УДК 517.9

ГЛАДКЕ СПРЯЖЕННЯ ДИФЕОМОРФІЗМІВ КОЛА ЗІ ЗЛАМОМ

О. Ю. Теплінський

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

К. М. Ханін

Ун-т Торонто, Канада
Ін-т теор. фізики ім. Л. Д. Ландау, Москва, Росія

It is proved that any two circle diffeomorphisms with a break, which have the same size of the break (i.e., the ratio of the left and right derivatives at the break point) and the same irrational rotation number from a certain class that contains non-Diophantine numbers, are C^1-smoothly conjugate.

Доказано, что любые два диффеоморфизма окружности с изломом, имеющие одно и то же иррациональное число вращения из определенного класса, содержащего недиофантовы числа, и один и тот же размер излома (т.е. отношение производных слева и справа в точке излома), C^1-гладко сопряжены между собой.

1. Вступ та формулювання результату. Ця стаття є безпосереднім продовженням статті [1] і останнім кроком у доведенні результату, який було анонсовано авторами у 2004 році (теорема 2 з оглядової роботи [2]) і який ми сформулюємо нижче, увівши спочатку необхідні поняття.

Одиничним колом назвемо фактор-простір $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ із зрозумілим чином заданими орієнтацією, метрикою, мірою Лебега та операцією додавання. Позначимо через $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ відповідне факторизаційне відображення, яке „намотує” пряму на коло. Довільний зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм T одиничного кола $\mathbb{T}^1$ може бути, відповідно, „піднято” на пряму $\mathbb{R}$ у вигляді гомеоморфізму $L_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що має властивість $L_T(x+1) \equiv L_T(x) + 1$ і пов'язаний із T співвідношенням $\mu \circ L_T = T \circ \mu$. Такий гомеоморфізм L_T має назву *підняття* гомеоморфізму T і є визначеним з точністю до цілого доданка. Найважливішою арифметичною характеристикою зберігаючого орієнтацію гомеоморфізму T одиничного кола $\mathbb{T}^1$ є *число обертання*

$$\rho = \rho(T) = \rho(L_T) = \lim_{i\to\infty} \frac{x_i}{i} \mod 1,$$

де $x_i = L_T^i x_0$ — траєкторія підняття (класичний результат Пуанкаре стверджує, що для будь-якого T число обертання існує і не залежить від вибору підняття L_T й початкової точки $x_0 \in \mathbb{R}$). Тут і далі для заданого відображення F запис F^i позначає його i-ту ітерацію $F \circ F \circ \ldots \circ F$ (i разів).

Будемо вважати число обертання ірраціональним (така властивість є еквівалентною відсутності в T періодичних точок) і використовувати його розклад у нескінченний *ланцюговий дріб* [3]:

$$\rho = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\cdots}{k_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}} =: [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots]. \tag{1}$$

Значенням записаного „зліченно-поверхового” дробу вважається границя послідовності *раціональних наближень* $p_n/q_n = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$; при цьому встановлена формулою (1) відповідність між усіма числами $\rho \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$ та усіма послідовностями *неповних часток* $[k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ є взаємно однозначною. Позначимо через M_{o} та M_{e} два класи ірраціональних чисел $\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots] \in (0,1)$, для яких підпослідовності неповних часток з непарними та з парними індексами відповідно є обмеженими:

$$M_{\mathrm{o}} = \{\rho : (\exists K > 0)\ (\forall m \in \mathbb{N})\ k_{2m-1} \le K\},$$

$$M_{\mathrm{e}} = \{\rho : (\exists K > 0)\ (\forall m \in \mathbb{N})\ k_{2m} \le K\}.$$

Зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм кола T називається *дифеоморфізмом* гладкості $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, *з можливим зламом* у точці ξ_0, якщо виконуються наступні умови, які простіше формулювати у термінах обмеження $\bar{L}_T$ підняття L_T на відрізок $[x_0, x_0+1]$, де $\mu x_0 = \xi_0$ (і L_T, і x_0 визначені з точністю до цілого доданка, але це не впливає на однозначність нашого означення):

1) $\bar{L}_T \in C^{2+\alpha}([x_0, x_0+1])$;

2) $\min_{x\in[x_0,x_0+1]} \bar{L}_T'(x) > 0$.

Розміром зламу дифеоморфізму кола з можливим зламом ми називаємо число

$$c = \sqrt{\frac{\bar{L}_T'(x_0+1)}{\bar{L}_T'(x_0)}} = \sqrt{\frac{T'(\xi_0-)}{T'(\xi_0+)}}.$$

Легко переконатися, що будь-яка гладка зберігаюча орієнтацію заміна координат на колі (тобто така заміна координат φ, яка сама по собі є зберігаючим орієнтацію дифеоморфізмом кола гладкості C^1) залишає розмір зламу дифеоморфізму зі зламом незмінним, а гладка заміна координат, що змінює орієнтацію кола, змінює розмір зламу на обернене до нього число. Для дифеоморфізму кола *зі зламом* розмір останнього є додатним дійсним числом, відмінним від одиниці. Нарешті ми можемо сформулювати головний результат стосовно дифеоморфізмів кола зі зламом.

Теорема 1. *Нехай T і $\tilde{T}$ — два дифеоморфізми кола зі зламом, що мають один і той самий розмір зламу $c > 0$ та одне і те саме число обертання $\rho \in (0,1)$. Нехай додатково виконується одне з наступних обмежень: або $c > 1$ і $\rho \in M_{\mathrm{e}}$, або ж $c < 1$ і $\rho \in M_{\mathrm{o}}$. Тоді T і $\tilde{T}$ є гладко спряженими між собою, тобто існує така заміна координат на колі (його зберігаючий орієнтацію дифеоморфізм) φ гладкості C^1, що $\varphi \circ T \circ \varphi^{-1} = \tilde{T}$.*

(Зауважимо, що формулювання цієї теореми в [2] містило помилку: там умови $\rho \in M_{\mathrm{e}}$ та $\rho \in M_{\mathrm{o}}$ співставлено умовам $c > 1$ та $c < 1$ навпаки.)

2. Методи та інструменти доведення. Ми виведемо теорему 1 з так званої умовної теореми, також анонсованої авторами в [2] і доведеної в [4]. Умовна теорема надає умови, за яких наявність гладкого спряження між двома дифеоморфізмами кола з особливостями випливає з певних властивостей їхніх ренормалізацій. Докладно про ренормалізації гомеоморфізмів кола взагалі та його дифеоморфізмів зі зламом зокрема відповідно до розкладу числа обертання в ланцюговий дріб див. у статтях [5, 1], тож зараз ми лише коротко наведемо важливі для нас відомості щодо цього математичного об'єкту.

2.1. Ренормалізації гомеоморфізмів кола. Для заданого гомеоморфізму T розглянемо траєкторію $\xi_i = T^i\xi_0$, $i \geq 0$, певної *відміченої точки* $\xi_0 \in \mathbb{T}^1$ і виберемо з неї послідовність *динамічних наближень* ξ_{q_n}, $n \geq 0$, індексами яких є знаменники раціональних наближень до ρ відповідно до розкладу (1). Добре вивчені арифметичні властивості раціональних наближень показують, що динамічні наближення наближаються до відміченої точки по черзі з двох боків у наступному порядку:

$$\xi_{q_1} < \xi_{q_3} < \ldots < \xi_{q_{2m+1}} < \ldots < \xi_0 < \ldots < \xi_{q_{2m}} < \ldots < \xi_{q_2} < \xi_{q_0}. \tag{2}$$

У відповідності до (2) означимо n-й *фундаментальний відрізок* $\Delta_0^{(n)}$ як дугу кола $[\xi_0, \xi_{q_n}]$ для парного n та як дугу кола $[\xi_{q_n}, \xi_0]$ для n непарного. Ітерації T^{q_n} та $T^{q_{n-1}}$, обмежені на фундаментальні відрізки $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$ відповідно, являють собою дві неперервні компоненти відображення першого повернення для T на їхнє об'єднання $\overline{\Delta}_0^{(n-1)} = \Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$ із склеєними між собою кінцевими точками $\xi_{q_{n-1}}$ і ξ_{q_n}. При цьому послідовні образи відрізків $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$ до свого повернення на $\overline{\Delta}_0^{(n-1)}$ цілком вкривають коло $\mathbb{T}^1$, перекриваючись лише своїми кінцевими точками, таким чином утворюючи його *динамічне розбиття*

$$\mathbf{P}_n = \{T^i\Delta_0^{(n-1)}, 0 \leq i < q_n\} \cup \{T^i\Delta_0^{(n)}, 0 \leq i < q_{n-1}\}.$$

