УДК 517.928

# ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

**І. Г. Ключник**

*Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка*
*Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64*
*e-mail:Klyuchnyk.I@mail.ru*

**Г. В. Завізіон**

*Кіровоград. держ. пед. ун-т*
*Україна, 25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1*
*e-mail:ZavizionG@mail.ru*

*We prove the existence and infinite differentiability of solutions of singularly perturbed linear system of differential equations with deviating arguments having a turning point.*

*Доказаны существование и бесконечная дифференцируемость решения сингулярно возмущенной линейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом с точкой поворота.*

У роботі [1] наведено огляд літератури з асимптотичного інтегрування сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь з точкою звороту. Огляд методів розв'язування проблеми існування глобальних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу запропоновано у [2].

У цій статті уперше розглядається сингулярно збурена система диференціальних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу з точкою звороту. Для такої системи одержано умови, при яких розв'язками розглядуваної системи з відхиленням аргументу є розв'язки сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з точкою звороту і матрицею $C(x,\varepsilon)$. Побудовано на компакті $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ степеневий ряд, який є асимптотичним розвиненням матриці $C(x,\varepsilon)$ з голоморфними при $|x| \le x_0$ коефіцієнтами, причому матриця $C(x,0)$ подібна до матриці Ейрі $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. За допомогою отриманої системи диференціальних рівнянь для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу з точкою звороту одержано асимптотичний метод інтегрування і доведено існування та нескінченну диференційовність матричної функції, яка має асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$ формальний ряд, одержаний запропонованим асимптотичним методом.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу вигляду

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = (A_0(x) + \varepsilon A_1(x))y(x,\varepsilon) + (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))y(x(1-\varepsilon^2\Delta),\varepsilon), \tag{1}$$

де $y \in R^2$; $A_0(x)$, $A_1(x)$, $B_0(x)$, $B_1(x)$ — голоморфні $(2 \times 2)$-матриці за дійсною змінною $x$ при $|x| \le x_0$; $\varepsilon$ — малий дійсний параметр; $\Delta$ — дійсна додатна стала.

Припустимо, що виконано такі умови:

1) визначник матриці $\det C_0(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, де $C_0(x)$ визначається рівністю

$$C_0(x) = A_0(x) + B_0(x); \tag{2}$$

2) $\det C_0(0) = 0$ і $C_0(0)$ подібна до жорданової форми $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\dfrac{d}{dx} \left(\det C_0(x)\right)|_{x=0} \neq 0.$

**Теорема 1.** *Нехай матриці $A_i(x)$, $B_i(x)$, $i = 0, 1$, голоморфні в області $|x| \le x_0$, $x \in R$, виконуються умови 1–3 і можна вказати $\varepsilon_0$ таке, що справджуються нерівності*

$$\|A_i(x)\|_0 \le \alpha_i, \quad \|B_i(x)\|_0 \le \beta_i, \quad i = 0, 1, \tag{3}$$

$$\varepsilon_0(\beta_0 + \varepsilon_0\beta_1)\Delta x_0 e^{\varepsilon_0(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1)\Delta x_0+1} < 1. \tag{4}$$

*Тоді при $|x| \le x_0$, $x \in R$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ кожен розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь*

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = C(x,\varepsilon)y(x,\varepsilon) \tag{5}$$

*є розв'язком системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу (1). Крім того, знайдеться матриця $C(x,\varepsilon)$ така, що*

$$C(x,\varepsilon) = C_0(x) + \varepsilon C_1(x) + \ldots + \varepsilon^k C_k(x) + \varepsilon^{k+1} C_{k+1}(x,\varepsilon). \tag{6}$$

*Матриці $C_i(x)$, $C_{k+1}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{0,k}$, голоморфні при $|x| \le x_0$ і $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ має неперервну похідну за змінною $\varepsilon$ при $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$.*

*Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n(x)$ є рівномірним при $|x| \le x_0$ асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to \to 0$ і $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ матриці $C(x,\varepsilon)$ і має місце нерівність*

$$\left\| C(x,\varepsilon) - \sum_{n=0}^{k} C_n(x)\varepsilon^n \right\| \le M|\varepsilon|^{k+1}, \quad |x| \le x_0, \quad |\varepsilon| \le \varepsilon_0, \tag{7}$$

*де $M = \sup \|C_{k+1}(x,\varepsilon)\|$ при $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$.*

***Доведення.*** Нехай при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \neq 0$ матриця $\Omega_0^x\left(\dfrac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$, яка визначається рівністю

$$\Omega_0^x\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = I + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x C(s,\varepsilon)ds + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x C(s,\varepsilon)\int_0^s C(s_1,\varepsilon)ds_1 ds + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x C(s,\varepsilon)\int_0^s C(s_1,\varepsilon)\ldots\int_0^{s_{n-2}} C(s_{n-1},\varepsilon)ds_{n-1}\ldots ds_1 ds + \ldots, \tag{8}$$

при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ є матрицантом системи диференціальних рівнянь (5), де матриця $C(x,\varepsilon)$ визначена при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$, $I$ — одинична матриця.

Зауважимо, що ряд (8) збігається рівномірно по $x$ і $\varepsilon$ при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$.

Загальний розв'язок рівняння (5) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ визначається за формулою

$$y(x,\varepsilon) = \Omega_0^x \left( \frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right) y_0, \tag{9}$$

де $y_0$ не залежить від змінної $x$.

