla_k f_\alpha$ — вектор спирали; d_α, m_α, f_α — единичные векторы, связанные с параметрами порядка соотношениями

$$d_\alpha = \kappa_\alpha / |\vec{\kappa}|, \quad f_\alpha = v_\alpha / |\mathbf{v}|, \quad \mathbf{m} = \mathbf{f}\times\mathbf{d}, \quad d_\alpha = \underline{d}_\beta\, a_{\beta\alpha} ,$$
$$d^2 = m^2 = f^2 = 1 , \quad \mathbf{dm} = \mathbf{df} = \mathbf{mf} = 0 .$$

Из тождества Маурера—Картана (14) следуют соотношения

$$\nabla_k q_i - \nabla_i q_k = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\alpha \nabla_i d_\beta \nabla_k d_\gamma ,$$
$$\nabla_k z_{\alpha i} - \nabla_i z_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} z_{\beta i} z_{\gamma k} . \qquad (47)$$

Первое из них представляет собой тождество Мермина—Хо, второе связывает поперечные части формы Картана (по отношению к направлению вектора $\mathbf{d}$). Вектор $\mathbf{d}$ имеет смысл направления магнитной анизотропии. Плотности потоков аддитивных интегралов движения можно переписать в новых переменных:

$$\underline{\zeta}_{\alpha k} = -\frac{\partial}{\partial \underline{Y}_\alpha}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial p_0}{\partial \underline{Y}_\alpha}\frac{\partial \omega}{\partial p_k} + \frac{\partial q_0}{\partial \underline{Y}_\alpha}\frac{\partial \omega}{\partial q_k} + \frac{\partial \underline{z}_{\alpha 0}}{\partial \underline{Y}_\alpha}\frac{\partial \omega}{\partial \underline{z}_{\alpha k}} , \qquad (48)$$

где

$$q_0 = Y_0^{-1}\left(Y_\alpha d_\alpha + Y_k q_k\right) ,$$

$$\underline{z}_{\alpha 0} = Y_0^{-1}\left((\delta_{\alpha\beta} - \underline{d}_\alpha \underline{d}_\beta)\,\underline{Y}_\beta + Y_i \underline{z}_{\alpha i}\right) .$$

Как видно из (48), продольные и поперечные составляющие дают аддитивный вклад в потоки.

Выразим сверхтекучую фазу $\theta(\mathbf{x})$ через параметр порядка:

$$\theta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\,\ln\left(\mathrm{Sp}\,\hat{f}\hat{\Delta}_{\alpha k}\right)^2 . \qquad (49)$$

Учтя (49), (16), получим

$$\theta\left(\mathbf{x}, \underline{U}_\varphi^+ \hat{f}\,\underline{U}_\varphi\right) = \theta(\mathbf{x}, \hat{f}) ,$$

$$\theta\left(\mathbf{x}, \underline{U}_\vartheta^+ \hat{f}\,\underline{U}_\vartheta\right) = \theta(\mathbf{x}, \hat{f}) + \vartheta(\mathbf{x}) . \qquad (50)$$

Рассмотрим вариацию сверхтекучей фазы, связанную с вариацией статистического оператора,

$$\delta\theta(\mathbf{x}, \hat{f}) = \theta(\mathbf{x}, \hat{f} + \delta\hat{f}) - \theta(\mathbf{x}, \hat{f}) = \mathrm{Sp}\,\delta\hat{f}\hat{\vartheta}(\mathbf{x}) . \qquad (51)$$

Поступая так же, как и при выводе формул (42), (44), выпишем свойства оператора $\hat{\vartheta}(\mathbf{x})$:

$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}'), \hat{\vartheta}(\mathbf{x}, \hat{f})\right] = 0 ,$$
$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{n}(\mathbf{x}'), \hat{\vartheta}(\mathbf{x}, \hat{f})\right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \qquad (52)$$
$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{\pi}_k(\mathbf{x}), \hat{\vartheta}(\mathbf{x}', \hat{f})\right] = p_k(\mathbf{x}, \hat{f})\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') .$$

Варьируя (49) и используя (52), получаем явный вид оператора $\hat{\vartheta}(\mathbf{x})$:

$$\hat{\vartheta} = -i\left\{\Delta_{\alpha i}\hat{\Delta}_{\alpha i}\Delta_{\beta j}^{-2} - \Delta_{\alpha i}^*\hat{\Delta}_{\alpha i}^+\Delta_{\beta j}^{*-2}\right\} . \qquad (53)$$