Назвемо n-ю *ренормалізацією* зберігаючого орієнтацію гомеоморфізму T одиничного кола $\mathbb{T}^1$ відносно відміченої точки $\xi_0 \in \mathbb{T}^1$ пару функцій (f_n, g_n), які одержують з обмежень T^{q_n} на $\Delta_0^{(n-1)}$ і $T^{q_{n-1}}$ на $\Delta_0^{(n)}$ відповідно за допомогою афінної заміни координат $\mathfrak{r}_n : \overline{\Delta}_0^{(n-1)} \to \mathbb{R}$, яка переводить ξ_0 в 0, а $\xi_{q_{n-1}}$ в -1. При цьому

$$f_n = \mathfrak{r}_n \circ T^{q_n}|_{\Delta_0^{(n-1)}} \circ \mathfrak{r}_n^{-1} : [-1, 0] \to \mathbb{R}, \quad g_n = \mathfrak{r}_n \circ T^{q_{n-1}}|_{\Delta_0^{(n)}} \circ \mathfrak{r}_n^{-1} : [0, a^{(n)}] \to \mathbb{R},$$

де $a^{(n)} = f_n(0) = |\Delta_0^{(n)}|/|\Delta_0^{(n-1)}| > 0$. У випадку ірраціонального числа обертання це означення є коректним для всіх $n \geq 1$, і з нього автоматично випливає, що функції f_n і g_n неперервні і строго зростають, до того ж $f_n(-1) = g_n(0) < 0$, $g_n(a^{(n)}) = -1$, $f_n(x) > x$ для всіх $x \in [-1, 0]$, $g_n(x) < x$ для всіх $x \in [0, a^{(n)}]$.

2.2. Умовна теорема про гладке спряження дифеоморфізмів кола з особливостями. Твердження, яке ми тут сформулюємо, має місце для зберігаючих орієнтацію дифеоморфізмів кола з особливостями довільного типу, зокрема зі зламом. Для $C^{N+\alpha}$-гладкої функції f на певному відрізку, де $N \geq 0$ ціле, $\alpha \in [0, 1)$, розглядатимемо її $C^{N+\alpha}$-*норму*:

$$\|f\|_{N+\alpha} = \max_x |f(x)| + \max_x |f'(x)| + \ldots + \max_x |f^{(N)}(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f^{(N)}(x) - f^{(N)}(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Будемо говорити, що для даного вектора $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3, K_4)$ з додатними компонентами (серед них K_1 за змістом є досить великим, а K_2, K_3, K_4 — досить малими) і зростаючої функції $f \in C^{2+\alpha}([-1,0])$ такої, що $f(x) > x$ для всіх $x \in [-1,0]$, f є $\mathbf{K}$-*регулярною*, якщо виконуються наступні умови:

i) $\|f\|_{2+\alpha} \le K_1$;

ii) множина $M_{f,K_2} = \{x \in [-1,0], f(x) - x < K_2\}$ є відкритим інтервалом (або може бути порожньою);

iii) $f''(x) > K_3$ для всіх $x \in M_{f,K_2}$;

iv) $f'(x) > K_4$ для всіх $-1 \le x < -K_2^2$.

Теорема (умовна [4]). *Припустимо, що для двох зберігаючих орієнтацію дифеоморфізмів кола з особливостями T та $\tilde{T}$ гладкості $C^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$, виконуються наступні умови:*

1) число обертання $\rho \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$ у них одне і те ж саме;

2) ренормалізації рівномірно регулярні, тобто існує таке $\mathbf{K}$, що f_n та $\widetilde{f_n}$ є $\mathbf{K}$-регулярними, $n \ge 1$;

3) динамічні розбитя експоненціально подрібнюються, тобто існують сталі $C_{\mathrm{ref}} > 0$ та $\lambda_{\mathrm{ref}} \in (0,1)$ такі, що $|I| \le C_{\mathrm{ref}} \lambda_{\mathrm{ref}}^{n-m} |J|$ для будь-яких відрізків $I \in \mathbf{P}_n$, $J \in \mathbf{P}_m$ або $I \in \tilde{\mathbf{P}}_n$, $J \in \tilde{\mathbf{P}}_m$ таких, що $I \subset J$, $n \ge m \ge 1$;

4) ренормалізації експоненціально зближуються в C^2-нормі, тобто існують константи $C_{\mathrm{ren}} > 0$ та $\lambda_{\mathrm{ren}} \in (0,1)$ такі, що $\|f_n - \tilde{f}_n\|_2 \le C_{\mathrm{ren}} \lambda_{\mathrm{ren}}^n$, $n \ge 1$.

Тоді існує такий зберігаючий орієнтацію дифеоморфізм кола φ гладкості C^1, що

$$\varphi \circ T \circ \varphi^{-1} = \tilde{T}. \tag{3}$$

2.3. Особливі властивості ренормалізацій дифеоморфізмів зі зламом. У роботі [5] показано, що послідовність ренормалізацій дифеоморфізмів кола зі зламом експоненціально швидко наближається в C^2-нормі до цілком певної сім'ї дробово-лінійних відображень, а саме, відображень вигляду

$$F_{a,v,c}(x) = \frac{a + cx}{1 - vx}, \quad G_{a,v,c}(x) = \frac{-c + x}{c - \frac{c-1-v}{a} x}. \tag{4}$$

Для того щоб сформулювати відповідне твердження, доповнимо введену в підпункті 2.1 природну числову характеристику ренормалізації $a^{(n)} = f_n(0) = |\Delta_0^{(n)}|/|\Delta_0^{(n-1)}| > 0$ ще двома: $b^{(n)} = -f_n(-1) \in (0,1)$ та $c^{(n)} = c^{(-1)^n}$ (тобто $c^{(n)} = c$ при парному n та $c^{(n)} = 1/c$ при непарному n). У термінах точок відміченої траєкторії ці характеристики записуються як

$$a^{(n)} = \frac{\xi_{q_n} - \xi_0}{\xi_0 - \xi_{q_{n-1}}} > 0, \quad b^{(n)} = \frac{\xi_0 - \xi_{q_n + q_{n-1}}}{\xi_0 - \xi_{q_{n-1}}} \in (0,1), \tag{5}$$

а внаслідок властивості $q_{n+1} = k_{n+1} q_n + q_{n-1}$ виконуються рекурентні формули

$$a^{(n+1)} = -\frac{f_n^{k_{n+1}}(-1)}{a^{(n)}}, \quad b^{(n+1)} = \frac{f_n^{k_{n+1}+1}(-1)}{a^{(n)}}, \tag{6}$$

до того ж $f_n^{k_{n+1}}(-1) < 0 < f_n^{k_{n+1}+1}(-1)$, $n \geq 1$.

З технічних міркувань (див. формули (4)) замість трійки характеристик $(a^{(n)}, b^{(n)}, c^{(n)})$ зручніше використовувати трійку $(a^{(n)}, v^{(n)}, c^{(n)})$, де $v^{(n)} = \dfrac{c^{(n)} - a^{(n)} - b^{(n)}}{b^{(n)}}$ можна дещо вільно трактувати як величину нелінійності ренормалізації f_n.

Сформулюємо необхідні нам оцінки, які доведено в [5, 6]: існують такі сталі $C = C(T) > 0$, $\lambda = \lambda(T) \in (0,1)$, що для всіх $n \geq 1$ справджуються оцінки:

A) $|\log(T^{q_n})'(\xi)| \leq C$ для всіх $\xi \in \mathbb{T}^1$, де у випадку $\xi = \xi_{-i}$, $0 \leq i < q_n$, слід розглядати похідну справа чи зліва;

B) $|a^{(n)} + b^{(n)} m_n - c^{(n)}| \leq C\lambda^n$, де $m_n \in [C^{-1}, C]$;

C) $\|f_n - F_{a^{(n)}, v^{(n)}, c^{(n)}}\|_2 \leq C\lambda^n$.

3. Експоненціальне зближення ренормалізацій. У цьому пункті ми доведемо виконання умови 4 умовної теореми, що і складає головний зміст цієї роботи. Нагадаємо, що в [5] показано, що ренормалізації довільного дифеоморфізму кола зі зламом з ірраціональним числом обертання експоненціально швидко прямують до дробово-лінійної сім'ї пар (4), тоді як в [1] доведено, що дві послідовності ренормалізацій з цієї сім'ї за умов збігу чисел обертання та розміру зламу експоненціально швидко зближуються між собою. Тепер наша мета — узгодити між собою ці дві збіжності.

