УДК 517.9

О ЧИСЛЕ НУЛЕЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ*

И. В. Асташова, В. В. Рогачев

Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
e-mail: ast@diffiety.ac.ru
aldakhar@gmail.com

For the generalized Emden – Fowler equation,

$$y^{(n)} = p_0|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \in \{3,4\}, \quad k \in (0,1)\cup(1,\infty), \quad p_0 \neq 0,$$

we prove existence of solutions with a given number of zeros in the domain of definition.

Для узагальненого рівняння Емдена – Фаулера

$$y^{(n)} = p_0|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \in \{3,4\}, \quad k \in (0,1)\cup(1,\infty), \quad p_0 \neq 0,$$

доведено існування розв'язків із заданим числом нулів в області визначення.

1. Введение. В данной работе для обобщенного уравнения Эмдена – Фаулера третьего и четвертого порядков изучаются свойства осциллирующих решений, т. е. решений, имеющих бесконечное число нулей на бесконечном или конечном интервале. В частности, доказывается существование решений с заданным числом нулей на отрезке, интервале, полуинтервале и полупрямой. Асимптотические свойства решений таких уравнений исследовались многими авторами. Для линейных уравнений третьего и четвертого порядков достаточные условия осцилляции, а также интересные результаты о числе нулей осциллирующих решений и их расположении получены в [12] (см. также [10], гл. I). Для нелинейных уравнений второго порядка в работе [9] был доказан критерий осцилляции всех решений. Для уравнений третьего и четвертого порядков свойства осциллирующих решений и критерии осцилляции были получены в [1 – 3, 13 – 17], для нелинейных уравнений произвольного порядка — в [4, 10, 11]. В работах [5, 7, 8] получены результаты о существовании решений с заданной областью определения и равномерных оценках решений для уравнения третьего порядка. Классификация всех решений уравнений третьего порядка в случае регулярной и сингулярной нелинейности, а также четвертого порядка в случае регулярной нелинейности приведена в [2, 3, 6] (см. также библиографию в [6, 10]).

2. Основные результаты. Для уравнения

$$y^{(n)} = p_0|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \in \{3,4\}, \quad k \in (0,1)\cup(1,\infty), \quad p_0 \neq 0, \tag{1}$$

* Выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00989).

изучается задача о существовании решений с заданным числом нулей на отрезке, интервале или полуинтервале при различных значениях параметра k. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *При $n = 3$ для любых $k \in (1, \infty)$, $p_0 \neq 0$, $a < b$ и целого $m \geq 2$ уравнение (1) имеет решение, определенное на отрезке $[a, b]$, равное нулю в точках a, b и имеющее на этом отрезке ровно m нулей.*

Теорема 2. *При $n = 3$ для любых $k \in (1, \infty)$, $p_0 > 0$, $a < b$ и целого $m \geq 1$ уравнение (1) имеет решение, определенное на полуинтервале $(a, b]$, равное нулю в точке b и имеющее на этом полуинтервале ровно m нулей, а также решение, имеющее на этом полуинтервале счетное число нулей. Аналогично, при $n = 3$ для любых $k \in (1, \infty)$, $p_0 < 0$, $a < b$ и целого $m \geq 1$ уравнение (1) имеет решение, определенное на полуинтервале $[a, b)$, равное нулю в точке a и имеющее на этом полуинтервале ровно m нулей, а также решение, имеющее на этом полуинтервале счетное число нулей.*

Теорема 3. *При $n = 3$ для любых $k \in (0, 1)$, $p_0 \neq 0$, $a < b$ и целого $m \geq 2$ уравнение (1) имеет решение, определенное на отрезке $[a, b]$, равное нулю в точках a, b и имеющее на этом отрезке ровно m нулей, а также решение, имеющее на этом отрезке счетное число нулей, и ненулевое решение, имеющее на этом отрезке континуум нулей.*

Теорема 4. *При $n = 4$ для любых $k \in (1, \infty)$, $p_0 \neq 0$, $a < b$ и целого $m \geq 2$ уравнение (1) имеет решение, определенное на отрезке $[a, b]$, равное нулю в точках a, b и имеющее на этом отрезке ровно m нулей.*