Функція (9) буде задовольняти рівняння (1) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$, якщо

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = C(x,\varepsilon)\,\Omega_0^x \left( \frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right) y_0 = (A_0(x) + \varepsilon A_1(x))\Omega_0^x \left( \frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right) y_0 +$$

$$+ (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))\Omega_0^{x-\varepsilon^2 \Delta x} \left( \frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right) y_0. \tag{10}$$

З (10) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ отримаємо рівність

$$C(x,\varepsilon)\,\Omega_0^x \left( \frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right) = (A_0(x) + \varepsilon A_1(x))\,\Omega_0^x \left( \frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right) +$$

$$+ (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))\,\Omega_0^{x-\varepsilon^2 \Delta x} \left( \frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right). \tag{11}$$

З властивості матриці $\Omega_0^x \left( \frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right)$ випливає, що рівність (11) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ виконується лише тоді, коли

$$C(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) + (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))\Omega_x^{x-\varepsilon^2 \Delta x} \left( \frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right). \tag{12}$$

Таким чином, якщо всі розв'язки системи рівнянь (5) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ є розв'язками рівняння (1), то на вказаній множині матриця $C(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння (12).

Очевидно і зворотне. Якщо матриця $C(x,\varepsilon)$ неперервна при $|x| \le x_0$, $\varepsilon \ne 0$ і задовольняє (12), то вектор-функція (9) є розв'язком системи рівнянь (1) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$.

За допомогою заміни змінних у рівнянні (12) за формулою

$$C(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) + (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))Z(x,\varepsilon) \tag{13}$$

одержимо рівняння

$$(B_0(x) + \varepsilon B_1(x))\left( Z(x,\varepsilon) - \Omega_x^{x-\varepsilon^2 \Delta x} \left( \frac{A_0(x) + \varepsilon A_1(x) + (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))Z(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right) = 0. \tag{14}$$

Згідно з рівнянням (14) виберемо $Z(x,\varepsilon)$ таким чином:

$$Z(x,\varepsilon) = \Omega_x^{x-\varepsilon^2 \Delta x} \left( \frac{A_0 + \varepsilon A_1(x) + (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))Z(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \right). \tag{15}$$

Визначимо оператор

$$SZ(x,\varepsilon) = \Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))Z(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \tag{16}$$

у просторі $C(m,J_0)$ матриць $Z(x,\varepsilon)$, заданих і неперервних за двома змінними $x$ і $\varepsilon$ на множині

$$J_0 = \{(x,\varepsilon)||x| \le x_0, \delta \le |\varepsilon| \le \varepsilon_0\}$$

і таких, що

$$\|Z\|_0 = \sup_{(x,\varepsilon)\in J_0} ||Z(x,\varepsilon)|| \le m,$$

де $\delta$ — додатне число таке, що $\delta < \varepsilon_0$.

Матриця $SZ(x,\varepsilon)$ неперервна на множині $J_0$. Згідно з нерівностями (3), (4) правильною є оцінка

$$\|SZ\|_0 \le \sup_{(x,\varepsilon)\in J_0}\left|\Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{\|A_0(x)+\varepsilon A_1(x)\|+\|B_0(x)+\varepsilon B_1(x)\|m}{|\varepsilon|}\right)\right| \le$$
$$\le e^{\varepsilon_0(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0},$$

тобто якщо виконується нерівність

$$e^{\varepsilon_0(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0} \le m, \tag{17}$$

то оператор $S$ переводить простір $C(m,J_0)$ в себе.

Оцінимо $SZ_1(x,\varepsilon) - SZ_2(x,\varepsilon)$ для матриць $Z_i(x,\varepsilon) \in C(m,J_0)$, $i = 1,2$. Позначимо

$$P_i(x,\varepsilon) = \frac{A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))Z_i(x,\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad i = 1,2,$$

і розглянемо різницю

$$\Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}(P_1(x,\varepsilon)) - \Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}(P_2(x,\varepsilon)).$$

Маємо

$$\left\|\int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x} P_1(s,\varepsilon)ds - \int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x} P_2(s,\varepsilon)ds\right\| \le \left\|\int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}(P_1(s,\varepsilon)-P_2(s,\varepsilon))ds\right\| \le$$
$$\le (\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\varepsilon_0\Delta x_0||Z_1-Z_2||_0,$$

$$\left\| \int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x} P_1(s,\varepsilon)\int\limits_x^s P_1(s_1,\varepsilon)ds_1ds - \int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x} P_2(s,\varepsilon)\int\limits_x^s P_2(s_1,\varepsilon)ds_1ds \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\beta_0+\varepsilon_0\beta_1}{|\varepsilon|}\left(\left|\int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}\int\limits_x^s ||P_1(s_1,\varepsilon)||ds_1ds + \int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}||P_2(s,\varepsilon)||\int\limits_x^s ds_1ds\right|\right)||Z_1-Z_2||_0 \leq$$

$$\leq (\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\varepsilon_0^2\Delta^2x_0^2||Z_1-Z_2||_0,$$

$$\left\| \int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x} P_1(s,\varepsilon)\int\limits_x^s P_1(s_1,\varepsilon)\ldots\int\limits_x^{s_{n-2}} P_1(s_{n-1},\varepsilon)ds_{n-1}\ldots ds_1ds -\right.$$

$$\left. - \int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x} P_2(s,\varepsilon)\int\limits_x^s P_2(s_1,\varepsilon)\ldots\int\limits_x^{s_{n-2}} P_2(s_{n-1},\varepsilon)ds_{n-1}\ldots ds_1ds\right\| \leq$$

$$\leq \frac{(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)n(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)^{n-1}}{|\varepsilon|^n}\times$$

$$\times\left|\int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}\int\limits_x^s\ldots\int\limits_x^{s_{n-2}} ds_{n-1}\ldots ds_1ds\right| ||Z_1-Z_2||_0 \leq$$

$$\leq \frac{(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\Delta^n|\varepsilon|^n|x|^n(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)^{n-1}}{(n-1)!}\|Z_1-Z_2\|_0 \leq$$

$$\leq (\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\Delta x_0\varepsilon_0\frac{(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)^{n-1}\Delta^{n-1}x_0^{n-1}\varepsilon_0^{n-1}}{(n-1)!}\|Z_1-Z_2\|_0.$$