3.1. Простори комутуючих пар та ренорм-оператор на них. Для того щоб узгодити „зовнішню" збіжність ренормалізацій до дробово-лінійної сім'ї із „внутрішньою" збіжністю двох послідовностей всередині неї, важливо розумним чином визначити оператор $\mathcal{P}$, що проектує елементи простору $\mathfrak{S}_c^{2+\alpha}$ так званих *комутуючих* (у точці 0) *пар* (F, G), що відповідають дифеоморфізмам зі зламом розміру c, на його підпростір $\mathfrak{S}_c$ дробово-лінійних пар вигляду (4). Обидва ці простори строго описано в [1], до того ж другий із них асоціюється з певною множиною точок (a, v) площини $\mathbb{R}^2$. Там же визначено *ренорм-оператор* $\mathcal{R}$, що діє на комутуючі пари за правилом $\mathcal{R}(F, G) = \overline{(F^k \circ G, F)}$, де $k = k(F, G) \geq 1$ — *висота ренормалізації*, тобто число, для якого $F^k(-1) \leq 0 < F^{k+1}(-1)$, а $\overline{(f, g)} = (\mathbf{n}^{-1} \circ f \circ \mathbf{n}, \mathbf{n}^{-1} \circ g \circ \mathbf{n})$, $\mathbf{n}(x) = -g(0)x$. Пару $\mathcal{R}(F, G)$ ми називатимемо *ренормалізацією* пари (F, G). Для довільної пари (F, G) можна також означити її число обертання $\rho(F, G) = [k_1, k_2, \ldots]$ як ланцюговий дріб, неповними частками в якому є послідовні висоти ренормалізацій $k_n = k(\mathcal{R}^{n-1}(F, G))$, $n \geq 1$, який може, щоправда, обірватися, якщо якась ітерація пари (F, G) виявиться неренормалізовною (тобто не матиме скінченної висоти), і тоді число обертання буде раціональним [1]. Відповідно для елемента $(a, v) \in \mathfrak{S}_c$ означаємо $\rho(a, v, c) = \rho(F_{a,v,c}, G_{a,v,c})$. Множину всіх нескінченно ренормалізовних комутуючих пар (тобто тих пар (F, G), для яких $\rho(F, G) \notin \mathbb{Q}$) позначаємо через $\mathfrak{R}$.

Особливістю дії ренорм-оператора на пари, які відповідають дифеоморфізмам кола зі зламом, є те, що $\mathcal{R}$ переводить ренормалізовні елементи простору $\mathfrak{S}_c^{2+\alpha}$ в елементи простору $\mathfrak{S}_{1/c}^{2+\alpha}$, тобто параметр c, що відповідає розміру зламу, кожного разу перемикається на обернений, тому два згаданих простори потрібно розглядати, так би мовити, у зв'язці. Обмеження $\mathcal{R}_c$ ренорм-оператора $\mathcal{R}$ на підпростір $\mathfrak{S}_c$ точок (a, v), що відповідають комутуючим парам вигляду (4), переводить ренормалізовні елементи останнього в елементи підпростору $\mathfrak{S}_{1/c}$ згідно з формулою

$$\mathcal{R}_c(a, v) = \left(-\frac{1}{a} F_{a,v,c}^k(-1), \frac{1}{c}\left(1 - v F_{a,v,c}^k(-1)\right) - 1\right).$$

Якщо $(a, v) \in \mathfrak{S}_c \cap \mathfrak{R}$, тобто число обертання $\rho(a, v, c) \notin \mathbb{Q}$, то $\mathcal{R}^{2n}(a, v) \in \mathfrak{S}_c \cap \mathfrak{R}$ для всіх $n \geq 0$, отже, квадрат ренорм-оператора $\mathcal{R}^2$ можна необмежено ітерувати на множині $\mathfrak{S}_c \cap \mathfrak{R}$.

Дія ренорм-оператора на парах пов'язана з ренормалізаціями гомеоморфізму кола T таким чином: $\mathcal{R}(f_n, g_n) = (f_{n+1}, g_{n+1})$, до того ж $k(f_n, g_n) = k_{n+1}$ з розкладу $\rho(T)$, отже, $\rho(f_n, g_n) = \rho_n = [k_{n+1}, k_{n+2}, \ldots]$. Також можна записати, що $(f_n, g_n) = \mathcal{R}^n(f_0, g_0)$, де f_0 — те підняття L_T, для якого $L_T(0) \in (0, 1)$, а $g_0 : x \mapsto x - 1$.

Власне, сам вигляд дробово-лінійних пар (4) підказує, що в якості проекції ренормалізації $(f_n, g_n) \in \mathfrak{S}^{2+\alpha}_{c^{(n)}}$ можна було б розглядати точку $(a^{(n)}, v^{(n)}) \in \mathfrak{S}_{c^{(n)}}$. Однак число обертання $\rho(a^{(n)}, v^{(n)}, c^{(n)})$, взагалі кажучи, не дорівнює $\rho_n = \rho(f_n, g_n)$. З цього приводу ми назвемо точку $(a^{(n)}, v^{(n)}) \in \mathfrak{S}_{c^{(n)}}$ „наївною" проекцією пари $(f_n, g_n) \in \mathfrak{S}^{2+\alpha}_{c^{(n)}}$ і спробуємо натомість означити „розумний" оператор $\mathcal{P}$, який би не лише переводив пари з $\mathfrak{S}^{2+\alpha}_c$ до $\mathfrak{S}_c$, а ще й зберігав їхнє число обертання. Спочатку покажемо, що всі ренормалізації з певного моменту задовольняють певні обмеження, що дасть змогу означати наш розумний проектор $\mathcal{P}$ не в усьому просторі $\mathfrak{S}^{2+\alpha}_c$, а лише в його певній обмеженій області.

3.2. Обмеження на характеристики ренормалізацій.

Твердження 1. *Нехай стосовно дифеоморфізму зі зламом T виконуються умови теореми 1. Тоді існує константа $\varepsilon = \varepsilon(T) > 0$ така, що для достатньо великих n характеристики ренормалізацій задовольняють наступні обмеження: 1) $a^{(n)} \in (\varepsilon, c^{(n)} - \varepsilon)$, 2) $\dfrac{v^{(n)}}{c^{(n)} - 1} \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$, 3) $v^{(n)} + a^{(n)} - c^{(n)} + 1 > \varepsilon$.*

Доведення. 1. Припустимо, що $c^{(n)} < 1$ і значення $a^{(n)}$ є дуже малим. Це означає, що малим є відрізок $[0, f_n(0)]$. Оскільки похідна g_n' обмежена згідно з оцінкою $\mathbf{A}$), то відрізок $[-1, f_n(-1)] = g_n([0, f_n(0)])$ також є малим. Оскільки $f_n^{k_{n+1}}(-1) < 0 < f_n^{k_{n+1}+1}(-1)$, то об'єднання відрізків $[f_n^k(-1), f_n^{k+1}(-1)] = f_n^k([-1, f_n(-1)])$, $0 \leq k \leq k_{n+1}$, повинно вкривати відрізок $[-1, 0]$ одиничної довжини, тоді як всі вони є малими (оскільки похідна f_n' обмежена згідно з $\mathbf{A}$)), і їх є обмежена кількість (внаслідок припущення теореми 1 щодо числа обертання). Суперечність.

Припустимо тепер, що $c^{(n)} > 1$ і значення $a^{(n)}$ є дуже малим. Тоді (див. попередній абзац) відрізок $[-1, f_n(-1)]$ є малим, тобто значення $b^{(n)}$ є близьким до 1, тому $v^{(n)}$ обмежене. Перша похідна $f_n'(0)$ згідно з оцінкою $\mathbf{C}$) є близькою до $F'_{a^{(n)}, v^{(n)}, c^{(n)}}(0) = c^{(n)} + a^{(n)}v^{(n)}$, а отже до $c^{(n)} > 1$, тому є відокремленою від одиниці. Друга похідна $f_n''(0)$ близька до $F''_{a^{(n)}, v^{(n)}, c^{(n)}}(0) = 2v^{(n)}(c^{(n)} + a^{(n)}v^{(n)})$, а отже обмежена. З цього випливає, що $f_n(z^*) = z^*$ у певній точці $z^* \in (-1, 0)$, а це суперечить ірраціональності числа обертання $\rho(T)$.

Таким чином доведено, що в обох випадках число $a^{(n)}$ є відокремленим від нуля.