Уравнения гидродинамики

Рассмотрим бездиссипативную гидродинамику B-фазы сверхтекучей ферми-жидкости. Такая жидкость на гидродинамическом этапе эволюции может быть описана набором параметров (плотностями спина $s_\alpha(\mathbf{x})$, энергии $\varepsilon(\mathbf{x})$, импульса $\pi_k(\mathbf{x})$, числа частиц $n(\mathbf{x})$, ортогональной матрицей поворота $a_{\alpha\beta}$ и сверхтекучим импульсом $p_k(\mathbf{x})$):

$$\hat{f}(t) \underset{t >> \tau_0}{\rightarrow} \hat{f}\left(\zeta(t), a(t), p(t)\right) ,$$

где τ_0 — время релаксации. В общем случае статистический оператор $\hat{f} = \hat{f}(\zeta, a, p)$ можно записать в виде $\hat{f}(\zeta, a, \mathrm{p}) = \hat{f}_0(Y, a, \mathrm{p}) + \hat{f}'(\zeta, a, \mathrm{p})$, где $\hat{f}_0$ описывает обратимые процессы, а $\hat{f}'$ — процессы релаксации.

Сформулируем уравнение для $a_{\alpha\beta}$. С этой целью воспользуемся уравнением (6) и выражением (41) и в результате получим

$$\dot{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \hat{f}) = i a_{\alpha\lambda}(\mathbf{x}, \hat{f})\varepsilon_{\lambda\beta\gamma}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{\varepsilon}(\hat{f}), \hat{\chi}_\gamma(\mathbf{x}, \hat{f})\right] . \qquad (54)$$

Пренебрегая в формуле (54) релаксационными процессами, находим

$$\dot{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \hat{f}_0) = i a_{\alpha\lambda}(\mathbf{x}, \hat{f}_0)\varepsilon_{\lambda\beta\gamma}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}_0\left[\hat{\varepsilon}(\hat{f}_0), \hat{\chi}_\gamma(\mathbf{x}, \hat{f})\right] , \qquad (55)$$

откуда, используя условие стационарности (21) и свойство (42), получаем уравнение движения для ортогональной матрицы поворота $a_{\alpha\beta}$:

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda}\,\varepsilon_{\lambda\beta\gamma}\left(h_\gamma + \mathrm{q}v_n\, n_\gamma\right) = a_{\alpha\lambda}\,\varepsilon_{\lambda\beta\gamma}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma} + \underline{\omega}_{\gamma i}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i}\right),$$

$$h_\gamma = -Y_\gamma/Y_0\,,\quad v_{nk} = -Y_k/Y_0\,. \qquad (56)$$

Сформулируем аналогичным образом уравнение для сверхтекучей фазы θ. Согласно (6) и (51),

$$\dot{\theta}(\mathbf{x},\hat{f}) = i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{\varepsilon}(\hat{f}),\hat{\vartheta}(\mathbf{x},\hat{f})\right]. \qquad (57)$$

Если пренебречь релаксационными процессами в (57), то

$$\dot{\theta}(\mathbf{x},\hat{f}_0) = i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}_0\left[\hat{\varepsilon}(\hat{f}_0),\hat{\vartheta}(\mathbf{x},\hat{f}_0)\right].$$

Отсюда с учетом условия (21) и свойств (52) получаем уравнение движения для фазы

$$\dot{\theta} = \mu + \mathrm{p}v_n = \frac{\partial\varepsilon}{\partial n} + p_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i}\,,\quad \mu = -\frac{Y_4}{Y_0}\,. \qquad (58)$$

Запишем уравнения для аддитивных интегралов движения ζ_a. Согласно (7), имеем

$$\dot{\zeta}_a(\mathbf{x},\hat{f}) = i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\left[\hat{\varepsilon}(\hat{f}),\hat{\zeta}_a(\mathbf{x},\hat{f})\right],$$

пренебрегая релаксационными процессами, находим

$$\dot{\zeta}_a(\mathbf{x},\hat{f}_0) = i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}_0\left[\hat{\varepsilon}(\hat{f}_0),\hat{\zeta}_a(\mathbf{x},\hat{f}_0)\right] = -\nabla_i\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}_0\zeta_{ai}(\mathbf{x},\hat{f}_0)\,, \qquad (59)$$