Тому при $(x,\varepsilon)\in J_0$ одержуємо

$$\|SZ_1(x,\varepsilon)-SZ_2(x,\varepsilon)\| = \|\Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}(P_1(x,\varepsilon))-\Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}(P_2(x,\varepsilon))\| \leq$$

$$\leq (\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\Delta x_0\varepsilon_0 e^{(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0\varepsilon_0}\|Z_1-Z_2\|_0.$$

При виконанні нерівності

$$(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\Delta x_0\varepsilon_0 e^{(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0\varepsilon_0} < 1 \tag{18}$$

оператор $S$ є оператором стиску в просторі $C(m,J_0)$.

Якщо виконуються нерівності (3), (4), то для $m$, що задовольняють оцінку

$$m < \frac{1}{\Delta x_0(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\varepsilon_0},$$

виконується нерівність (18). Рівняння

$$e^{\varepsilon_0(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0} = m$$

має два розв'язки $m_1$ і $m_2$ такі, що

$$\Delta x_0(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\varepsilon_0 m_1 < 1 < \Delta x_0(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\,\varepsilon_0 m_2.$$

Звідси випливає, що для

$$m_1 \le m < \frac{1}{\Delta x_0(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\varepsilon_0} \tag{19}$$

будуть виконуватись одночасно нерівності (17), (18).

Отже, при виконанні нерівностей (3), (4) для значень $m$, що задовольняють оцінки (19), оператор $S$, заданий рівністю (16), відображає $C(m, J_0)$ в себе і є оператором стиску. Таким чином, у просторі $C(m, J_0)$ оператор $S$ має єдину нерухому точку, яка і є єдиним розв'язком рівняння (15). Отже, рівняння (12) має єдиний неперервний розв'язок на множині $J_0$. Внаслідок довільності числа $\delta$ рівняння (12) має єдиний неперервний розв'язок для $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$.

Згідно з нерівностями (3) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ маємо оцінку норми

$$\|Z(x,\varepsilon)\| \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^n \Delta^n x_0^n(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)^n}{n!}. \tag{20}$$

Переходячи в (20) до границі при $\varepsilon \to 0$, а також враховуючи вигляд матриці $Z(x,\varepsilon)$ і оцінки на множині $J_0$ для норми $\|Z(x,\varepsilon)\|$, які задані відповідно формулами (15), (20), отримуємо $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} Z(x,\varepsilon) = I$, $|x| \le x_0$. Довизначимо матрицю $Z(x,\varepsilon)$ при $|x| \le x_0$ в точці $\varepsilon = 0$ до неперервної за змінними $x$ і $\varepsilon$ на множині

$$J = \{(x,\varepsilon) | |x| \le x_0, |\varepsilon| \le \varepsilon_0\}, \tag{21}$$

поклавши $Z(x,0) = I$. Тоді, перейшовши до границі в (13) при $\varepsilon \to 0$, знайдемо $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} C(x,\varepsilon) = C_0(x)$, $|x| \le x_0$. Тепер довизначимо $C(x,\varepsilon)$ при $|x| \le x_0$ в точці $\varepsilon = 0$ до неперервної за змінними $x$ і $\varepsilon$ на множині $J$, поклавши $C(x,0) = C_0(x)$.

Використавши (8) і записавши при $\varepsilon \ne 0$ явний вигляд матриканта

$$\Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))Z(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right), \tag{22}$$

зведемо його до іншого вигляду. Для цього у першому інтегралі, який входить у матрикант (22), виконаємо заміну змінних за формулою $\tau = \dfrac{x-s}{\varepsilon^2\Delta}$. Тоді одержимо

$$T_0 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x} (A_0(s)+\varepsilon A_1(s)+(B_0(s)+\varepsilon B_1(s))Z(s,\varepsilon))\,ds = -\varepsilon\Delta\int\limits_0^x (A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+$$

$$+\,\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))\,d\tau. \tag{23}$$

Припустимо, що для $n$-кратного інтеграла виконується рівність

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}(A_0(s)+\varepsilon A_1(s)+(B_0(s)+\varepsilon B_1(s))Z(s,\varepsilon))\int\limits_x^{s}(A_0(s_1)+\varepsilon A_1(s_1)+(B_0(s_1)+$$

$$+\varepsilon B_1(s_1))Z(s_1,\varepsilon))\ldots\int\limits_x^{s_{n-2}}(A_0(s_{n-1})+\varepsilon A_1(s_{n-1})+$$

$$+(B_0(s_{n-1})+\varepsilon B_1(s_{n-1}))Z(s_{n-1},\varepsilon))ds_{n-1}ds_{n-2}\ldots ds_1 ds=$$

$$=(-1)^n\varepsilon^n\Delta^n\int\limits_0^x(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+$$

$$+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))\int\limits_0^{\tau}(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)+$$

$$+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1,\varepsilon))\int\limits_0^{\tau_{n-2}}(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+$$

$$+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1}))\times$$

$$\times Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1},\varepsilon)d\tau_{n-1}\ldots d\tau_1 d\tau, \tag{24}$$