Припустимо тепер, що різниця $c^{(n)} - a^{(n)}$ є дуже малою або від'ємною. Внаслідок оцінки $\mathbf{B}$) виконується нерівність $c^{(n)} - a^{(n)} > -C\lambda^n$, отже, ця різниця є близькою до нуля. Знову ж з $\mathbf{B}$) випливає, що $b^{(n)} > 0$ є малим. Зауважимо, що $0 < a^{(n+1)} \leq b^{(n)}/a^{(n)}$ згідно з формулою (5), тому $a^{(n+1)}$ виявляється малим, а це суперечить тому, що було показано в попередній частині цього доведення. Отже, першу частину твердження доведено.

З нього випливають наступні обмеження (для всіх достатньо великих n) з певним $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$:

$$a^{(n+1)}a^{(n)} \in (\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1), \quad b^{(n)} \in (\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1), \quad v^{(n)}+1 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_1^{-1})$$

(останнє з них між іншим обумовлює зручний факт обмеженості згори та відокремленості від нуля знизу знаменників виразів (4) для $F_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}}(x)$ та $G_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}}(x)$).

2. З (6) неважко вивести, що $v^{(n+1)} = a^{(n)}(c^{(n+1)} - a^{(n+1)})/f_n(-a^{(n+1)}a^{(n)}) - 1$. Оскільки $F_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}}(-a^{(n+1)}a^{(n)}) = c^{(n)}a^{(n)}(c^{(n+1)} - a^{(n+1)})/(1 + a^{(n+1)}a^{(n)}v^{(n)})$ є відокремленим від нуля, то згідно з оцінкою **C**) маємо $v^{(n+1)} = c^{(n+1)}(1 + a^{(n+1)}a^{(n)}v^{(n)}) - 1 + \mathcal{O}(\lambda^n)$, звідки виводимо наступну властивість:

$$\frac{v^{(n+2)}}{c^{(n+2)}-1} = (a^{(n+2)}a^{(n+1)})(a^{(n+1)}a^{(n)})\frac{v^{(n)}}{c^{(n)}-1} + \Big(1 - (a^{(n+2)}a^{(n+1)})\Big) + \mathcal{O}(\lambda^n). \qquad (7)$$

З формули (7) зрозуміло, що якщо значення виразу $\dfrac{v^{(n)}}{c^{(n)}-1}$ є від'ємним, то через два кроки за n воно збільшиться на додатну величину, відокремлену від нуля. А як тільки $\dfrac{v^{(n)}}{c^{(n)}-1}$ стає невід'ємним, то через два кроки воно буде більшим, ніж згадана величина, і тоді вже залишатиметься таким (додатним і відокремленим від нуля) завжди.

Переписавши оцінку (7) у вигляді

$$1 - \frac{v^{(n+2)}}{c^{(n+2)}-1} = (a^{(n+2)}a^{(n+1)})\left((a^{(n+1)}a^{(n)})\left(1 - \frac{v^{(n)}}{c^{(n)}-1}\right) + (1 - (a^{(n+1)}a^{(n)}))\right) + \mathcal{O}(\lambda^n),$$

ми аналогічним чином доведемо, що значення виразу $1 - \dfrac{v^{(n)}}{c^{(n)}-1}$ є для всіх достатньо великих n додатним і відокремленим від нуля.

3. З огляду на доведене вище заключна частина твердження випливає з рівності $v^{(n)} + a^{(n)} - c^{(n)} + 1 = (c^{(n)} - a^{(n)})(1 - b^{(n)})/b^{(n)}$.

Зауважимо, що обмеження 3 щойно доведеного твердження має самостійне значення лише для $c^{(n)} > 1$, у протилежному випадку воно випливає з перших двох обмежень.

3.3. Розумна проекція. Позначимо $\Phi_c^\varepsilon = \{(a,v) : \varepsilon < a < c - \varepsilon, \varepsilon < v/(c-1) < 1 - \varepsilon, v + a - c + 1 > \varepsilon\}$, $\varepsilon \geq 0$. Твердження 1 показує, що існує момент $n_0 = n_0(T)$, починаючи з якого наївна проекція $(a^{(n)}, v^{(n)})$ ренормалізації (f_n, g_n) дифеоморфізму кола зі зламом T, який задовольняє умови теореми 1, на граничний дробово-лінійний підпростір $\mathfrak{S}_{c^{(n)}}$ простору $\mathfrak{S}_{c^{(n)}}^{2+\alpha}$ ренормалізацій дифеоморфізмів зі зламом належить до множини $\Phi_{c^{(n)}}^\varepsilon$. Означимо тепер розумну проекцію $(a_*^{(n)}, v^{(n)}) \in \Phi_{c^{(n)}}^0$, поклавши $a_*^{(n)} = \gamma_{\rho_n, c^{(n)}}(v^{(n)})$, де $a = \gamma_{\rho,c}(v)$ — крива в координатах (a,v), яка відповідає множині точок з $\mathfrak{S}_c$ із ірраціональним числом обертання ρ (те, що це насправді крива, тобто a визначається за v, c та ρ однозначно, принаймні в межах області Φ_c^0, показано в [7]). У цьому підпункті ми доведемо, що різниця $a_*^{(n)} - a^{(n)}$ є експоненціально малою. Як і в [1], для отримання необхідних оцінок використовуватимемо канонічні підняття розглядуваних комутуючих пар.

У роботі [1] для довільної комутуючої пари (F, G) (а отже, і для ренормалізацій (f_n, g_n) гомеоморфізмів кола, і для пар з граничної дробово-лінійної сім'ї (4)) було означено її *канонічне підняття* $H_{F,G}$ як функцію, що складається з двох компонент: $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$ на проміжку $[-1, \phi(F^{-1}(0))]$ та $1 + \phi \circ G \circ F \circ \phi^{-1}$ на проміжку $[\phi(F^{-1}(0)), 0]$, де $\phi \, : \, x \mapsto \mapsto \dfrac{(F(0)+1)x}{2F(0) + (F(0)-1)x}$ — дробово-лінійна функція, яка переводить -1, 0 та $F(0)$ у -1, 0 та 1 відповідно. При цьому $\rho(H_{F,G}) = \rho(F,G)$. Зокрема, канонічне підняття $H_c(\,\cdot\,; a, v) = H_{F_{a,v,c}, G_{a,v,c}}$ пари вигляду (4) складається з двох дробово-лінійних компонент, для яких маємо явні формули

$$H_c^{(1)}(w; a, v) = \frac{A_1 + B_1 w}{C_1 + D_1 w}, \quad w \in [-1, -(a+1)/(c+1+(c-a))],$$

$$H_c^{(2)}(w; a, v) = \frac{A_2 + B_2 w}{C_2 + D_2 w}, \quad w \in [-(a+1)/(c+1+(c-a)), 0],$$

де $A_1 = (a+1)^2$, $B_1 = (a+1)(c+1+(c-a))$, $C_1 = (a+1)^2$, $D_1 = 1 - 4va - a^2 + 2ca - 2c$; $A_2 = (a+1)^2(c-a)$, $B_2 = (a+1)(c-a+a^2-3ca-2cva)$, $C_2 = (a+1)(-a^2+ac-a-2av-c)$, $D_2 = a^3 + 2va^2 - 3ca^2 + 2cva^2 + 4c^2a - a - 2va - 2cva - c$.

Перша лема (вірніше, її наслідок) дає рівномірну оцінку, яку буде використано при оцінюванні близькості піднять наївної $(a^{(n)}, v^{(n)})$ та розумної $(a_*^{(n)}, v^{(n)})$ проекцій ренормалізації (f_n, g_n).

Лема 1. *Для кожного* $0 < c \neq 1$ *та досить малого* $\varepsilon > 0$ *існує стала* $h_{c,\varepsilon} > 0$ *така, що в кожній точці* $(a, v) \in \Phi_c^{\varepsilon}$ *для всіх* w *з відповідних проміжків виконуються оцінки* $\dfrac{\partial H_c^{(i)}(w; a, v)}{\partial a} \geq h_{c,\varepsilon}$, $i \in \{1, 2\}$.

Доведення. Похідна $\dfrac{\partial H_c^{(1)}(w; a, v)}{\partial a} = \dfrac{-4wP_1}{Q_1^2}$, де $P_1 = ((-a^2 - 1 - 2c)v - 2ca + 2c^2)w + (-1 + a^2)v + 2ca + 2c$, $Q_1 = (-1 + 4va + a^2 - 2ca + 2c)w - 1 - 2a - a^2$. Очевидно, величина Q_1 обмежена, отже, $-4w/Q_1^2 > 0$ є відокремленим від нуля для $w \in [-1, -(a+1)/(c+1+(c-a))]$. В точці $w = -1$ маємо $P_1 = 2a(c + av) + 2c(v + a - c + 1)$, а в точці $w = -(a+1)/(c+1+(c-a)$ отримуємо $P_1 = 2(c+1)(a+1)(c+av)/(c+1+(c-a))$. Обидва ці значення величини P_1 відокремлені від нуля додатними сталими, що залежать лише від c та ε (зауважимо, що $c + av$ лежить між c та c^2). Оскільки величина P_1 змінюється лінійно відносно w, для $i = 1$ лему доведено.

