УДК 517.91

ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭРОЗИИ*

Д. А. Куликов

Ярослав. гос. ун-т им. П. Г. Демидова
e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

We consider a nonlinear partial differential equation with deviating (transformed) spatial variable. This equation serves as a mathematical model of a relief formation on the surface of a plate undergoing an ionic bombardment. We study a periodic boundary-value problem, and propose a machinery for forming a ripple nanorelief as on outcome of loss of stability of the flat relief. The ripple relief is found as a solution of a bifurcation problem that is studied using the theory of normal forms and the method of invariant manifolds. For solutions that describe the ripple nanorelief, we give asymptotic formulas.

Розглядається нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними і відхильною (перетвореною) просторовою змінною. Дане рівняння є однією з математичних моделей формування рельєфу на поверхні пластини під дією потоку іонів. Вивчається періодична крайова задача. Запропоновано механізм формулювання хвильового нанорельєфу як результат втрати стійкості плоского рельєф. Хвильовий рельєф знаходиться в результаті розв'язання біфуркаційних задач, для дослідження яких використано апарат теорії нормальних форм, метод інваріантних многовидів. Для розв'язків, що описують хвильовий нанорельєф, наведено асимптотичні формули.

Введение. В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с отклоняющимся пространственным аргументом, которое моделирует процесс формирования нанорельефа при бомбардировке плоской поверхности мишени потоком ионов. Данный технологический процесс имеет широкое применение в микро- и наноэлектронике. Большинство математических моделей этого физического явления базируются на теории, предложенной в работах П. Зигмунда (см., например, [1]). Наиболее известной из них следует считать математическую модель, которую предложили Бредли и Харпер (см., например, [2]). Основу этой модели составляет уравнение с частными производными (уравнение Бредли – Харпера), которое иногда называют обобщенным уравнением Курамото – Сивашинского [3, 4]. Действительно, во многих случаях уравнение Бредли – Харпера удается свести к уравнению Курамото – Сивашинского, которое широко известно как математическая модель для ряда задач химической кинетики и гидродинамики. Уравнение, которое будет рассмотрено ниже, появилось в работе [5] с целью уточнения некоторых аспектов при описании формирования неоднородного рельефа. Неоднократно отмечалось, что уравнение Бредли – Харпера неприменимо для описания возмущений, имеющих порядок нанометров ($\sim 10^{-9}$ м). Данная работа посвящена изучению периодической краевой задачи для альтернативной модели, которую называют нелокальным уравнением эрозии [5 – 7].

* Выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК-2298.2013.1), а также гранта Российского фонда фундаментальных исследований — 14-01-31159 мол_а.

Итак, будем изучать краевую задачу

$$u_t = au_{xx} - cw_x + u - w + b_1(u-w)w_x + b_2w_x^2 + b_3(u-w)w_x^2, \tag{0.1}$$

$$u(t, x+2\pi) = u(t, x), \tag{0.2}$$

где $u = u(t,x)$ — нормированное отклонение от плоского фронта при обработке мишени, $w = w(t,x) = u(t, x-h)$, $h \in R$, $h > 0$. Коэффициенты a, c, b_1, b_2, b_3 характеризуют условия, при которых происходит данный технологический процесс. Все они зависят от угла Θ между направляющей потока ионов и нормалью к недеформированной поверхности. Положительный коэффициент a зависит от интенсивности потока ионов J. Добавим, что $a = a(J, \Theta)$ и при фиксированном Θ данная функция убывает при возрастании J. Наконец, $c > 0$, а знак остальных коэффициентов произволен.

Отметим, что краевая задача (0.1), (0.2) допускает решения вида $u(t,x) = \mathrm{const}$. Более того, эта краевая задача инвариантна относительно замены $u \to u + \mathrm{const}$. С физической точки зрения два последних замечания означают, что систему координат, в которой моделируется отклонение от плоского профиля $u = \mathrm{const}$, можно выбрать удобным образом. В дальнейшем будем считать, что однородное состояние равновесия, которое рассмотрено в начальный момент технологического процесса, задано уравнением $u = 0$ $(\mathrm{const} = 0)$.

Дополним краевую задачу (0.1), (0.2) начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \tag{0.3}$$

Будем считать, что $f(x)$ принадлежит $Q_2(\delta)$ — достаточно малому шару гильбертова пространства H_2^2. Из работ [8, 9] следует, что смешанная краевая задача (0.1) – (0.3) локально корректно разрешима. Через H_2^2 обозначено пространство Соболева 2π-периодических функций $f(x)$, которые имеют обобщенные производные $f'(x), f''(x) \in L_2(0; 2\pi)$.

1. Устойчивость состояний равновесия. Для исследования устойчивости нулевого решения рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая возникает после линеаризации задачи (0.1), (0.2) в окрестности тривиального состояния равновесия. В результате получим краевую задачу

$$u_t = A(a,c)u, \quad u(t, x+2\pi) = u(t,x), \tag{1.1}$$

где $A(a,c)$ — линейный дифференциальный оператор (ЛДО), определенный на достаточно гладких 2π-периодических функциях переменной x равенством

$$A(a,c)v(x) = av'' - cv_h' + v - v_h, \quad v_h = v(x-h).$$

В силу полноты семейства функций $\{\exp(inx)\}$ в пространстве $L_2(0; 2\pi)$ собственные значения (СЗ) ЛДО $A(a,c)$ определяются равенством

$$\lambda_n = \lambda_n(a,c) = \tau_n \pm i\sigma_n, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{1.2}$$

где $\tau_n = -an^2 - cn\sin nh + 1 - \cos nh$, $\sigma_n = -cn\cos nh + \sin nh$.