де змінні $\tau_i$, $i=\overline{1,n-1}$, задаються формулою

$$\tau_i=\frac{x-s_i}{\varepsilon^2\Delta}. \tag{25}$$

Тоді $(n+1)$-кратний інтеграл вигляду (24) набере вигляду

$$T_{n+1}=\frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\int\limits_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}(A_0(s)+\varepsilon A_1(s)+(B_0(s)+\varepsilon B_1(s))Z(s,\varepsilon))\times$$

$$\times\int\limits_x^{s}(A_0(s_1)+\varepsilon A_1(s_1)+(B_0(s_1)+\varepsilon B_1(s_1))Z(s_1,\varepsilon))\ldots\int\limits_x^{s_{n-1}}(A_0(s_n)+\varepsilon A_1(s_n)+$$

$$+(B_0(s_n)+\varepsilon B_1(s_n))Z(s_n,\varepsilon))ds_n\ldots ds_1 ds=$$

$$=\varepsilon^n(-1)^n\Delta^n\int\limits_0^x(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+$$

$$+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))\ldots\int\limits_0^{\tau_{n-2}}(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+$$

$$+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1},\varepsilon))\times$$

$$\times\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_x^{s_{n-1}}(A_0(s_n)+\varepsilon A_1(s_n)+(B_0(s_n)+\varepsilon B_1(s_n))Z(s_n,\varepsilon))ds_n d\tau_{n-1}\ldots d\tau_1 d\tau. \qquad (26)$$

Виконавши в (26) заміну за формулою $\tau_n = \dfrac{x-s_n}{\varepsilon^2\Delta}$ і використавши (24), (25), $(n+1)$-кратний інтеграл $T_{n+1}$ запишемо у вигляді

$$T_{n+1} = (-1)^{n+1}\varepsilon^{n+1}\Delta^{n+1}\int\limits_0^x(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+$$

$$+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))\ldots\int\limits_0^{\tau_{n-1}}(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n)+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n)+$$

$$+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n)+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n,\varepsilon))d\tau_n d\tau_{n-1}\ldots d\tau. \qquad (27)$$

Із співвідношень (23), (24), (27) за методом математичної індукції випливає справедливість (24) для $n\in N$.

Із (24), врахувавши вигляд матрицантів (22) і (8), отримаємо, що на множині $|x|\le x_0$ і $\varepsilon\ne 0$ виконується рівність

$$\Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))Z(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)=\Omega_0^x(-\Delta\varepsilon(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+$$

$$+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))). \qquad (28)$$

Неперервність матриць $A_i(x)$, $B_i(x)$, $Z(x,\varepsilon)$, $i=0,1$, на множині $J$ і рівність (28) дають можливість матрицант правої частини (28) довизначити в точці $\varepsilon=0$, $|x|\le x_0$, поклавши його рівним одиничній матриці. Тоді, врахувавши довизначеність $Z(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ і рівність (15), одержимо, що на множині $J$ виконується рівність

$$Z(x,\varepsilon)=\Omega_0^x(-\Delta\varepsilon(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+$$

$$+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))). \qquad (29)$$

Позначимо через $F(x,\varepsilon,Z)$ матрицю вигляду

$$F(x,\varepsilon,Z)=Z(x,\varepsilon)-\Omega_0^x(-\Delta\varepsilon(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+$$

$$+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))), \qquad (30)$$

яка визначена на множині $J$.

Згідно з (29), (30) неперервна на множині $J$ матриця $Z(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$F(x,\varepsilon,Z)=0. \tag{31}$$

Із (30) знайдемо частинну похідну $F(x,\varepsilon,Z)$ за змінною $Z$ вигляду

$$\begin{aligned} F_Z^{'}(x,\varepsilon,Z) = {} & I+\Delta\varepsilon\int\limits_0^x (B_0(x-\varepsilon^2\tau\Delta)+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\tau\Delta))d\tau- \\ & -\Delta^2\varepsilon^2\Bigg(\int\limits_0^x (B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))\int\limits_0^\tau (A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)+ \\ & +\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)+\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1,\varepsilon))d\tau d\tau_1+ \\ & +\int\limits_0^x (A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+(B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+ \\ & +\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))\int\limits_0^\tau (B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)+ \\ & +\varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))d\tau d\tau_1\Bigg)+O((\Delta\varepsilon)^3), \end{aligned} \tag{32}$$

де $O((\Delta\varepsilon)^3)$ — величина порядку малості $(\Delta\varepsilon)^3$.

Оцінивши норми елементів членів ряду (32), отримаємо існування мажоранти для ряду (32) вигляду

$$1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Delta^{i+1}x_0^{i+1}\varepsilon_0^{i+1}(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)^i}{i!}, \tag{33}$$

що доводить рівномірну збіжність ряду (32) на множині $J$. Використавши явний вигляд матриці $F(x,\varepsilon,Z)$, що задана рівністю (30), знайдемо частинну похідну $F'_\varepsilon(x,\varepsilon,Z)$ за змінною $\varepsilon$, а потім отримаємо мажоранту для ряду $F'_\varepsilon(x,\varepsilon,Z)$, яка має вигляд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\Delta^i x_0^i\varepsilon_0^{i-1}(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)^{i-1}}{(i-1)!}\,(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m+\varepsilon_0(\widetilde{A}_1+\widetilde{B}_1 m)),$$

де

$$\widetilde{A}_1=\sup_{\tau\in[0,x],(x,\varepsilon)\in J}\left\|-2\varepsilon\tau\Delta\left.\frac{dA_0(t)}{dt}\right|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau}+A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)-2\varepsilon^2\Delta\tau\left.\frac{dA_1(t)}{dt}\right|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau}\right\|,$$

$$\widetilde{B}_1=\sup_{\tau\in[0,x],(x,\varepsilon)\in J}\left\|-2\varepsilon\tau\Delta\left.\frac{dB_0(t)}{dt}\right|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau}+B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)-2\varepsilon^2\Delta\tau\left.\frac{dB_1(t)}{dt}\right|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau}\right\|.$$

З (32) і малості $\varepsilon$ випливає, що при $(x,\varepsilon) \in J$ визначник $\det F'_Z(x,\varepsilon,Z) \neq 0$. Тоді із збіжності рядів $F'_Z(x,\varepsilon,Z)$, $F'_\varepsilon(x,\varepsilon,Z)$ і (31) випливає існування неперервної похідної $Z'_\varepsilon(x,\varepsilon)$ за змінною $\varepsilon$ матриці $Z(x,\varepsilon)$ на множині $J$. Отже, з рівності (13) випливає існування неперервної похідної $C'_\varepsilon(x,\varepsilon)$ за змінною $\varepsilon$ матриці $C(x,\varepsilon)$.