Для $i = 2$ маємо $\dfrac{\partial H_c^{(2)}(w; a, v)}{\partial a} = \dfrac{2P_2}{Q_2^2}$, де $P_2 = 4a^2c(c+1)v^2w^2 + (2c^2a^2 + 2c^2 + 2a^4c - 4c^3a^2 + a^2 + a^4 + c - 2a^3 + 7a^2c - 2ca)vw^2 + c(4a^3c + c - 6c^2a^2 - 2c^2 - 3ca^2 + 1 - 3a^2 + 2a^3 + 6ca)w^2 - 2(c+1)(a-1)(a+1)(a^2+c)vw - 2c(c+1)(a-1)(a+1)(2a-c+1)w + (a+1)^2(a^2+c)v + c(a+1)^2(2a-c+1)$, $Q_2 = -(a+1)(a^2 - ca + a + c) + (3a^2c - a + a^3 + 4c^2a - c)w - 2a(a+1)v + 2a(1+c)(a-1)vw$. Оскільки Q_2 обмежене, то $2/Q_2^2 > 0$ є відокремленим від нуля. В точці $w = -(a+1)/(c+(c-a))$ маємо $P_2 = 4ca(1+c)(1+a)^2(v+a-c+1)(c+av)/(c+1+(c-a))^2$, а в точці $w = 0$ отримуємо $P_2 = (a+1)^2(a(c+av)+c(v+a-c+1))$. Обидва ці значення додатні і відокремлені від нуля. Тепер зазначимо, що P_2/w^2 є квадратним тричленом відносно $1/w$ з точкою мінімуму $1/w = (1+c)(a-1)/(a+1)$, яка лежить зовні проміжку $(-\infty, -(c+1+(c-a))/(a+1)]$, який нас цікавить, отже, мінімального значення на цьому проміжку цей тричлен набуває в точці $1/w = -(c+1+(c-a))/(a+1)$.

Для завершення доведення зауважимо, що $\dfrac{\partial}{\partial w} P_2$ обмежене, тому існує $\delta > 0$ таке, що P_2 є відокремленим від нуля для $w \in [-\delta, 0]$, тоді як для $w \in [-(a+1)/(c+1+(c-a)), -\delta]$ маємо $P_2 \geq \delta^2 P_2/w^2$ з таким самим результатом.

Лему доведено.

З леми 1 легко випливає наступна оцінка, змістом якої є рівномірне невироджене зростання відносно змінної a канонічного підняття H_c як функції трьох змінних $(w; a, v)$ на множині $[-1, 0] \times \Phi_c^\varepsilon$.

Наслідок 1. *Для довільних $(a_1, v), (a_2, v) \in \Phi_c^\varepsilon$, $a_2 \geq a_1$, виконується нерівність*

$$H_c(w; a_2, v) - H_c(w; a_1, v) \geq h_{c,\varepsilon}(a_2 - a_1), \quad w \in [-1, 0]. \tag{8}$$

Наступна лема стверджує експоненціальну близькість (за неперервною нормою) канонічних піднять ренормалізації (f_n, g_n) та її наївної проекції $(a^{(n)}, v^{(n)})$.

Лема 2. *Існує стала $C_1 = C_1(T) > 0$ така, що для всіх достатньо великих n має місце оцінка $|H_{f_n,g_n}(w) - H_{c^{(n)}}(w; a^{(n)}, v^{(n)})| \leq C_1 \lambda^n$.*

Доведення. Згідно з означенням $H_{c^{(n)}}(w; a^{(n)}, v^{(n)})$ дорівнює $\phi \circ F_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}} \circ \phi^{-1}$ на $[-1, \phi(F^{-1}_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}}(0))]$ та $1 + \phi \circ G_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}} \circ F_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}} \circ \phi^{-1}$ на $[\phi(F^{-1}_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}}(0)), 0]$, де $\phi(z) = \dfrac{(a^{(n)}+1)z}{2a^{(n)} + (a^{(n)}-1)z}$.

З іншого боку, H_{f_n,g_n} дорівнює $\phi \circ f_n \circ \phi^{-1}$ на $[-1, \phi(f_n^{-1}(0))]$ та $1 + \phi \circ g_n \circ f_n \circ \phi^{-1}$ на $[\phi(f_n^{-1}(0)), 0]$, до того ж ϕ є тим самим, оскільки $f_n(0) = a^{(n)}$.

Твердження леми випливає з оцінки **С**), тому що похідні ϕ, $F_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}}$ та $G_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}}$ є обмеженими й відокремленими від нуля додатними сталими внаслідок твердження 1. (Слід зауважити, що довжина інтервалу з кінцями $\phi(F^{-1}_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}}(0))$ та $\phi(f_n^{-1}(0))$ є експоненціально малою, тоді як обидві функції $H_{c^{(n)}}(w; a^{(n)}, v^{(n)})$ та $H_{f_n,g_n}(w)$ є неперервними і строго зростаючими; отже, їхня близькість на згаданому інтервалі випливає з їхньої близькості в його кінцевих точках.)

Лему доведено.

Третя лема стверджує експоненціальну близькість між наївною та розумною проекціями.

Лема 3. *Існує таке $C_2 = C_2(T) > 0$, що $|a_*^{(n)} - a^{(n)}| \leq C_2 \lambda^n$ для досить великих n.*

Доведення. Позначимо $\Delta a = a^{(n)} - a_*^{(n)}$ і припустимо, що $\Delta a > 0$ (для протилежного випадку доведення аналогічне). Оскільки $(a^{(n)}, v^{(n)}) \in \Phi^\varepsilon_{c^{(n)}}$ за твердженням 1, а $(a_*^{(n)}, v^{(n)}) \in \Phi^0_{c^{(n)}}$ за означенням розумної проекції, то принаймні половина відрізка $[a_*^{(n)}, a^{(n)}] \times \{v^{(n)}\}$ лежить всередині області $\Phi^{\varepsilon/2}_{c^{(n)}}$, звідки відповідно до леми 2 та наслідку 1 дістаємо нерівність

$$H_{f_n,g_n}(w) \geq H_{c^{(n)}}(w; a^{(n)}, v^{(n)}) - C_1\lambda^n \geq H_{c^{(n)}}(w; a_*^{(n)}, v^{(n)}) + h_{c^{(n)},\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Delta a}{2} - C_1 \lambda^n$$

для всіх $w \in [-1, 0]$ та всіх досить великих n. З неї випливає, що $\Delta a \leq \dfrac{2}{h} C_1 \lambda^n$, де $h = h(T) = \min\{h_{c,\frac{\varepsilon}{2}}, h_{\frac{1}{c},\frac{\varepsilon}{2}}\} > 0$, бо в протилежному випадку для якогось n мала б місце нерівність $H_{f_n,g_n}(w) > H_{c^{(n)}}(w; a_*^{(n)}, v^{(n)})$ для всіх w, з якої б випливало $\rho(f_n, g_n) >$

$> \rho(a_*^{(n)}, v^{(n)})$, тоді як насправді $\rho(a_*^{(n)}, v^{(n)}) = \rho_n = \rho(f_n, g_n)$ згідно з означенням розумної проекції. Таким чином, твердження леми дійсно виконується зі сталою $C_2 = 2C_1/h$.

З оцінки останньої леми, зокрема, випливає, що для довільного $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ з певного моменту $n \geq n_1$ має місце включення $(a_*^{(n)}, v^{(n)}) \in \Phi_{c^{(n)}}^{\varepsilon_1}$. Отже, перепозначивши ці ε_1 та n_1 знову як ε та n_0, сформулюємо підсумкове твердження даного пункту.

Твердження 2. *Нехай стосовно дифеоморфізму зі зламом T виконуються умови теореми 1. Тоді існують такі $\varepsilon = \varepsilon(T) > 0$, $C_2 = C_2(T) > 0$ та $n_0 = n_0(T)$, що для всіх $n \geq$ $\geq n_0$ маємо $(a^{(n)}, v^{(n)}), (a_*^{(n)}, v^{(n)}) \in \Phi_{c^{(n)}}^{\varepsilon}$, $|a_*^{(n)} - a^{(n)}| \leq C_2\lambda^n$, $\rho(a_*^{(n)}, v^{(n)}, c^{(n)}) = \rho(f_n, g_n)$.*

3.4. Проекція ренормалізації та ренормалізація проекції. У цьому підпункті ми доведемо експоненціальну близькість між проекцією ренормалізації та ренормалізацією проекції.