Отсюда, в частности, следует (см. формулу (1.2)), что:

(i) $\lim_{n\to\infty}\tau_n = -\infty$;

(ii) существует такая положительная постоянная M, что выполняется неравенство

$$|\sigma_n| \le M|\tau_n|, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots .$$

Данное свойство СЗ, а также полнота собственных элементов оператора $A(a,c)$ дают основание [9, с. 51 – 58, 92 – 96] сформулировать следующее утверждение.

Лемма 1.1. *ЛДО $A(a,c)$ является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в пространстве 2π-периодических и интегрируемых с квадратом на $(0;2\pi)$ функций.*

Краевую задачу (1.1) можно интерпретировать как абстрактное параболическое уравнение в соответствующем функциональном пространстве. Последнее замечание является дополнением к ссылкам в конце предыдущего пункта, относящимся к вопросу о локальной разрешимости уже нелинейной смешанной задачи (0.1) – (0.3) (см. [8], а также [9, с. 92 – 96]).

Отметим, что при любом выборе h выполнено равенство $\lambda_0 = 0$. Данному СЗ соответствует собственная функция (СФ) $e_0(x) = 1$. Расположение остальных СЗ у ЛДО $A(a,c)$ зависит, конечно, от a и c, а также от h. При детальном анализе спектра устойчивости будем считать, что $h = \pi/4$.

Рассмотрим линейную краевую задачу (1.1). Пусть для всех ее СЗ λ_n, $n \ne 0$, выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}\lambda_n \le 0, \tag{1.3}$$

тогда ее решения устойчивы. Строгое неравенство $\operatorname{Re}\lambda_n < 0$ не дает основания считать, что решения асимптотически устойчивы, так как всегда есть СЗ $\lambda_0 = 0$. Наконец, если существует такое СЗ λ_k, что $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$, то ее решения неустойчивы.

В случае выбора $h = \pi/4$ условия устойчивости (неустойчивости) можно записать в терминах коэффициентов ЛДО $A(a,c)$. В таком случае для $\lambda_n = \tau_n + i\sigma_n$ получаем равенства

$$\tau_n = -an^2 - cn\sin\frac{\pi}{4}n + 1 - \cos\frac{\pi}{4}n, \quad \sigma_n = -cn\cos\frac{\pi}{4}n + \sin\frac{\pi}{4}n, \quad n \ne 0.$$

Очевидно, что в рассматриваемом варианте для τ_n выполнено неравенство (1.3), если a достаточно велико. Напротив, при $a = 0$ обязательно найдется такое $n = n_0$, при котором выполнено $\operatorname{Re}\lambda_{n_0} > 0$. Например, $\tau_6 = 6c + 1 > 0$. Ясно, что $\lim_{n\to\infty}\tau_n = -\infty$ вне зависимости от выбора a и c. Поэтому при $a \ge a_{\text{кр}} > 0$ реализуется условие (1.3), где

$$a_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}(c) = \max_{n\ne0} b_n, \quad b_n = \frac{-cn\sin\dfrac{\pi n}{4} + 1 - \cos\dfrac{\pi n}{4}}{n^2},$$

если такой положительный максимум существует. Можно в принципе рассматривать лишь натуральные n, так как $b_{-m} = b_m$. Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad n \in N.$$

Предельное равенство, очевидно, гарантирует существование $a_{\text{кр}}$, так как, например, $b_5 > 0$ при всех c.

Рассмотрим восемь подпоследовательностей последовательности $b_m (b_m = b_m(n,k))$, где $m = 8(n-1)+k, k = 0,1,\ldots,7, n = 1,2,\ldots$.

Пусть $a_k = \max_{n\in N} b_n(k)$. Тогда $a_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}(c) = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_7\}$. Относительно громоздкие, но простые вычисления показали, что

$$a_0 = 0, \quad a_1 = b_1(1) = \frac{2-\sqrt{2}-c\sqrt{2}}{2}, \quad a_2 = b_1(2) = \frac{1-2c}{4},$$

$$a_3 = b_1(3) = \frac{2+\sqrt{2}-3\sqrt{2}c}{18}, \quad a_4 = b_1(4) = \frac{1}{8}, \quad a_5 = b_1(5) = \frac{2+\sqrt{2}+5\sqrt{2}c}{50},$$

$$a_6 = b_1(6) = \frac{1+6c}{36}, \quad a_7 = b_1(7) = \frac{7\sqrt{2}c+2-\sqrt{2}}{98}$$

и выбор $a_{\text{кр}}$ существенно зависит от c. Так, при $c \in (0;c_1)$ $a_{\text{кр}} = a_1$, а $c_1 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. Наконец,

$$a_{\text{кр}} = a_2 = \frac{1-2c}{4} \quad \text{при} \quad c \in (c_1;c_2), \quad c_2 = \frac{5\sqrt{2}-4}{18\sqrt{2}-12},$$

$$a_{\text{кр}} = a_3 = \frac{2+\sqrt{2}-3\sqrt{2}c}{18} \quad \text{при} \quad c \in (c_2;c_3), \quad c_3 = \frac{8-\sqrt{2}}{24},$$

$$a_{\text{кр}} = a_4 = \frac{1}{8} \quad \text{при} \quad c \in (c_3;c_4), \quad c_4 = \frac{17-4\sqrt{2}}{20\sqrt{2}},$$

$$a_{\text{кр}} = a_5 = \frac{5\sqrt{2}c+2+\sqrt{2}}{50} \quad \text{при} \quad c \in (c_4;c_5), \quad c_5 = \frac{11+18\sqrt{2}}{150-90\sqrt{2}},$$

а при $c > c_5$ выполнено условие $a_{\text{кр}} = a_6 = \dfrac{1+6c}{36}$. Добавим также, что $0 < c_1 < c_2 < < c_3 < c_4 < c_5$, а также справедливы равенства $a_1 = a_2$ при $c = c_1$, $a_2 = a_3$ при $c = c_2$, $a_3 = a_4$ при $c = c_3$, $a_4 = a_5$ при $c = c_4$, $a_5 = a_6$ при $c = c_5$.