Розглянемо при $|x| \leq x_0$ і $\varepsilon \neq 0$ різницю

$$C_1(x,\varepsilon) = \frac{C(x,\varepsilon) - C_0(x)}{\varepsilon}. \tag{34}$$

Врахувавши, що $C(x,\varepsilon)$ диференційовна за змінною $\varepsilon$ на множині $J$ і $C(x,0) = C_0(x)$, перетворимо різницю матриць

$$C(x,\varepsilon) - C_0(x) = \varepsilon \int_0^1 C'_\varepsilon(x,\theta\varepsilon)\, d\theta, \quad (x,\varepsilon) \in J. \tag{35}$$

Підставивши (35) в (34), при $|x| \leq x_0$ і $\varepsilon \neq 0$ отримаємо матрицю

$$C_1(x,\varepsilon) = \int_0^1 C'_\varepsilon(x,\theta\varepsilon)\, d\theta. \tag{36}$$

Довизначимо $C_1(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$. Для цього, використавши неперервність за змінною $\varepsilon$ похідної $C'_\varepsilon$ при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ і врахувавши граничний перехід від інтеграла, залежного від параметра, із рівності (36) отримаємо

$$C_1(x,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 C'_\varepsilon(x,\theta\varepsilon) d\theta = \int_0^1 \lim_{\varepsilon\to 0} C'_\varepsilon(x,\theta\varepsilon) d\theta = \int_0^1 C'_\varepsilon(x,0) d\theta = C'_\varepsilon(x,0). \tag{37}$$

З рівностей (36), (37) випливає, що для $(x,\varepsilon) \in J$ матриця $C_1(x,\varepsilon)$ має вигляд (36). З (34) – (37) випливає можливість зображення при $(x,\varepsilon) \in J$ матриці $C(x,\varepsilon)$ у вигляді

$$C(x,\varepsilon) = C_0(x) + \varepsilon C_1(x,\varepsilon), \tag{38}$$

де матриця $C_1(x,\varepsilon)$ задається рівністю (36).

При встановленні вигляду (11) для матриці $C(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ розв'язок диференціального рівняння (5) брався при $\varepsilon \neq 0$, тобто саме рівняння (5) розглядається при $|x| \leq x_0$ і $\varepsilon \neq 0$. Оскільки матриця $C(x,\varepsilon)$ довизначена при $\varepsilon = 0$ і праві частини диференціально-функціонального рівняння (1) і диференціального рівняння (5) збігаються при $\varepsilon = 0$, то можна вважати, що всі розв'язки диференціального рівняння (5) при $(x,\varepsilon) \in J$ є розв'язками диференціально-функціонального рівняння (1) при $(x,\varepsilon) \in J$.

Дослідимо питання про голоморфність за змінною $x$ матриці $C(x,\varepsilon)$, що задана рівностями (13), (15). З голоморфності $A_i(x)$, $B_i(x)$, $i = 0,1$, випливає нескінченна диференційовність цих матриць. Тоді згідно з [2] матриця $Z(x,\varepsilon)$, яка задана неявно рівністю (15), є нескінченно диференційовною за змінною $x$. Згідно з [1] матрицю $Z(x,\varepsilon)$ можна розвинути у формальний степеневий ряд за змінною $x$. Відомо, що з неперервності за змінною

$x$ матриці $A_0(x) + \varepsilon A_1(x) + (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))Z(x, \varepsilon)$ випливає, що матрицант цієї матриці розвивається у збіжний функціональний ряд. Тоді, використавши (15), одержимо, що формальний степеневий ряд за змінною $x$ матриці $Z(x, \varepsilon)$ є збіжним. А тому згідно з (13) матриці $Z(x, \varepsilon), C(x, \varepsilon)$ є голоморфними за змінною $x$ при $(x, \varepsilon) \in J$.

Аналогічно до рівності (38) можна показати існування неперервної за змінною $\varepsilon$ матриці $Z_1(x, \varepsilon)$ на множині $J$ вигляду $Z_1(x, \varepsilon) = \int_0^1 Z'_\varepsilon(x, \theta\varepsilon)d\theta$ такої, що справджується рівність

$$Z(x, \varepsilon) = I + \varepsilon Z_1(x, \varepsilon). \tag{39}$$

Врахувавши (39), введемо позначення

$$M(\tau, \varepsilon, Z_1) = A_0(x - \varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon A_1(x - \varepsilon^2\Delta\tau) + \\ + (B_0(x - \varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon B_1(x - \varepsilon^2\Delta\tau))(I + \varepsilon Z_1(x - \varepsilon^2\Delta\tau, \varepsilon)). \tag{40}$$

Підставивши (8) в (29) і врахувавши (40), отримаємо рівняння відносно $Z_1(x, \varepsilon)$ у вигляді

$$Z_1(x, \varepsilon) = -\Delta \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_1)\Omega_0^\tau(-\Delta\varepsilon M(\tau, \varepsilon, Z_1))d\tau. \tag{41}$$