Нам знадобиться наступна лема, яка, подібно до леми 1, забезпечує зростання канонічного підняття $H_c(\,\cdot\,; a, v)$ уздовж певного напрямку в площині параметрів (але цього разу немає необхідності відокремлювати швидкість зростання від нуля). Нехай $D_{(A,V)}$ позначає похідну функції двох змінних за вектором $\overrightarrow{(A,V)}$, тобто $D_{(A,V)}f(a, v) = A\dfrac{\partial f}{\partial a}(a, v) +$ $+V\dfrac{\partial f}{\partial v}(a, v)$.

Лема 4. *Для кожного $0 < c \neq 1$ у кожній точці $(a, v) \in \Phi_c^0$ для всіх w з відповідних проміжків виконуються оцінки $D_{(1,-1)}H_c^{(i)}(w; a, v) > 0$, $i \in \{1, 2\}$.*

Доведення. Похідна $D_{(1,-1)}H_c^{(1)}(w; a, v) = \dfrac{-4wP_1}{Q_1^2}$, де $P_1 = (2ca^2 + a - a^2v - a^3 + 2c^2 - v - 2vc)w + a^3 + 2a^2 + 2ca + a^2v - v + a + 2c$, $Q_1 = (-1 + 4va + a^2 - 2ca + 2c)w - 1 - 2a - a^2$. Очевидно, $-4w/Q_1^2 > 0$ для всіх $w \in [-1, -(a+1)/(c+1+(c-a))]$. Значення P_1 у точці $w = -1$ є $2(a^2 + c)(v + a - c + 1) > 0$, а значення в точці $w = -(a+1)/(c+1+(c-a))$ є $2(c+1)(a+1)(c+va)/(c+1+(c-a)) > 0$. Оскільки величина P_1 змінюється лінійно відносно w, для $i = 1$ лему доведено.

Для $i = 2$ маємо $D_{(1,-1)}H_c^{(2)}(w; a, v) = \dfrac{2(v + a - c + 1)P_2}{Q_2^2}$, де $P_2 = (-2ca + a^4 + c + 4a^2vc + a^2 - 4c^2a^3 + 2c^2a^2 + 2c^2 + 2a^4c + 4a^2vc^2 - 4ca^3 + 3ca^2 - 2a^3)w^2 - 2(c+1)(a-1)(a+1)(a^2 + c)w + (a+1)^2(a^2 + c)$, $Q_2 = (a^3 - 3ca^2 + 2a^2v + 2a^2vc - a + 4c^2a - 2va - 2vca - c)w - a^3 - 2a^2v - 2a^2 + ca^2 - a - 2va - c$. Оскільки $2(v+a-c+1)/Q_2^2 > 0$, достатньо переконатися, що $P_2 > 0$. Значення P_2 у точці $w = -(a+1)/(c+1+(c-a))$ є $4ca(a+1)^2(c+1)(c+va)/(c+1+(c-a))^2 >$ > 0, а значення в точці $w = 0$ є $(a+1)^2(a^2 + c) > 0$. Знову зазначимо, що P_2/w^2 є квадратним тричленом відносно $1/w$ з точкою мінімуму $1/w = (1+c)(a-1)/(a+1)$, яка лежить зовні проміжку $(-\infty, -(c+1+(c-a))/(a+1)]$. Отже, мінімального значення на цьому проміжку цей тричлен набуває в точці $1/w = -(c+1+(c-a))/(a+1)$, а це значення є додатним.

Лему доведено.

Оскільки ірраціональне число обертання не може зберегтися при збільшенні підняття для всіх w, з леми 4 випливає наступне обмеження (з одного боку) на нахил довільної кривої сталого числа обертання $a = \gamma_{\rho,c}(v)$, $\rho \notin \mathbb{Q}$.

Наслідок 2. *Нехай (a_1, v_1) та (a_2, v_2), $a_2 \neq a_1$, — будь-які дві точки з Φ_c^0 такі, що*

$\rho(a_1, v_1, c) = \rho(a_2, v_2, c) \notin \mathbb{Q}$. *Тоді*

$$\frac{v_2 - v_1}{a_2 - a_1} < -1. \tag{9}$$

Твердження 3. *Нехай стосовно дифеоморфізму зі зламом T виконуються умови теореми 1. Тоді існують такі $C_3 = C_3(T) > 0$ та $n_0 = n_0(T)$, що*

$$\operatorname{dist}\left[(a_*^{(n+1)}, v^{(n+1)}), \mathcal{R}_{c^{(n)}}(a_*^{(n)}, v^{(n)})\right] \le C_3 \lambda^n$$

для всіх $n \ge n_0$, де dist — будь-яка стандартна метрика на площині.

Доведення. Згідно з твердженням 2 значення величин $a^{(n)}$, $c^{(n)} - a^{(n)}$, $a_*^{(n)}$, $c^{(n)} - a_*^{(n)}$ та $v^{(n)}/(c^{(n)} - 1)$ (а також відповідних величин з індексом $n+1$) є додатними, обмеженими і відокремленими від нуля. З (5) випливає, що $b^{(n+1)} = -f_{n+1}(-1) = -g_{n+1}(f_{n+1}(0)) = -g_{n+1}(a^{(n+1)}) = f_n(-a^{(n)}a^{(n+1)})/a^{(n)}$, тому відповідно до оцінки **C)** та (4) виконується оцінка

$$v^{(n+1)} = \frac{c^{(n+1)} - a^{(n+1)}}{f_n(-a^{(n)}a^{(n+1)})/a^{(n)}} - 1 = c^{(n+1)}(1 + a^{(n)}a^{(n+1)}v^{(n)}) - 1 + \mathcal{O}(\lambda^n),$$

а отже і $\dfrac{v^{(n+1)} + 1 - c^{(n+1)}}{c^{(n+1)}a^{(n+1)}} = a^{(n)}v^{(n)} + \mathcal{O}(\lambda^n)$. Нехай $(\bar{a}^{(n+1)}, \bar{v}^{(n+1)}) = \mathcal{R}_{c^{(n)}}(a_*^{(n)}, v^{(n)})$ — ренормалізація розумної проекції. З леми 2 з [1] випливає рівність

$$\frac{\bar{v}^{(n+1)} + 1 - c^{(n+1)}}{c^{(n+1)}\bar{a}^{(n+1)}} = a_*^{(n)}v^{(n)}. \tag{10}$$

Отже, з огляду на твердження 2 дістаємо оцінку

$$\frac{\bar{v}^{(n+1)} + 1 - c^{(n+1)}}{c^{(n+1)}\bar{a}^{(n+1)}} - \frac{v^{(n+1)} + 1 - c^{(n+1)}}{c^{(n+1)}a_*^{(n+1)}} = \mathcal{O}(\lambda^n). \tag{11}$$

Тепер найголовніший — „геометричний” крок доведення. Дві точки $(a_*^{(n+1)}, v^{(n+1)})$ та $(\bar{a}^{(n+1)}, \bar{v}^{(n+1)})$ за побудовою мають одне й те саме число обертання $\rho_{n+1} \notin \mathbb{Q}$. З одного боку, нахил кривої $\gamma_{\rho_{n+1}, c^{(n+1)}}$ задовольняє обмеження $\dfrac{\Delta v}{\Delta a} < -1$ згідно з наслідком 2. З іншого боку, пряма $\dfrac{v - c^{(n+1)} + 1}{c^{(n+1)}a} = \dfrac{\bar{v}^{(n+1)} - c^{(n+1)} + 1}{c^{(n+1)}\bar{a}^{(n+1)}}$ відповідно до (10) має нахил $\dfrac{dv}{da} = \dfrac{\bar{v}^{(n+1)} - c_{n+1} + 1}{\bar{a}^{(n+1)}} = a_*^{(n)}v^{(n)}/c^{(n)} > -1 + \min\{c, 1/c\}$. Нахил прямої $\dfrac{v - c^{(n+1)} + 1}{c^{(n+1)}a} = \dfrac{v^{(n+1)} - c^{(n+1)} + 1}{c^{(n+1)}a_*^{(n+1)}}$ є близьким до нахилу прямої $\dfrac{v - c^{(n+1)} + 1}{c^{(n+1)}a} = \dfrac{\bar{v}^{(n+1)} - c^{(n+1)} + 1}{c^{(n+1)}\bar{a}^{(n+1)}}$ згідно з (11), тому також відокремлений від -1. Таким чином, показано, що обидві згадані прямі є трансверсальними до кривої $\gamma_{\rho_{n+1}, c^{(n+1)}}$ рівномірно відносно n. З цього випливає, що оцінка (11) обумовлює таку ж саму оцінку для точок перетину вказаних прямих із $\gamma_{\rho_{n+1}, c^{(n+1)}}$, що й доводить твердження.