Пусть $c \in I_j$, где $I_j = (c_{j-1};c_j)$, $j = 1,2,3,4,5,6$, $c_0 = 0$, $c_6 = \infty$. Тогда ЛДО $A(a,c)$ при $a = a_j$ $(a_{\text{кр}} = a_j)$ имеет СЗ

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_j = i\sigma_j, \quad \overline{\lambda}_j = -i\sigma_j, \quad \sigma_j = -cj\cos\frac{\pi j}{4} + \sin\frac{\pi j}{4}.$$

Им соответствует СФ $e_0(x) = 1$, $e_j(x) = \exp(ijx)$, $\bar{e}_j(x) = \exp(-ijx)$ соответственно. Остальные СЗ ЛДО $A_j(c) = A(a_{\text{кр}},c) = A(a_j,c)$ лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$\operatorname{Re}\lambda_p \le -\gamma < 0, \quad p \ne 0, j, \tag{1.4}$$

где $\gamma = \text{const} > 0$.

Такой критический случай будем называть критическим случаем первого типа. В иной терминологии — это критический случай коразмерности 1, так как он реализуется за счет выбора одного параметра.

При $c = c_j$ ($a_{\text{кр}} = a_j = a_{j+1}$), $j = 1, 2, 3, 4, 5$, реализуется критический случай второго типа, случай коразмерности 2. Он реализуется за счет выбора уже двух параметров. В этом случае у ЛДО $A_j = A(a_{\text{кр}}, c_j) = A(a_j, c_j) = A(a_{j+1}, c_j)$ на мнимой оси находятся 5 СЗ

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_j = i\sigma_j, \quad \overline{\lambda}_j = -i\sigma_j, \quad \lambda_{j+1} = i\sigma_{j+1}, \quad \overline{\lambda}_{j+1} = -i\sigma_{j+1},$$

$$\sigma_j = -cj\cos\frac{\pi}{4}\,j + \sin\frac{\pi}{4}\,j, \quad \sigma_{j+1} = -c(j+1)\cos\frac{\pi}{4}\,(j+1) + \sin\frac{\pi}{4}\,(j+1),$$

а соответствующие СФ имеют вид

$$e_0(x) = 1, \quad e_j(x) = \exp(ijx), \quad \overline{e}_j = \exp(-ijx),$$

$$e_{j+1}(x) = \exp(i(j+1)x), \quad \overline{e}_{j+1}(x) = \exp(-i(j+1)x).$$

Для $p \neq 0, j, j+1$ выполнены неравенства (1.4). Бифуркационные задачи для нелинейной краевой задачи (0.1), (0.2) рассмотрим в следующем пункте. Они возникают, если $a = a_{\text{кр}} + \Delta$, $|\Delta| << 1$.

Если $aa_{\text{кр}}$, то нелинейная краевая задача (0.1), (0.2) имеет одномерное инвариантное (центральное) многообразие, так как СЗ $\lambda_0 = 0$, а для остальных λ_n, $n \neq 0$, выполнено неравенство (1.3). В рассматриваемом случае оно составлено из решений вида $u(t, x) = \text{const}$. Это многообразие экспоненциально устойчиво в том смысле, что все его решения нелинейной краевой задачи (0.1), (0.2) из достаточно малой окрестности одномерного инвариантного многообразия, состоящего из однородных состояний равновесия, стремятся к нему со скоростью экспоненты [10–12].

Это дает основание сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть $a < a_{\text{кр}}$, тогда все однородные состояния равновесия нелинейной краевой задачи (0.1), (0.2) устойчивы по Ляпунову в норме фазового пространства ее решений.*

Замечание 1.1. Состояния равновесия могут быть устойчивыми, неустойчивыми, но случай, когда они асимптотически устойчивы, в рассматриваемой краевой задаче не может быть реализован.

2. Бифуркации пространственно-неоднородных решений. Случай коразмерности 1. Пусть $c \in I_j$ и, следовательно, реализуется первый критический случай в задаче об устойчивости. В частности, $a = a_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Положим

$$a = a_j(1 - \varepsilon\beta), \quad \beta = \pm 1.$$

Тогда ЛДО $A_j(\varepsilon) = A(a_j(1 - \beta\varepsilon), c)$ имеет СЗ

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_j(\varepsilon) = \tau_j(\varepsilon) + i\sigma_j(\varepsilon), \quad \overline{\lambda}_j(\varepsilon) = \tau_j(\varepsilon) - i\sigma_j(\varepsilon), \quad \tau_j(\varepsilon) = \beta\varepsilon, \quad \sigma_j(\varepsilon) \equiv \sigma_j.$$