где плотности потоков ζ_{ai} в правой части уравнения (59) имеют вид (10). Выпишем полную систему уравнений гидродинамики такой жидкости в бездиссипативном приближении:

$$\dot{\underline{s}}_\alpha = -\nabla_k\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}} + \underline{s}_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\gamma k}}\underline{\omega}_{\beta k} + \underline{s}_\beta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\gamma}\right),$$

$$\dot{\sigma} = -\nabla_k\left(\sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\right),\quad \dot{n} = -\nabla_k\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k} + n\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\right),$$

$$\dot{\pi}_i = -\nabla_k\left(p\delta_{ik} + p_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k} + \underline{\omega}_{\alpha i}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}} + \pi_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\right),$$

$$\dot{\underline{\omega}}_{\alpha k} = -\nabla_k\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\alpha} + \underline{\omega}_{\alpha k}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\underline{\omega}_{\beta k}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\underline{s}_\gamma} + \underline{\omega}_{\gamma k}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\right), \qquad (60)$$

$$\dot{p}_i = -\nabla_i\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n} + p_k\frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k}\right),$$

где $p = -\omega Y_0^{-1}$ — давление.

Рассмотрим теперь, к каким упрощениям приводит учет инвариантности Галилея и Лоренц-инвариантности.

Наличие галилеевой инвариантности приводит к уменьшению числа инвариантов, от которых зависит потенциал ω:

$$\omega = \omega\left(Y_0',\ \underline{Y}^2,\ Y'^{\,2},\ Y_4',\ \underline{\omega}_k^2,\right.$$

$$\left. Y_k'\underline{\omega}_{\alpha k}\underline{Y}_\alpha,\ (\underline{Y}\underline{\omega}_k)^2,\ (Y_i'\underline{\omega}_i)^2\right), \qquad (61)$$

где термодинамические силы, обозначенные штрихом и без него, связаны соотношениями $Y_0' = Y_0$, $Y_i' = Y_i + Y_0 v_i$, $Y_4' = Y_4 + Y_k m v_k + Y_0(mv^2/2)$, $v_k = p_k/m$, m — масса частицы. Сами же уравнения гидродинамики и выражения для потоков в локально равновесном состоянии не меняются по форме.

Рассмотрим приведенные выше уравнения в случае, когда система является релятивистски инвариантной. Выпишем плотности и плотности потоков аддитивных интегралов движения в состоянии термодинамического равновесия в терминах потенциала Гиббса $\omega' = \omega/Y_0$, представляющего собой релятивистский инвариант:

$$t^{\mu\nu} = -\frac{\partial(Y^\nu\omega')}{\partial Y_\mu} + p^\nu j^\nu + \underline{\omega}^\nu_\alpha\,\underline{j}^\nu_\alpha\,,\quad j^\nu = \frac{\partial\omega'}{\partial p_\mu}\,,$$

$$\underline{j}^\nu_\alpha = \frac{\partial\omega'}{\partial\underline{\omega}_{\alpha\mu}}\,,\quad \omega' = -\omega Y_0^{-1}\,. \qquad (62)$$

Здесь $t^{\mu\nu} \equiv (t^{00} = \varepsilon,\ t^{0k} = w_k,\ t^{k0} = \pi_k,\ t^{kl} = t_{kl})$ — 4-тензор энергии-импульса; $j^\nu \equiv (n, j_k)$ — 4-ток заряда; $\underline{j}^\nu_\alpha \equiv (\underline{s}_\alpha, \underline{j}_{\alpha k})$ — 4-ток изоспина; $p^\nu \equiv (p_0, p_k)$ — сверхтекучий 4-импульс; $\underline{\omega}^\nu_\alpha \equiv (\underline{\omega}_{0k}, \underline{\omega}_{\alpha k})$ — 4-форма Картана; $Y_\mu = (Y_0, Y_i)$. Гиббсовский потенциал ω' является функционалом семи инвариантов:

$$\omega' = \omega'\left(Y^2, p^2, \underline{\omega}^2, Yp, (Y\underline{\omega})^2, (p\underline{\omega})^2, (Y\underline{\omega})(p\underline{\omega})\right).$$

Отметим также, что, в силу (62), 4-токи j^μ, $\underline{j}^\mu_\alpha$ и тензор энергии-импульса $t^{\mu\nu}$ в состоянии равновесия в релятивистском случае связаны между собой соотношением

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} Y^{\rho} \left(Y_6 j^{\sigma} + Y_{\alpha} \underline{L}^{\sigma}_{\alpha} + Y_{\lambda} t^{\lambda\sigma} \right) = 0 , \quad (63)$$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор.