Тоді матриця $F_1(x, \varepsilon, Z_1)$ вигляду

$$F_1(x, \varepsilon, Z_1) = Z_1(x, \varepsilon) + \Delta \int_0^x M(\tau, \varepsilon, Z_1)\Omega_0^\tau(-\Delta\varepsilon M(\tau, \varepsilon, Z_1))d\tau \tag{42}$$

визначена на множині $J$. Згідно з (41), (42) неперервна на множині $J$ матриця $Z_1(x, \varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$F_1(x, \varepsilon, Z_1) = 0.$$

Підставляючи вигляд матрицанта з (8) у (42), одержуємо розвинення матриці $F_1(x, \varepsilon, Z_1)$ у рівномірно збіжний функціональний ряд. При цьому ряди, які складаються з частинної похідної за змінними $Z_1$ і $\varepsilon$ елементів одержаного ряду, мажоруються відповідно рядами (33) і

$$\Delta x_0(\widetilde{A}_1 + \widetilde{B}_1 m + (\beta_0 + \varepsilon_0\beta_1)m_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\Delta^i x_0^i \varepsilon_0^{i-2}(\alpha_0 + \varepsilon_0\alpha_1 + (\beta_0 + \varepsilon_0\beta_1)m)^{i-1}}{i!} \times \\ \times((\alpha_0 + \varepsilon_0\alpha_1 + (\beta_0 + \varepsilon_0\beta_1)m)(i-1) + i\varepsilon_0(\widetilde{A}_1 + \widetilde{B}_1 m + (\beta_0 + \varepsilon_0\beta_1)m_1)),$$

де

$$m_1 = \sup_{(x,\varepsilon)\in J} \|Z_1(x, \varepsilon)\|.$$

З розвинення матриці $(F_1(x,\varepsilon,Z_1))'_{Z_1}$ у рівномірно збіжний функціональний ряд випливає, що $(F_1(x,\varepsilon,Z_1))'_{Z_1}$ можна зобразити у вигляді

$$(F_1(x,\varepsilon,Z_1))'_{Z_1} = I + O(\varepsilon). \tag{43}$$

Внаслідок малості $\varepsilon$ із (43) отримаємо, що визначник $\det(F_1(x,\varepsilon,Z_1))'_{Z_1} \neq 0$ і існує неперервна на множині $J$ частинна похідна $(Z_1'(x,\varepsilon))_\varepsilon$. Отже, на множині $J$ матрицю $Z_1(x,\varepsilon)$ можна записати у вигляді

$$Z_1(x,\varepsilon) = Z_1(x,0) + \varepsilon Z_2(x,\varepsilon), \tag{44}$$

де

$$Z_2(x,\varepsilon) = \int\limits_0^1 (Z_1(x,\theta\varepsilon))'_\varepsilon d\theta, \quad Z_1(x,0) = -\Delta x(A_0(x)+B_0(x)).$$

Припустимо, що матрицю $Z_{k-1}(x,\varepsilon)$, яка визначається з рівняння

$$\begin{aligned} Z_{k-1}(x,\varepsilon) &= (-1)^{k-1}\Delta^{k-1}\times \\ &\times \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_{k-1}) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\varepsilon,Z_{k-1})\Omega_0^{\tau_{k-2}}(-\Delta\varepsilon M(\tau_{k-2},\varepsilon,Z_{k-1}))d\tau_{k-2}\ldots d\tau_1 d\tau + \\ &+ (-1)^{k-2}\Delta^{k-2}\int\limits_0^1\int\limits_0^x (M(\tau,\theta\varepsilon,Z_{k-1})\int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-4}} M(\tau_{k-3},\theta\varepsilon,Z_{k-1})d\tau_{k-3}\ldots d\tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta|_{\varepsilon=0}, \end{aligned} \tag{45}$$

можна подати у вигляді

$$Z_{k-1}(x,\varepsilon) = Z_{k-1}(x,0) + \varepsilon Z_k(x,\varepsilon), \tag{46}$$

де

$$Z_k(x,\varepsilon) = \int\limits_0^1 (Z_{k-1}(x,\theta\varepsilon))'_\varepsilon d\theta,$$

$$\begin{aligned} M(\tau,\varepsilon,Z_k) = {} & A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \\ & + (B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))(I + \varepsilon Z_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau,0) + \ldots \\ & \ldots + \varepsilon^{k-1}Z_{k-1}(x-\varepsilon^2\Delta\tau,0) + \varepsilon^k Z_k(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon)), \quad k = 2,3,\ldots. \end{aligned}$$

Підставивши (46) в (45), одержимо рівняння відносно матриці $Z_k(x,\varepsilon)$ вигляду

$$\varepsilon Z_k(x,\varepsilon) = -Z_{k-1}(x,0) + (-1)^k \Delta^k \varepsilon \times$$
$$\times \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-2}} M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k)\Omega_0^{\tau_{k-1}}(-\Delta\varepsilon M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k))d\tau_{k-1}\ldots d\tau_1 d\tau +$$
$$+ (-1)^{k-2}\Delta^{k-2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^x (M(\tau,\theta\varepsilon,Z_{k-1}) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-4}} M(\tau_{k-3},\theta\varepsilon,Z_{k-1})d\tau_{k-3}\ldots d\tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta|_{\varepsilon=0} +$$
$$+ (-1)^{k-1}\Delta^{k-1} \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\varepsilon,Z_k)d\tau_{k-2}\ldots d\tau_1 d\tau. \qquad (47)$$