Следовательно, реализуется случай, близкий к критичному ($\tau_j(0) = 0$). Здесь ε — малый неотрицательный параметр, при $\beta = 1$ два СЗ при возрастании ε переходят в правую полуплоскость, а при $\beta = -1$ имеет место противоположный вариант, когда при возрастании ε пара чисто мнимых корней переходят в левую полуплоскость. Возникшая ситуация близка к условиям теоремы Андронова – Хопфа, но всегда существует СЗ $\lambda_0 = 0$. Поэтому далее для исследования бифуркационной задачи

$$u_t = A_k(\varepsilon)u + F_2(u) + F_3(u), \tag{2.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x) \tag{2.2}$$

используем метод инвариантных многообразий в сочетании с методом нормальных форм. В формулах (2.1), (2.2) $k = 1, \ldots, 6$,

$$F_2(u) = b_1(u - w)w_x + b_2 w_x^2,$$

$$F_3(u) = b_3(u - w)w_x^2, \quad w(t, x) = u(t, x - h) = u\left(t, x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Известно, что при $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$ эволюционная краевая задача (2.1), (2.2) имеет трехмерное устойчивое инвариантное многообразие $M_3(\varepsilon)$ и динамику решений, принадлежащих $M_3(\varepsilon)$, определяют решения вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальная форма. Для ее построения будет использован модифицированный вариант известного алгоритма Крылова – Боголюбова (см., например, [13, 14]).

Решения краевой задачи (2.1), (2.2) при $c \in (c_{k-1}; c_k)$, $k = 1, \ldots, 6$, $c_0 = 0$, $c_6 = \infty$, будем искать в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t, s, x) + \varepsilon u_2(t, s, x) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, s, x) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{2.3}$$

где $s = \varepsilon t$ — медленное время, достаточно гладкие по совокупности переменных функции u_1, u_2, u_3 имеют также следующие свойства:

i) удовлетворяют краевым условиям (2.2);

ii) по переменной t имеют период $2\pi/\sigma_k$;

iii) при фиксированных t и s функции $u_j(t, s, x)$ принадлежат H_2^2 (фазовому пространству краевой задачи (2.1), (2.2)).

Положим также

$$u_1(t, s, x) = z(s)\exp(i\sigma_k t + ikx) + \overline{z}(s)\exp(-i\sigma_k t - ikx).$$

Отметим, что действительная функция $\psi(s)$ и комплексные функции $\overline{z}(s)$, $z(s)$ удовлетворяют системе уравнений (нормальной форме)

$$\begin{aligned} \psi' &= g_0(\psi, z, \overline{z}) + G_0(\psi, z, \overline{z}, \varepsilon), \\ z' &= g_1(\psi, z, \overline{z}) + G_1(\psi, z, \overline{z}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где g_0, g_1, G_0, G_1 — достаточно гладкие функции. При этом

$$G_0(\psi, z, \overline{z}, 0) = G_1(\psi, z, \overline{z}, 0) = 0.$$

Правая часть уравнения (2.1) инвариантна относительно замены $u \longrightarrow u + \psi$. Поэтому правые части системы дифференциальных уравнений (2.4) не зависят от ψ. Запишем теперь главную часть системы (2.4):

$$\begin{aligned} \psi' &= g_0(z, \overline{z}), \\ z' &= g_1(z, \overline{z}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

В системах (2.4), (2.5) можно, в принципе, добавить третье уравнение для $\overline{z}(s)$, комплексно-сопряженное ко второму. Наконец, $\psi' = \dfrac{d\psi}{ds}$, $z' = \dfrac{dz}{ds}$. При реализации алгоритма построения главной части нормальной формы (2.5) будем считать, что справедливы равенства

$$M_0(u_j) = \frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi/\sigma_k} \int\limits_0^{2\pi} u_j \, dx \, dt \equiv 0,$$

$$M_{\pm 1}(u_j) = \frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi/\sigma_k} \int\limits_0^{2\pi} u_j \exp(\pm i\sigma_k t \pm ikx) \, dx \, dt \equiv 0, \quad j = 2, 3.$$

Замечание 2.1. Рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$u_t = A_k(0)u + F(t, x), \tag{2.6}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2.7}$$

где достаточно гладкая функция $F(t, x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям (2.7), по переменной t имеет период $2\pi/\sigma_k$. Тогда выполнение равенств

$$M_0(F) = M_{\pm 1}(F) = 0$$

является условием разрешимости неоднородной краевой задачи (2.6), (2.7) в классе t-периодических функций с периодом $2\pi/\sigma_k$. Равенства

$$M_0(u_j) = M_{\pm 1}(u_j) = 0$$

выделяют одно такое решение.

Для того чтобы определить правые части нормальной формы (2.5), подставим сумму (2.3) в краевую задачу (2.1), (2.2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях

$\varepsilon^{1/2}$. В результате получим две неоднородные краевые задачи для определения функций u_2, u_3.

Для определения u_2 имеем краевую задачу

$$u_{2t} - A_k(0)u_2 = b_1(u_1 - w_1)w_{1x} + b_2 w_{1x}^2 - \psi'(s), \tag{2.8}$$

$$u_2(t, s, x + 2\pi) = u_2(t, s, x), \tag{2.9}$$

где $w_1 = w_1(t, s, x) = u_1\left(t, s, x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Наконец,

$$u_{3t} - A_k(0)u_3 = b_3 w_{1x}^2(u_1 - w_1) + 2b_2 w_{1x} w_{2x} + b_1\{(u_1 - w_1)w_{2x} + (u_2 - w_2)w_{1x}\} -$$

$$- z' \exp(i\sigma_k t + ikx) - \overline{z'} \exp(-i\sigma_k t - ikx), \tag{2.10}$$

$$u_3(t, s, x + 2\pi) = u_3(t, s, x), \tag{2.11}$$

где $w_2 = w_2(t, s, x) = u_2\left(t, s, x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