3.5. Оптимальний проектор та його зв'язок з ренорм-оператором. У даному підпункті ми ще додатково підправимо означення розумної проекції ренормалізації (f_n, g_n) дифеоморфізму кола зі зламом T на граничний двовимірний підпростір $\mathfrak{S}_{c^{(n)}}$ дробово-лінійних комутуючих пар і доведемо експоненціальну близькість між проекцією ренормалізації та ренормалізацією проекції для підправленого проектора.

Додаткова підправка проектора полягатиме в тому, щоб обмежити розглядувані пари з $\mathfrak{S}_c$ на абсорбуючу множину $\check{\mathfrak{D}}_c$, саме всередині якої в [1] доведено гіперболічність ренорм-оператора (а вірніше, його другої ітерації $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}_{1/c} \circ \mathcal{R}_c$). Отже, розглянемо множину $\mathfrak{D}_c = \left\{(a, v) : \dfrac{1}{2} \le \dfrac{v}{c-1} \le 1, \dfrac{c(c-v-1)}{v} \le a \le c\right\} \subset \overline{\Phi_c^0}$ (риска над Φ_c^0 позначає замикання), її внутрішність $\dot{\mathfrak{D}}_c$ та підмножину цієї внутрішності $\check{\mathfrak{D}}_c$, яка має вигляд $\left\{(a, v) \in \dot{\mathfrak{D}}_c : av \ge \dfrac{(c-1)^2}{4}\right\}$ у випадку $c > 1$ та $\left\{(a, v) \in \dot{\mathfrak{D}}_c : \dfrac{v+1-c}{a} \ge \dfrac{(1-c)^2}{4c}\right\}$ у випадку $c < 1$.

Зауваження 1. У роботі [1] множини $\check{\mathfrak{D}}_c$ означено трохи інакше, а саме, зі строгими нерівностями $av > \dfrac{(c-1)^2}{4}$ та $\dfrac{v+1-c}{a} > \dfrac{(1-c)^2}{4c}$. Насправді легко переконатися, що заміна строгих нерівностей на нестрогі ніяк не впливає на доведення результатів [1], отже тамтешня теорема про гіперболічність ренорм-оператора є правильною і для щойно розширеного означення множин $\check{\mathfrak{D}}_c$.

Тут ми використаємо ідею доведення твердження 3 ще двічі.

За твердженням 2 для досить великих n маємо $(a_*^{(n-1)}, v^{(n-1)}) \in \Phi^\varepsilon_{c^{(n-1)}}$, $(a_*^{(n)}, v^{(n)}) \in \Phi^\varepsilon_{c^{(n)}}$. З іншого боку, $(\bar{a}^{(n)}, \bar{v}^{(n)}) = \mathcal{R}_{c^{(n-1)}}(a_*^{(n-1)}, v^{(n-1)}) \in \mathfrak{D}_{c^{(n)}}$, тому за твердженням 3 точка $(a_*^{(n)}, v^{(n)})$ лежить в $\mathcal{O}(\lambda^n)$-околі множини $\mathfrak{D}_{c^{(n)}}$. На основі цього факту означимо „ще розумнішу" проекцію $(a_{**}^{(n)}, v_{**}^{(n)})$ таким чином: якщо розумна проекція $(a_*^{(n)}, v^{(n)})$ належить $\mathfrak{D}_{c^{(n)}}$, то покладемо $(a_{**}^{(n)}, v_{**}^{(n)}) = (a_*^{(n)}, v^{(n)})$, а в протилежному випадку означимо $(a_{**}^{(n)}, v_{**}^{(n)})$ як точку перетину кривої сталого числа обертання $a = \gamma_{\rho_n, c^{(n)}}(v)$ з кривою $a = c^{(n)}(c^{(n)} - v - 1)/v$, яка відрізає область $\dot{\mathfrak{D}}_{c^{(n)}}$ від $\Phi^0_{c^{(n)}}$ (з твердження 4 статті [1] випливає, що остання крива є рівномірно трансверсальною до всіх кривих $a = \gamma_{\rho, c^{(n)}}(v)$, $\rho \notin \mathbb{Q}$, тому така точка перетину існує і є єдиною). Згідно з описаною побудовою для досить великих n маємо $(a_{**}^{(n)}, v_{**}^{(n)}) \in \mathfrak{D}_{c^{(n)}} \cap \Phi^\varepsilon_{c^{(n)}}$ (із додатково зменшеним ε), і до того ж $a_*^{(n)} - a_{**}^{(n)} = \mathcal{O}(\lambda^n)$, $v^{(n)} - v_{**}^{(n)} = \mathcal{O}(\lambda^n)$ за вищезгаданою трансверсальністю. Повторюючи міркування з доведення твердження 3, одержуємо аналогічний результат, а саме, $a_{**}^{(n+1)} - \bar{a}_*^{(n+1)} = \mathcal{O}(\lambda^n)$, $v_{**}^{(n+1)} - \bar{v}_*^{(n+1)} = \mathcal{O}(\lambda^n)$, де $(\bar{a}_*^{(n+1)}, \bar{v}_*^{(n+1)}) = \mathcal{R}_{c^{(n)}}(a_{**}^{(n)}, v_{**}^{(n)})$.

Тепер зауважимо, що $(a_{**}^{(n-1)}, v_{**}^{(n-1)}) \in \mathfrak{D}_{c^{(n-1)}} \cap \Phi^\varepsilon_{c^{(n-1)}}$ для досить великих n, тому $(\bar{a}_*^{(n)}, \bar{v}_*^{(n)}) = \mathcal{R}_{c^{(n-1)}}(a_{**}^{(n-1)}, v_{**}^{(n-1)}) \in \check{\mathfrak{D}}_{c^{(n)}}$ (див. твердження 3 статті [1]). Отже, згідно з результатом попереднього абзацу наша „ще розумніша" проекція $(a_{**}^{(n)}, v_{**}^{(n)}) \in \Phi^\varepsilon_{c^{(n)}}$ лежить в $\mathcal{O}(\lambda^n)$-околі області $\check{\mathfrak{D}}_{c_n}$. Нарешті означимо „найрозумнішу" проекцію $(a_{***}^{(n)}, v_{***}^{(n)})$ таким чином: якщо „ще розумніша" проекція $(a_{**}^{(n)}, v_{**}^{(n)})$ належить $\check{\mathfrak{D}}_{c_n}$, то покладемо $(a_{***}^{(n)}, v_{***}^{(n)}) = (a_{**}^{(n)}, v_{**}^{(n)})$, а в протилежному випадку (який може трапитися лише при $c^{(n)} < 1$) означимо $(a_{***}^{(n)}, v_{***}^{(n)})$ як точку перетину кривої сталого числа обертання $a = \gamma_{\rho_n, c^{(n)}}(v)$ з прямою $\dfrac{v+1-c^{(n)}}{a} = \dfrac{(1-c^{(n)})^2}{4c^{(n)}}$, яка відрізає множину $\check{\mathfrak{D}}_{c^{(n)}}$ від $\dot{\mathfrak{D}}_{c^{(n)}}$. З твердження 4 статті [1] випливає, що ця пряма є рівномірно трансверсальною до всіх кривих $a = \gamma_{\rho,c^{(n)}}(v)$, $\rho \notin \mathbb{Q}$, тому така точка перетину існує і є єдиною, до того ж мають місце оцінки $a_{**}^{(n)} - a_{***}^{(n)} = \mathcal{O}(\lambda^n)$, $v_{**}^{(n)} - v_{***}^{(n)} = \mathcal{O}(\lambda^n)$, і згідно з твердженням 1 для досить великих n маємо $(a_{***}^{(n)}, v_{***}^{(n)}) \in \Phi^{\varepsilon}_{c^{(n)}} \cap \check{\mathfrak{D}}_{c^{(n)}}$ (із ще додатково зменшеним ε). Повторивши втретє міркування з доведення твердження 3, одержимо результат, який сформулюємо, означивши нарешті *оптимальний проектор* $\mathcal{P}$ згідно з формулою

$$\mathcal{P}(f_n, g_n) = \mathcal{P} f_n = (a_{***}^{(n)}, v_{***}^{(n)}). \tag{12}$$