Уравнения идеальной гидродинамики в релятивистски инвариантной форме имеют вид

$$\nabla_{\nu} t^{\mu\nu} = 0 , \quad \nabla_{\nu} j^{\nu} = 0 , \quad \nabla_{\nu} \underline{L}^{\nu}_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\omega}_{\beta\mu} \underline{L}^{\mu}_{\gamma} , \quad (64)$$

$$\nabla^{\mu} p^{\nu} - \nabla^{\nu} p^{\mu} = 0 , \quad \nabla^{\mu} \underline{\omega}^{\nu}_{\alpha} - \nabla^{\nu} \underline{\omega}^{\mu}_{\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\omega}^{\nu}_{\beta} \underline{\omega}^{\mu}_{\gamma} .$$

Первые три уравнения включают в себя уравнения движения для плотностей аддитивных интегралов движения (заряда n, изоспина $\underline{s}_{\alpha}$, импульса π_k и энергии ε). Два остальных включают в себя уравнения движения для сверхтекучего импульса p_k и формы Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}$, а также условие потенциальности и тождество Маурера—Картана.

Вводя 4-ток энтропии $\sigma^{\mu} \equiv (\sigma, \sigma_k)$, получаем второй закон термодинамики в релятивистской форме:

$$d\sigma^{\mu} = Y_{\nu} \, dt^{\nu\mu} + Y_4 d j^{\mu} + \underline{Y}_{\alpha} \, d \underline{L}^{\mu}_{\alpha} -$$

$$- \left(Y^{\mu} j^{\nu} - Y^{\nu} j^{\mu} \right) dp_{\nu} - \left(Y^{\mu} \underline{L}^{\nu}_{\alpha} - Y^{\nu} \underline{L}^{\mu}_{\alpha} \right) d\underline{\omega}_{\alpha\nu} . \quad (65)$$

Следствием уравнений (64) и соотношения (65) является условие адиабатичности

$$\nabla_{\mu} \sigma^{\mu} = 0 , \quad \sigma^{\mu} = -Y^{\mu} Y_{\nu} \frac{\partial \omega'}{\partial Y_{\nu}} . \quad (66)$$

Если в полученных выражениях исключить магнитную составляющую, то мы придем к результатам работ [16, 24].

Линеаризуя уравнения (60) вблизи состояния равновесия: $\delta \underline{s}_{\alpha} = \underline{s}_{\alpha} - \underline{s}^{0}_{\alpha}$, $\delta \pi_i = \pi_i - \pi^{0}_i$, $\delta n = n - n^0$, $\delta p_i = p_i - p^{0}_i$, $\delta \underline{\omega}_{\alpha k} = \nabla_k \delta \varphi_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\omega}^{0}_{\beta k} \delta \varphi_{\gamma}$, $\underline{\omega}^{0}_{\alpha k} = n_{\alpha} q_k$ (индекс 0 означает равновесные значения), получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left(\hat{A} + \hat{B} \underline{\hat{B}}^{-1} \underline{\hat{A}} \right) = 0 , \quad (67)$$

где матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\underline{\hat{B}}$, $\underline{\hat{A}}$ представляют собой комбинации первых и вторых производных от функционала энергии ε по величинам ζ_a, $\underline{\omega}_{\alpha k}$, p_k. В общем случае уравнение (67) является выражением высокой степени по ω. Если теперь рассмотреть частный случай, когда функционал энергии зависит только от n^2, s^2_{α}, π^2, p^2, ω^2_k, $\mathrm{p}\vec{\pi}$ и все векторные величины в равновесии обращаются в нуль, то уравнение (67) существенно упростится и примет вид

$$\omega^2 \left(\omega^4 - Qk^2\omega^2 - Q'k^4 \right) \left(\omega^2 - Rk^2 \right)^3 = 0 , \quad (68)$$