При анализе обеих вспомогательных краевых задач (2.8), (2.9) и (2.10), (2.11) медленное время s рассматривается как параметр. Из условий их разрешимости в классе t-периодических функций следует, что

$$\psi' = (2b_1 k Q_2 + 2b_2 k^2) z\overline{z},$$

где $Q_2 = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}k\right)$. Периодические решения по переменной t с нулевым средним следует искать в виде

$$u_2(t, s, x) = z^2 \eta \exp(2i\sigma_k + 2ikx) + \overline{z}^2 \overline{\eta} \exp(-2i\sigma_k - 2ikx), \tag{2.12}$$

где комплексные амплитуды $\eta, \overline{\eta}$ в равенстве (2.12) определяются как решения алгебраического уравнения

$$\gamma_k \eta = \Theta_k. \tag{2.13}$$

Здесь $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, $\eta_1, \eta_2 \in R$, $\Theta_k = ikb_1(1 - Q)Q - b_2 k^2 Q^2$, $Q = \exp\left(-i\dfrac{\pi}{4}k\right) = Q_1 - iQ_2$, $\gamma_k = 2i\sigma_k + 4a_k k^2 - 2cikQ^2 + (1 - Q^2)$.

Напомним, что постоянные σ_k, a_k были определены в явном виде. Это позволяет утверждать, что $\gamma_k \neq 0$ и, следовательно, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ находится однозначно как решение линейного алгебраического уравнения (2.13).

Из условий разрешимости краевой задачи (2.10), (2.11) в классе $2\pi/\sigma_k$-периодических по t функций находим

$$g_1(z, \overline{z}) = a_k \beta k^2 z - (l_1 + il_2) z|z|^2,$$

$$l_1 + il_2 = -3ik^3 b_3 Q + 2b_2 k^2 Q\eta + ib_1 k\eta(1 + Q - 2Q^2).$$

Отметим, что $l_1 = l_1(k)$, $l_2 = l_2(k)$, т. е., конечно, эти коэффициенты и a_k зависят от номера выбранного интервала I_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Более конкретные результаты вычислений будут приведены ниже в отдельности для каждого интервала.

Рассмотрим теперь нормальную форму более детально и положим

$$z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s)).$$

В результате нормальная форма (2.5) примет вид

$$\psi' = 2k(b_1Q_2 + kb_2)\rho^2, \quad \varphi' = -l_2(k)\rho^2, \tag{2.14}$$

$$\rho' = \alpha_k\rho - l_1(k)\rho^3, \quad \alpha = a_k\beta k^2. \tag{2.15}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.14), (2.15) состоит из трех уравнений, причем определяющую роль играет уравнение (2.15). Решение двух первых уравнений (2.14) восстановится после рассмотрения уравнения (2.15). Стандартно доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Уравнение (2.15) имеет нетривиальное состояние равновесия S_0, которое может быть задано равенством*

$$\rho = \rho_0 = \sqrt{\frac{\alpha_k}{l_1(k)}},$$

если $\alpha_k l_1(k) > 0$. Оно асимптотически устойчиво, если $l_1(k) > 0$ $(\alpha_k > 0)$, и наоборот, неустойчиво, если $l_1(k) < 0$ $(\alpha_k < 0)$.

Отметим, что при $\alpha_k < 0$ асимптотически устойчиво нулевое состояние равновесия уравнения (2.15). Наконец, $\operatorname{sign}(\alpha_k) = \operatorname{sign}(\beta)$.

Если теперь последовательно перейти к системе (2.14), (2.15), а затем к основной системе (2.5), то состоянию равновесия S_0 будет соответствовать семейство решений P_2 („периодических решений второго рода”)

$$\psi(s) = \delta_k s + \psi_0, \quad z(s) = \rho_0\exp(i\omega_k s + i\varphi_0) + \rho_0\exp(-i\omega_k s - i\varphi_0),$$

где $\varphi_0, \psi_0 \in R$, $\omega_k = -l_2(k)\rho_0^2$, $\delta_k = 2k(b_1Q_2 + kb_2)\rho_0^2$. Каждое из решений двупараметрического семейства решений $P_2 = P_2(\varphi_0, \psi_0)$ устойчиво, если состояние равновесия S_0 уравнения (2.15) асимптотически устойчиво, и неустойчиво при неустойчивости S_0.

Из леммы 2.1 и следствий из нее вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Семейству решений $P_2(\varphi_0, \psi_0)(S_0)$ нормальной формы (2.5) соответствует двумерное интегральное многообразие $M_2(\varepsilon) \subset M_3(\varepsilon)$, для решений на котором справедлива асимптотическая формула*

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(t, \varepsilon) + v(t, x, \varepsilon) + \psi_0,$$

$$\psi(t, \varepsilon) = [\delta_k\varepsilon + o(\varepsilon)]t, \tag{2.16}$$

$$v(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\rho_0[\exp(i(\sigma_k+\varepsilon\omega_k)t+ikx+i\varphi_0)+\exp(-i(\sigma_k+\varepsilon\omega_k)t-ikx-i\varphi_0)]+$$
$$+\varepsilon\rho_0^2[\eta\exp(2i(\sigma_k+\varepsilon\omega_k)t+2ikx+2i\varphi_0)+$$
$$+\overline{\eta}\exp(-2i(\sigma_k+\varepsilon\omega_k)t-2ikx-2i\varphi_0)]+o(\varepsilon).$$

Решения двупараметрического семейства (2.16) наследуют устойчивость семейства решений $P_2(\varphi_0,\psi_0)$.