Використавши (45), знайдемо $Z_{k-1}(x,0)$ і спростимо вираз

$$(-1)^{k-1}\Delta^{k-1} \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\varepsilon,Z_k)d\tau_{k-2}\ldots d\tau_1 d\tau - Z_{k-1}(x,0) +$$
$$+ (-1)^{k-2}\Delta^{k-2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^x (M(\tau,\theta\varepsilon,Z_{k-1}) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-4}} M(\tau_{k-3},\theta\varepsilon,Z_{k-1})d\tau_{k-3}\ldots d\tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta|_{\varepsilon=0} =$$
$$= (-1)^{k-1}\Delta^{k-1}\varepsilon \int\limits_0^1 \int\limits_0^x (M(\tau,\theta\varepsilon,Z_k) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\theta\varepsilon,Z_k)d\tau_{k-2}\ldots d\tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta|_{\varepsilon=0}. \qquad (48)$$

Підставивши (48) в (47), отримаємо рівняння відносно матриці $Z_k(x,\varepsilon)$ вигляду

$$Z_k(x,\varepsilon) = (-1)^k \Delta^k \times$$
$$\times \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-2}} M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k)\Omega_0^{\tau_{k-1}}(-\Delta\varepsilon M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k))d\tau_{k-1}\ldots d\tau_1 d\tau +$$
$$+ (-1)^{k-1}\Delta^{k-1} \int\limits_0^1 \int\limits_0^x (M(\tau,\theta\varepsilon,Z_k) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\theta\varepsilon,Z_k)d\tau_{k-2}\ldots d\tau_1)'_\varepsilon d\tau d\theta|_{\varepsilon=0}. \qquad (49)$$

Позначимо через $F_k(x,\varepsilon,Z_k)$ матрицю вигляду

$$F_k(x,\varepsilon,Z_k) = Z_k(x,\varepsilon) - (-1)^k \Delta^k \times$$
$$\times \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-2}} M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k)\Omega_0^{\tau_{k-1}}(-\Delta\varepsilon M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k))d\tau_{k-1}\ldots d\tau_1 d\tau -$$

$$- (-1)^{k-1}\Delta^{k-1} \int\limits_0^1 \int\limits_0^x (M(\tau, \theta\varepsilon, Z_k) \int\limits_0^{\tau} \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2}, \theta\varepsilon, Z_k) d\tau_{k-2} \ldots d\tau_1)'_{\varepsilon} d\tau d\theta|_{\varepsilon=0}. \quad (50)$$

Підставивши вигляд матриціанта із (8) у (50), одержимо розвинення матриці $F_k(x, \varepsilon, Z_k)$ у рівномірно збіжний функціональний ряд. При цьому ряди, які складаються з частинної похідної за змінними $Z_k$ і $\varepsilon$ елементів одержаного ряду, мажоруються відповідно рядами

$$1 + \Delta x_0 \varepsilon_0 (\beta_0 + \varepsilon_0 \beta_1) \sum_{i=k-1}^{\infty} \frac{\Delta^i \varepsilon_0^i x_0^i (\alpha_0 + \varepsilon_0 \alpha_1 + (\beta_0 + \varepsilon_0 \beta_1) m)^i}{i!}$$

і

$$\frac{\Delta^k x_0^k}{(k-1)!} (\widetilde{A}_2 + \widetilde{B}_2 m + (\beta_0 + \varepsilon_0 \beta_1) m_k)(\alpha_0 + \varepsilon_0 \alpha_1 + (\beta_0 + \varepsilon_0 \beta_1) m)^{k-1} +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\Delta^i x_0^i \varepsilon_0^{i-k-1}}{i!} (\alpha_0 + \varepsilon_0 \alpha_1 + (\beta_0 + \varepsilon_0 \beta_1) m)^{i-1} ((\alpha_0 + \varepsilon_0 \alpha_1 +$$

$$+ (\beta_0 + \varepsilon_0 \beta_1) m)(i-k) + \varepsilon_0 i (\widetilde{A}_2 + \widetilde{B}_2 m + (\beta_0 + \varepsilon_0 \beta_1) m_k)),$$

де

$$m_k = \sup_{(x,\varepsilon) \in J} \left\| \sum_{i=1}^{k-1} i \varepsilon^{i-1} Z_i(x, 0) + k \varepsilon^{k-1} Z_k(x, \varepsilon) \right\|.$$

З розвинення матриці $(F_k(x, \varepsilon, Z_k))'_{Z_k}$ у рівномірно збіжний функціональний ряд, а також внаслідок малості $\varepsilon$ отримаємо, що визначник $\det(F_k(x, \varepsilon, Z_k))'_{Z_k} \neq 0$ та існує неперервна на множині $J$ частинна похідна $(Z_k(x, \varepsilon))'_{\varepsilon}$. Отже, матрицю $Z_k(x, \varepsilon)$ можна зобразити у вигляді

$$Z_k(x, \varepsilon) = Z_k(x, 0) + \varepsilon Z_{k+1}(x, \varepsilon), \quad (51)$$

де $Z_{k+1}(x, \varepsilon)$ визначається формулою

$$Z_{k+1}(x, \varepsilon) = \int\limits_0^1 (Z_k(x, \theta\varepsilon))'_{\varepsilon} d\theta.$$

Згідно з математичною індукцією випливає справедливість (51) для довільного $k \in N$, до того ж матриці $Z_i(x, \varepsilon)$, $i = \overline{1, k+1}$, є голоморфними при $|x| \leq x_0$ і мають неперервну похідну за змінною $\varepsilon$ на множині $J$. Із (51), (46), (44) одержимо, що на множині $J$ матрицю $Z(x, \varepsilon)$ можна записати у вигляді

$$Z(x, \varepsilon) = I + \varepsilon Z_1(x, 0) + \ldots + \varepsilon^k Z_k(x, 0) + \varepsilon^{k+1} Z_{k+1}(x, \varepsilon). \quad (52)$$