где

$$Q = \sigma^0 \left(\underline{b} \underline{d} + \underline{g} \underline{b}'' \right) + \underline{a} \left(\underline{b} + n^0 \underline{b}' \right) + \underline{r} \left(\underline{b}' + n^0 \underline{b}'' \right) ,$$

$$Q' = \sigma^0 \left(\underline{r} \underline{d} - \underline{g} \underline{a} \right) \left(\underline{b}'' \underline{b} - \underline{b}' \underline{b}' \right) , \quad R = \underline{u} \underline{v} , \quad (69)$$

$$\underline{a} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} , \quad \underline{b} = 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial p^2} , \quad \underline{b}' = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathrm{p}\vec{\pi}} , \quad \underline{b}'' = 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi^2} ,$$

$$\underline{d} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n \partial \sigma} , \quad \underline{g} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} , \quad \underline{u} = 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}^2} , \quad \underline{v} = 2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\omega}^2} , \quad \underline{r} = \frac{\partial p}{\partial n} .$$

Решениями уравнения (69) будут известные выражения:

$$\omega^2 = c^2_{\pm} k^2 , \quad \omega^2 = c^2_s k^2 , \quad (70)$$

$$c^2_{\pm} = \frac{1}{2} \left(Q \pm \sqrt{Q^2 + 4Q'} \right) , \quad c^2_s = \underline{u} \underline{v} , \quad (71)$$

соответствующие первому и второму звуку и спиновым волнам.

Уравнения, полученные в этом разделе, могут быть применены в астрофизике и других областях физики, связанных со сверхтекучей релятивистской жидкостью.

Авторы выражают благодарность проф. С. В. Пелетминскому за плодотворное обсуждение темы публикации. Работа выполнена при содействии Международного научного фонда.

1. P. W. Anderson and P. Morel, *Physica* **26**, 671 (1960); *Phys. Rev.* **123**, 1911 (1961).
2. R. Balian and N. R. Werthamer, *Phys. Rev.* **131**, 1553 (1963).
3. R. Combescot, *J. Phys.* **C14**, 1619 (1981).
4. A. J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 331 (1975).
5. P. Wölfle, *Phys. Rev.* **B14**, 89 (1976).
6. В. П. Минеев, *УФН* **139**, 303 (1983).
7. Г. Е. Воловик, *Письма в ЖЭТФ* **39**, 304 (1984).
8. H. Kleinert, *Phys. Lett.* **A71**, 66 (1979).
9. D. V. Shopova, *Phys. Lett.* **A187**, 261 (1994).
10. G. E. Volovik, *Exotic Properties of Superfluid* ^{3}He, World Sci. Pub., Singapore, 150 p (1992); D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, Taylor & Francis (eds) London, (1990).
11. В. В. Красильников, С. В. Пелетминский, А. А. Рожков, А. А. Яценко, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, **19**, 1440 (1988).
12. А. А. Ивашин, В. В. Красильников, А. А. Рожков, *ФНТ* **21**, 58 (1995).
13. М. Ю. Ковалевский, А. А. Рожков, *ФНТ* **20**, 375 (1994).
14. W. F. Brinkman and M. C. Cross, *Progr. Low Temp. Phys.* **107** (1978).
15. W. Israel, *Phys. Lett.* **A86**, 79 (1981).
16. М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов, П. И. Фомин, *Препринт ИТФ-83-151Р* (1983).
17. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
18. А. Картан, *Геометрия групп Ли и симметрические пространства*. Изд-во иностр. лит., Москва (1949).
19. Н. Н. Боголюбов, *Препринт ОИЯИ, Д-781*, Дубна (1961).

20. Г. Е. Воловик, *УФН* **143**, 73 (1984).
21. М. Ю. Ковалевский, В. А. Красников, С. В. Пелетминский, *ДАН СССР* **303**, 337 (1988).
22. М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *ТМФ* **100**, 59 (1994).
23. Н. Н. Боголюбов, М. Ю. Ковалевский, А. М. Курбатов, С. В. Пелетминский А. Н. Тарасов, *УФН* **154**, 585 (1989).
24. В. В. Лебедев, И. М. Халатников, *ЖЭТФ* **83**, 1601 (1982).

Thermo- and hydrodynamics of the *B*-phase of the superfluid Fermi liquid

M. Yu. Kovalevski and A. A. Rozhkov

Hydro- and thermodynamics of the *B*-phase of superfluid Fermi liquid are derived in the framework of Fermi-liquid approach. The spectra of free oscillations are obtained and analysed. Cartan's form and the superfluid momentum are expressed through the order parameters. An expression relating fluxes of physical quantities in the local equilibrium state is obtained. Hydro- and thermodynamics of the *B*-phase of superfluid Fermi liquid are presented in the Galilean and relativistic forms.