Доказательство теоремы практически дословно повторяет соответствующие моменты из доказательства аналогичной теоремы в случае уравнения Бредли – Харпера [13] и основано на результатах и методике, изложенных в работах [13 – 16]. Основным моментом обоснования следует считать теорему о сохранении инвариантных торов при малых возмущениях [16].

Из формулировок предшествующих утверждений данного пункта видно, что центральную роль играет величина $l_1(k)$, которая традиционно называется первой ляпуновской величиной. При этом еще более важную роль играет скорее ее знак, который зависит от многих факторов, в частности от номера k интервала I_k для коэффициента c, а также b_1, b_2, b_3. Например, если $k=6$, $c\in(c_5,\infty)$ и это наиболее широкий интервал изменения коэффициента $c(c_5\approx 1,6)$, то $Q=i(Q^2=-1)$ и достаточно простые, но громоздкие вычисления показывают, что

$$l_1(6)=108\left[b_3+\frac{b_1^2c+b_1b_2(1-6c)-12b_2^2(1+6c)}{90c^2+18c+1}\right].$$

Отметим, что $l_1(6)$ может в принципе иметь любой знак. Если c достаточно велико, то главную роль играет b_3 и поэтому его знак и определяет знак $l_1(6)$. Наоборот, если $|b_3|$ достаточно мал, то знак $l_1(6)$ определяет второе слагаемое в правой части, числитель которого при всех $c>1,6$ — знакопеременная квадратичная форма.

Аналогичная ситуация реализуется и при всех остальных k. Например,

$$l_1(2)=4\left[3b_3+\frac{(b_1+4b_2)(b_2(2c-1)-b_1c)}{10c^2-6c+1}\right]$$

и ее знак следует рассматривать при $c\in I_2=\left\{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2};\dfrac{5\sqrt{2}-4}{18\sqrt{2}-12}\right\}$. Ясно, что, как и в предыдущем случае, знак $l_1(2)$ относительно произволен в силу большой степени свободы при выборе коэффициентов задачи (коэффициентов b_j).

При $k=1,3,4,5$ формулы, полученные в пунктах 1, 2, можно упростить и вычислить $l_1(k)$ при указанных k. В целом результаты этих вычислений аналогичны: ляпуновская величина $l_1(k)$ может принимать значения разных знаков.

3. О бифуркациях в случаях коразмерности 2. Как уже отмечалось ранее, при $c= c_k$, $k=1,2,\ldots,5$, в задаче об устойчивости нулевого решения реализуется критический случай, когда при $a=a_{\text{кр}}$ спектру устойчивости линеаризованной задачи принадлежат следующие СЗ, расположенные на мнимой оси комплексной плоскости:

$$\lambda_0=0,\quad \lambda_{\pm k}=\pm i\sigma_k,\quad \lambda_{\pm(k+1)}=\pm i\sigma_{k+1},$$

а остальные СЗ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости. Выделенным СЗ соответствуют СФ

$$e_0(x) = 1, \quad e_k(x) = \exp(\pm ikx), \quad e_{k+1}(x) = \exp(\pm i(k+1)x).$$

Так, при $c = c_1, a = a_{\text{кр}}$ имеем две пары

$$\pm i\sigma_1, \quad \pm i\sigma_2, \quad \sigma_1 = \frac{3\sqrt{2}-2}{4}, \quad \sigma_2 = 1.$$

Напомним, что здесь $a = a_{\text{кр}} = a_1 = a_2$.

Если $c = c_2, a = a_{\text{кр}}$, то на мнимой оси находятся уже следующие две пары:

$$\pm i\sigma_2, \quad \pm i\sigma_3, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \frac{25\sqrt{2}-2}{28}, \quad a = a_{\text{кр}} = a_2 = a_3.$$

При $c = c_3, a = a_{\text{кр}}$ получаем опять набор пар

$$\pm i\sigma_3, \quad \pm i\sigma_4, \quad \sigma_3 = \frac{8\sqrt{2}-1}{8}, \quad \sigma_4 = \frac{8-\sqrt{2}}{6}, \quad a = a_{\text{кр}} = a_3 = a_4.$$

Наконец, при $c = c_4, a = a_{\text{кр}}$ имеем

$$\pm i\sigma_4, \quad \pm i\sigma_5, \quad \sigma_4 = \frac{17\sqrt{2}-8}{10}, \quad \sigma_5 = \frac{17-8\sqrt{2}}{8}, \quad a = a_{\text{кр}} = a_4 = a_5.$$

Последний вариант реализуется при $c = c_5, a = a_{\text{кр}}$:

$$\pm i\sigma_5, \quad \pm i\sigma_6, \quad \sigma_5 = \frac{41(5\sqrt{2}-6)}{516}, \quad \sigma_6 = \frac{246+121\sqrt{2}}{84}, \quad a = a_{\text{кр}} = a_5 = a_6.$$

Из этих вычислений следует, что каждый раз в отмеченных вариантах реализуются нерезонансные пары чисто мнимых СЗ.