Підставивши (52) в (13), одержимо матрицю $C(x,\varepsilon)$ у вигляді

$$C(x,\varepsilon) = C_0(x) + \varepsilon C_1(x) + \ldots + \varepsilon^k C_k(x) + \varepsilon^{k+1} C_{k+1}(x,\varepsilon), \tag{53}$$

де $C_1(x), C_i(x), C_{k+1}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{2,k}$, визначаються за формулами

$$C_1(x) = A_1(x) + B_1(x) + B_0(x)Z_1(x,0), \quad C_i(x) = B_0(x)Z_i(x,0) + B_1(x)Z_{i-1}(x,0),$$

$$C_{k+1}(x,\varepsilon) = B_0(x)Z_{k+1}(x,\varepsilon) + B_1(x)Z_k(x,0), \quad i = \overline{2,k}.$$

З явного вигляду матриць $C_i(x), C_{k+1}(x,\varepsilon)$ випливає, що матриці $C_i(x), C_{k+1}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,k}$, є голоморфними при $|x| \le x_0$ і матриця $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ має неперервну похідну за змінною $\varepsilon$ при $(x,\varepsilon) \in J$.

На підставі результатів [1] та обмеженості матриці $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ при $(x,\varepsilon) \in J$ з рівності (53) отримуємо, що ряд $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s C_s(x)$ є рівномірним при $|x| \le x_0$ асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$ і $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$.

Теорему доведено.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon y' = (C_0(x) + \varepsilon C_1(x) + \ldots + \varepsilon^k C_k(x) + \varepsilon^{k+1} C_{k+1}(x,\varepsilon))y, \tag{54}$$

де $x$ є комплексним і $|x| \le x_0$, $\varepsilon$ — малий дійсний параметр, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$. Згідно з умовами 1–3 і методом з [1] систему (54) можна звести до системи, в якій матриця $C_0(x)$ має вигляд $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Будемо вважати, що $C_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. З застосованого до (54) методу побудови асимптотичного розв'язку, запропонованого в [1, 2], а також одержаного в [3] методу дослідження існування і нескінченної диференційовності розв'язку системи (54) випливає справедливість наступних тверджень.

***Наслідок 1.*** *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує формальний ряд матриці* $V(x,\varepsilon)$

$$V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)\varepsilon^n, \tag{55}$$

*коефіцієнти якого голоморфні при* $|x| \le x_0$ *і такі, що* $\det V(x,0) = 1$ *і формальне перетворення з матрицею заміни* $V(x,\varepsilon)$ *зводить систему (54) до системи вигляду*

$$\varepsilon u' = C_0(x)u. \tag{56}$$

***Наслідок 2.*** *Нехай виконуються умови теореми 1 і має місце нерівність*

$$64(2x_0^{\frac{1}{2}} + z_0|\varepsilon|^{\frac{1}{3}})\|(\widehat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}))^{-1}\|_0 \|C_1(x,\varepsilon)\|_0 \|\widehat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})\|_0 < 1, \tag{57}$$

*де матриці* $\widehat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})$, $(\widehat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}))^{-1}$ *обмежені і визначені в лемі 30.4 з [1].*

*Тоді можна вказати функцію* $V(x,\varepsilon)$, *нескінченно диференційовну по* $x, \varepsilon$ *в області* $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ *дійсних змінних* $x, \varepsilon$ *і таку, що ряд*

$$V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)\varepsilon^n$$

*є асимптотичним розвиненням цієї функції за степенями* $\varepsilon$ *і заміна змінних з матрицею* $V(x,\varepsilon)$ *перетворює систему (54) до системи (56).*

З теореми 1 і наслідків 1, 2 випливає наступна теорема про існування розв'язку і побудову асимптотичного розв'язку системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу (1).

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1 і має місце нерівність (57). Тоді існує розв'язок системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу (1) вигляду*

$$y = V(x,\varepsilon)u,$$

*в якому* $V(x,\varepsilon)$ — *матриця, що задовольняє матричне рівняння*

$$\varepsilon V'(x,\varepsilon) + V(x,\varepsilon)C_0(x) = C(x,\varepsilon)V(x,\varepsilon),$$

*а* $u(x,\varepsilon)$ *задовольняє диференціальне рівняння (56).*

*Матриця* $C(x,\varepsilon)$ *має рівномірним при* $|x| \le x_0$ *асимптотичним розвиненням при* $\varepsilon \to 0$ *і* $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ *ряд*

$$C(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n(x),$$

*а також* $C_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, *голоморфні при* $|x| \le x_0$. *Матриця* $V(x,\varepsilon)$ *є нескінченно диференційовною по* $x$ *і* $\varepsilon$ *в області* $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ *дійсних змінних* $x$ *і* $\varepsilon$. *Ряд (55) є рівномірним при* $|x| \le x_0$ *асимптотичним розвиненням при* $\varepsilon \to 0$ *і* $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ *матриці* $V(x,\varepsilon)$. *Коефіцієнти цього ряду є голоморфними в області* $|x| \le x_0$ *і такими, що* $\det V(x,0) \equiv 1$.

Таким чином, для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу з точкою звороту одержано умови, при яких її розв'язки є розв'язками сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з точкою звороту. При цьому матриці системи диференціальних рівнянь мають асимптотичні розвинення при $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ з коефіцієнтами, голоморфними при $|x| \le x_0$. За допомогою отриманої системи диференціальних рівнянь доведено існування і нескінченну диференційовність розв'язку сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу при наявності точки звороту.

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
2. *Самойленко А. М.* Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 5. — С. 631 – 640.
3. *Самойленко А. М., Ключник І. Г.* Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 2. — С. 208 – 234.

*Одержано 02.10.09*