Твердження 4. *Нехай стосовно дифеоморфізму зі зламом T виконуються умови теореми 1. Тоді існують такі $\varepsilon = \varepsilon(T) > 0$, $C_4 = C_4(T) > 0$ та $n_0 = n_0(T)$, що для всіх $n \geq n_0$ має місце включення $\mathcal{P} f_{n+1} \in \Phi^{\varepsilon}_{c^{(n+1)}} \cap \check{\mathfrak{D}}_{c^{(n+1)}}$ і виконується оцінка*

$$\operatorname{dist}[\mathcal{P} f_{n+1}, \mathcal{R}_{c^{(n)}} \mathcal{P} f_n] \leq C_4 \lambda^n.$$

Зауваження 2. Формула (12) визначає проектор $\mathcal{P}$ лише на ренормалізаціях (f_n, g_n) дифеоморфізму кола зі зламом з ірраціональним числом обертання, та ще й при досить великих n. Але якщо згадати, що характеристики $a^{(n)}$, $v^{(n)}$ обчислюються безпосередньо за f_n, то зрозуміло, що фактично проектор $\mathcal{P}$ було означено для довільної пари $(F, G) \in \mathfrak{S}_c^{2+\alpha} \cap \mathfrak{R}$, характеристики якої $a = F(0)$, $v = (c - a - b)/b$, де $b = -F(-1)$, задовольняють обмеження $(a, v) \in \Phi_c^0$. Насправді, зроблене трикрокове означення можна поширити на весь простір $\mathfrak{S}_c^{2+\alpha}$. Але оскільки нас цікавлять лише граничні властивості послідовності ренормалізацій (f_n, g_n), то ми тут цього не робитимемо.

3.6. Доведення зближення ренормалізацій. У роботі [1] було доведено наступний результат щодо гіперболічності оператора ренормалізації на граничному просторі $\mathfrak{S}_c$: для кожного $0 < c \neq 1$ існує така константа $\mu_c \in (0, 1)$ (до того ж $\mu_c = \mu_{1/c}$, на що вказано в доведенні цієї теореми), що для будь-яких двох точок $(a, v), (\tilde{a}, \tilde{v}) \in \check{\mathfrak{D}}_c$ з одним і тим самим числом обертання $\rho(a, v, c) = \rho(\tilde{a}, \tilde{v}, c) \notin \mathbb{Q}$ виконується нерівність

$$\mathbf{d}_c[\mathcal{R}^2(a, v), \mathcal{R}^2(\tilde{a}, \tilde{v})] \leq \mu_c \, \mathbf{d}_c[(a, v), (\tilde{a}, \tilde{v})], \tag{13}$$

в якій метрика $\mathbf{d}_c$ на $\check{\mathfrak{D}}_c$ задається формулою

$$\mathbf{d}_c[(a, v), (\tilde{a}, \tilde{v})] = |x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|,$$

де $x = av$, $y = \dfrac{v + 1 - c}{ca}$.

Крім цього, існує C^2-метрика, що задає відстань між точками $(a, v), (\tilde{a}, \tilde{v}) \in \mathfrak{S}_c$ як $\|F_{a,v,c} - F_{\tilde{a},\tilde{v},c}\|_2$.

Лема 5. *Для фіксованих $\varepsilon > 0$ та $0 < c \neq 1$ метрики dist та C^2 на множині Φ_c^{ε} є еквівалентними; а на множині $\check{\mathfrak{D}}_c \cap \Phi_c^{\varepsilon}$ вони еквівалентні й метриці $\mathbf{d}_c$.*

Доведення. Еквівалентність метрик C^2 та dist на Φ_c^{ε} випливає з формул

$$a = F_{a,v,c}(0), \quad v = \frac{(F'_{a,v,c}(0) - c)}{a},$$

$$F_{a,v,c}(x) - F_{\tilde{a},\tilde{v},c}(x) = (a-\tilde{a})\frac{1}{1-\tilde{v}x} + (v-\tilde{v})\frac{x(a+cx)}{(1-\tilde{v}x)(1-vx)}, \quad x \in [-1,0],$$

а еквівалентність метрик dist та $\mathbf{d}_c$ на $\check{\mathfrak{D}}_c \cap \Phi_c^{\varepsilon}$ — з формул

$$x = av, \quad y = \frac{v+1-c}{ca},$$

$$a = \frac{c-1}{2cy}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4cxy}{(c-1)^2}}\right), \quad v = \frac{c-1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4cxy}{(c-1)^2}}\right),$$

звичайно ж з урахуванням конфігурації множин Φ_c^{ε} та $\check{\mathfrak{D}}_c \cap \Phi_c^{\varepsilon}$ (з якої, зокрема, випливає відокремленість від нуля підкореневих виразів та y).

Твердження 5. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існують такі сталі* $C_{\mathrm{ren}} = C_{\mathrm{ren}}(T,\tilde{T}) > 0$ *та* $\lambda_{\mathrm{ren}} = \lambda_{\mathrm{ren}}(T,\tilde{T}) \in (0,1)$, *що* $\|f_n - \tilde{f}_n\|_2 \le C_{\mathrm{ren}}\lambda_{\mathrm{ren}}^n$ *для всіх* $n \ge 1$.

Доведення. Внаслідок оцінки **C**) та леми 5 маємо

$$\|f_n - \tilde{f}_n\|_2 = \mathcal{O}\left(\lambda^n + \mathbf{d}_{c^{(n)}}[(a^{(n)}, v^{(n)}), (\tilde{a}^{(n)}, \tilde{v}^{(n)})]\right).$$

З оцінки (13), твердження 4 та леми 5 випливає (з певним $C = C(T,\tilde{T}) > 0$), що

$$\mathbf{d}_{c^{(n)}}[\mathcal{P}f_n, \mathcal{P}\tilde{f}_n] = \mathbf{d}_{c^{(n)}}[\mathcal{P}\mathcal{R}^2(f_{n-2}, g_{n-2}), \mathcal{P}\mathcal{R}^2(\tilde{f}_{n-2}, \tilde{g}_{n-2})] \le \mu_c \mathbf{d}_{c^{(n)}}[\mathcal{P}f_{n-2}, \mathcal{P}\tilde{f}_{n-2}] + C\lambda^n.$$

Індуктивно продовжуючи (телескопуючи) останню нерівність, одержуємо $\mathbf{d}_{c^{(n)}}[\mathcal{P}f_n, \mathcal{P}\tilde{f}_n] = \mathcal{O}\left(\sum_{i=0}^{n/2} \mu_c^i \lambda^{n-2i}\right)$, що становить $\mathcal{O}(\lambda_{\mathrm{ren}}^n)$ для будь-якого $\lambda_{\mathrm{ren}} > \max\{\lambda, \sqrt{\mu_c}\}$.

Твердження доведено.

4. Доведення теореми 1. Твердження теореми 1 виводиться шляхом перевірки виконання умов умовної теореми, яку сформульовано у підпункті 2.2.

Умова 1 належить до умов теореми 1.

Для перевірки умови 2 необхідно показати рівномірне відносно n виконання оцінок i) – iv) з підпункту 2.2. Першу з них доведено в [6], три наступні випливають з оцінки **C**), твердження 1 та явного вигляду дробово-лінійних функцій (4).

Умова 3 випливає з оцінки **A**), як це пояснено у [8].

Умова 4 є твердженням 5.

Таким чином, теорему 1 повністю доведено.

1. *Теплінський О. Ю.* Гіперболічна підкова для дифеоморфізмів кола зі зламом // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 1. — С. 112 – 127.
2. *Теплинский А. Ю., Ханин К. М.* Жесткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями // Успехи мат. наук. — 2004. — **59**, № 2. — С. 137 – 160.
3. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М.: Физматиз, 1960. — 112 с.
4. *Khanin K., Teplinsky A.* Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities // Invent. math. — 2007. — **169**, № 1. — P. 193 – 218.
5. *Khanin K. M., Vul E. B.* Circle homeomorphisms with weak discontinuities // Proc. „Dynamical Systems and Statistical Mechanics" (Moscow, 1991). — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. — P. 57 – 98.

6. *Теплінський О. Ю.* Обмеженість ренормалізацій дифеоморфізмів кола зі зламом // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика, механіка. — 2008. — **13**, вип. 18. — С. 111 – 116.

7. *Khanin K., Khmelev D.* Renormalizations and rigidity theory for circle homeomorphisms with singularities of break type // Communs Math. Phys. — 2003. — **235**, № 1. — P. 69 – 124.

8. *Синай Я. Г., Ханин К. М.* Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами // Успехи мат. наук. — 1989. — **44**, № 1. — С. 57 – 82.

Одержано 15.09.09