Пусть теперь $c = c_k, a_{\text{кр}} = a_k$ ($a_k = a_{k+1}$ при $c = c_k$) и

$$a = a_k(1 - \beta_1\varepsilon), \quad c = c_k + \beta_2\varepsilon,$$

где ε — малый неотрицательный параметр, $\beta_1, \beta_2 \in R$. В результате получим нелинейную краевую задачу

$$u_t = A_{k,k+1}(\varepsilon)u + b_1(u-w)w_x + b_2w_x^2 + b_3w_x^2(u-w), \tag{3.1}$$

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x), \tag{3.2}$$

где

$$A_{k,k+1}(\varepsilon)u = a_k(1-\beta_1\varepsilon)u_{xx} - (c_k+\beta_2\varepsilon)w_x + u - w, \quad w = w(t,x) = u\left(t, x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Указанный ЛДО имеет следующие СЗ:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k(\varepsilon) = i\sigma_k + \varepsilon(\tau_k + i\omega_k), \quad \lambda_{-k} = \overline{\lambda}_k(\varepsilon),$$

$$\lambda_{k+1}(\varepsilon) = i\sigma_{k+1} + \varepsilon(\tau_{k+1} + i\omega_{k+1}), \quad \lambda_{-(k+1)} = \overline{\lambda}_{k+1}(\varepsilon), \quad \tau_k = a_k k^2\beta_1 - \beta_2 k \sin\frac{\pi k}{4},$$

$$\omega_k = \beta_2 k \cos\frac{\pi k}{4}, \quad \omega_{k+1} = \beta_2(k+1)\cos\frac{\pi(k+1)}{4},$$

$$\tau_{k+1} = a_{k+1}(k+1)^2\beta_1 - \beta_2(k+1)\sin\frac{\pi(k+1)}{4}.$$

Остальные СЗ ЛДО $A_{k,k+1}(\varepsilon)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le -\gamma < 0$.

Следовательно, нелинейная краевая задача (3.1), (3.2) имеет пятимерное инвариантное многообразие $M_5(\varepsilon)$, решения на котором восстанавливаются после рассмотрения вспомогательной системы из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной формы. Построение нормальной формы во многом повторяет реализацию алгоритма метода квазинормальных форм из предыдущего пункта, поэтому повторим лишь основные моменты.

Решения, принадлежащие $M_5(\varepsilon)$, будем искать в виде

$$u(t,x,\varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t,s,\varepsilon) + \varepsilon u_2(t,s,\varepsilon) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,s,\varepsilon) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{3.3}$$

где $s = \varepsilon t$, $u_j(t,s,x)$, $j = 1,2,3,$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие краевым условиям (3.2) и имеющие структуру тригонометрических квазимногочленов с базисом частот σ_1, σ_2. Так,

$$u_1 = z_k(s)\exp(i\sigma_k t + ikx) + \overline{z}_k(s)\exp(-i\sigma_k t - ikx) +$$
$$+ z_{k+1}(s)\exp(i\sigma_{k+1}t + i(k+1)x) + \overline{z}_{k+1}(s)\exp(-i\sigma_{k+1}t - i(k+1)x).$$

Подстановка суммы (3.3) в краевую задачу (3.1), (3.2), как и в пункте 2, приводит к двум неоднородным краевым задачам для определения u_2, u_3:

$$u_{2t} - A_{k,k+1}(0)u_2 = b_1(u_1 - w_1)w_{1x} + b_2 w_{1x}^2, \tag{3.4}$$

$$u_2(t,s,x+2\pi) = u_2(t,s,x), \tag{3.5}$$

$$u_{3t} - A_{k,k+1}(0)u_3 = b_1(u_1 - w_1)w_{2x} + b_1(u_2 - w_2)w_{1x} + 2b_2 w_{1x}w_{2x} + b_3(u_1 - w_1)w_{1x}^2, \tag{3.6}$$

$$u_3(t,s,x+2\pi) = u_3(t,s,x), \tag{3.7}$$

где $w_j = w_j(t,s,x) = u_j\left(t,s,x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Из условий разрешимости краевых задач (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) в выбранном классе функций приходим к нормальной форме

$$\psi' = d_{01}(k)|z_k|^2 + d_{02}(k)|z_{k+1}|^2,$$
$$z_k' = (\tau_k + i\omega_k)z_k - [d_{11}(k)|z_k|^2 + d_{12}(k)|z_{k+1}|^2]z_k, \tag{3.8}$$
$$z_{k+1}' = (\tau_{k+1} + i\omega_{k+1})z_{k+1} - [d_{21}(k)|z_k|^2 + d_{22}(k)|z_{k+1}|^2]z_{k+1},$$

в которой два последних уравнения могут быть записаны в полярной системе координат, если положить

$$z_k = \rho_k \exp(i\varphi_k), \quad z_{k+1} = \rho_{k+1}\exp(i\varphi_{k+1}).$$

В результате система (3.8) примет вид

$$\psi' = d_{01}(k)\rho_k^2 + d_{02}(k)\rho_{k+1}^2, \tag{3.9}$$

$$\varphi_k' = \omega_k - \left[\operatorname{Im} d_{11}(k)\rho_k^2 + \operatorname{Im} d_{12}(k)\rho_{k+1}^2\right], \tag{3.10}$$
$$\varphi_{k+1}' = \omega_{k+1} - \left[\operatorname{Im} d_{21}(k)\rho_k^2 + \operatorname{Im} d_{22}(k)\rho_{k+1}^2\right],$$

$$\rho_k' = \tau_k\rho_k - \left[\operatorname{Re} d_{11}(k)\rho_k^2 + \operatorname{Re} d_{12}(k)\rho_{k+1}^2\right]\rho_k, \tag{3.11}$$
$$\rho_{k+1}' = \tau_{k+1}\rho_{k+1} - \left[\operatorname{Re} d_{21}(k)\rho_k^2 + \operatorname{Re} d_{22}(k)\rho_{k+1}^2\right]\rho_{k+1},$$

где $d_{01}(k), d_{02}(k) \in R$, $d_{11}(k), d_{12}(k), d_{21}(k), d_{22}(k) \in C$. Эти коэффициенты определяются в процессе построения нормальной формы. Особую роль, очевидно, играет замкнутая система дифференциальных уравнений (3.11) для ρ_k, ρ_{k+1}.

Пусть $\rho_{k,0}$, $\rho_{k+1,0}$ — координаты ненулевого состояния равновесия. Возможны три варианта. Система (3.11) имеет состояния равновесия

$$S_1 : \rho_{k,0} > 0, \rho_{k+1,0} = 0; \quad S_2 : \rho_{k,0} = 0, \rho_{k+1,0} > 0; \quad S_3 : \rho_{k,0} > 0, \rho_{k+1,0} > 0.$$

Используя результаты и методику работ [13 – 16], можно утверждать, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ каждому ненулевому состоянию равновесия системы (3.11) $(S_1, S_2$ или $S_3)$ соответствует семейство решений краевой задачи (3.1), (3.2) вида*

$$u(t,x,\varepsilon) = [(d_{01}(k)\rho_{k0}^2 + d_{02}(k)\rho_{k+1,0}^2)\varepsilon + o(\varepsilon)]t + v(t,x,\varepsilon) + \psi_0, \tag{3.12}$$

где

$$v(t,x,\varepsilon) = [2\rho_{k,0}\cos\left((\sigma_k + \varepsilon\Theta_k)t + ikx + \gamma_k\right) +$$
$$+ 2\rho_{k+1,0}\cos\left((\sigma_{k+1} + \varepsilon\Theta_{k+1})t + i(k+1)x + \gamma_{k+1}\right)]\,\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}), \;\; \gamma_k, \gamma_{k+1}, \psi_0 \in R,$$

а поправки к частотам восстанавливаются после интегрирования дифференциальных уравнений (3.10). Решения (3.12) наследуют устойчивость состояний равновесия S_1, S_2 или S_3 соответственно. Первое слагаемое в формуле (3.12) восстанавливается после интегрирования дифференциального уравнения (3.9).

Пусть существует состояние равновесия S_1 (или S_2), тогда ему соответствует решение $u(t,x,\varepsilon)$, у которого функция $v(t,x,\varepsilon)$ имеет по переменной t период, близкий к $2\pi/\sigma_k$ $(2\pi/\sigma_{k+1})$.

Несколько иная ситуация возникает, если существует состояние равновесия S_3. Ясно, что ему соответствуют решения (3.11), где $v(t,x,\varepsilon)$ — квазипериодическая функция с базисом частот, которые близки к частотам σ_k, σ_{k+1}.

4. Заключение. В статье рассмотрена краевая задача для пространственно-нелокальной модели эрозии. С математической точки зрения пространственно-неоднородные решения (зависящие от x) могут появиться при смене устойчивости однородным состоянием равновесия, т. е. описан достаточно простой механизм возникновения волнового нанорельефа при бомбардировке поверхности потоком ионов. Аналогичный механизм (см. [13]) был предложен при рассмотрении модели Бредли – Харпера. Вместе с тем есть и отличия при сравнении этих моделей: при изучении нелокальной модели эрозии удается выявить высокомодовые (коротковолновые) волновые структуры. В пункте 2 при $c > 1,6$ было показано, что возможны структуры с волновым числом, равным шести. Более того, не исключается возможность наличия и двухмодовых решений, а следовательно, волнового рельефа усложненной структуры.

1. *Sigmund P.* Sputtering by ion bombardment. Theoretical concepts. Sputtering by penticle bombardment 1 / Ed. R. Behrisch. — Berlin: Springer-Verlag, 1981. — 000 p.

2. *Bradley R. M., Haper J. M. E.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Techol. — 1988. — **A6(4)**. — P. 2390 – 2395.

3. *Кудряшов Н. А., Рябов П. Н.,Стриханов М. Н.* Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядер. физика и инжиниринг. — 2010. — **1**, № 2. — С. 151 – 158.

4. *Sivachinsky G. I.* Weak turbulence in periodic flows // Physica D. — 1985. — **17**. — P. 243 – 255.

5. *Рудый А. С., Бачурин В. И.* Пространственно-нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Изв. РАН. Сер. физ. — 2008. — **72**, № 5. — С. 624 – 629.

6. *Куликов Д. А., Рудый А. С.* Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа // Моделирование и анализ информ. систем. — 2012. — **19**, № 5. — С. 40 – 49.

7. *Куликов Д. А.* Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа // Динам. системы. — 2012. — **2 (30)**, № 3 – 4. — С. 259 – 272.

8. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Моск. мат. о-ва. — 1961. — **10**. — С. 297 – 310.

9. *Крейн С. К.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

10. *Куликов А. Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1976. — С. 114 – 129.

11. *Foias C., Sell G. R., Temam R.* Inertial manifold for non-linear evolutionary equations // J. Different. Equat. — 1988. — **73**. — P. 309 – 352.

12. *Куликов А. Н.* Инерциальные многообразия нелинейных автономных диффренциальных уравнений в гильбертовом пространстве. — М., 1991. — 24 с. — (Препринт / АН СССР Ин. прикл. математики им. М. В. Келдыша, № 85).

13. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2012. — **52**, № 5. — С. 930 – 945.

14. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. — 2010. — **40**, № 9. — С. 1290 – 1299.

15. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 5. — С. 584 – 601.

16. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантных торов при возмущениях // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 6. — С. 738 – 753.

Получено 10.01.14