Теорема 5. *При $n = 4$ для любых $k \in (1, \infty)$, $p_0 < 0$, $a < b$ и целого $m \geq 1$ уравнение (1) имеет решения, определенные на полуинтервалах $[a, b)$ и $(a, b]$, равные нулю в точках a и b соответственно и имеющие на этих полуинтервалах ровно по m нулей, а также решения, имеющие на этих полуинтервалах счетное число нулей.*

Для удобства будем использовать обозначение

$$(y)^k_{\pm} := |y(x)|^k \operatorname{sgn}(y(x)).$$

При использовании такого обозначения уравнение (1) принимает вид

$$y^{(n)} = p_0 (y)^k_{\pm}, \quad n \in \{3, 4\}, \quad k \in (0, 1) \cup (1, \infty), \quad p_0 \neq 0.$$

3. Доказательство основных результатов. При доказательстве основных результатов будем использовать метод, предложенный для исследования качественных свойств и классификации решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена – Фаулера третьего и четвертого порядков, подробно описанный в работах [2] и [6] (часть I, гл. 5 – 7). Основные этапы применения этого метода, необходимые для получения результатов, будут кратко описаны в данной работе. При этом часть вспомогательных результатов будет подробно доказана, в частности, для уравнения третьего порядка с сингулярной нелинейностью, а другая часть снабжена ссылками на соответствующие теоремы, доказанные ранее, что относится к случаю уравнений третьего и четвертого порядков с регулярной нелинейностью.

Уравнение (1) имеет единственное решение для любой задачи Коши в случае, когда $k > 1$. Для рассмотрения случая $k \in (0, 1)$ необходима следующая теорема.

Теорема 6. *Решение задачи Коши уравнения (1) при $k \in (0,1)$ с вектором начальных данных $(y(x_0),\dots,y^{(n-1)}(x_0))$, не равным тождественно нулю, единственно в некоторой окрестности x_0.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Докажем существование и единственность решения задачи Коши $y(0) = y_0^0, y'(0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}^0$ для $x > 0$.

Интегрируя уравнение (1) n раз на отрезке $[0,x]$, получаем интегральное уравнение, равносильное рассматриваемой задаче Коши:

$$y(x) = y_0^0 + y_1^0 x + y_2^0 \frac{x^2}{2} + \dots + y_{n-1}^0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + p_0 \int_0^x \dots \int_0^x (y(x))_{\pm}^k (dx)^n. \tag{2}$$

Пусть $r = \min\{j : y_j^0 \neq 0\}$. Тогда можно записать

$$y_0^0 + y_1^0 x + y_2^0 \frac{x^2}{2} + \dots + y_{n-1}^0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x^r Q_{n-r-1}(x),$$

где $Q_{n-r-1}(x)$ — многочлен степени $n-r-1$, не равный нулю при $x = 0$.

Будем искать решение в виде

$$y(x) = x^r Q_{n-r-1}(x) + x^n u(x), \tag{3}$$

где $u(x) \in U = \{u(x) : u(x) \in C[0,\varepsilon], |u(x)| \le \hat{u}\}$, а $\hat{u}$ — некоторая положительная постоянная. Тогда уравнение (2) запишется в виде

$$u(x) = p_0 x^{-n} \int_0^x \dots \int_0^x x^{rk} \left(Q_{n-r-1}(x) + x^{n-r} u(x)\right)_{\pm}^k (dx)^n. \tag{4}$$

Будем считать, что $0 < \varepsilon < 1$, и введем обозначение

$$\hat{Q} = \sup\left\{|Q_{n-r-1}(x)| + \hat{u} : 0 \le x \le 1\right\}.$$

Покажем, что при достаточно малом ε правая часть равенства (4) принадлежит U, если $u(x) \in U$.

Действительно,

$$p_0 \left| x^{-n} \int_0^x \dots \int_0^x x^{rk} \left(Q_{n-r-1}(x) + x^{n-r} u(x)\right)_{\pm}^k (dx)^n \right| \le$$

$$\le p_0 x^{-n} \int_0^x \dots \int_0^x x^{rk} \left|Q_{n-r-1}(x) + x^{n-r} u(x)\right|^k (dx)^n \le$$

$$\le p_0 \hat{Q}^k x^{-n} \int\limits_0^x \ldots \int\limits_0^x x^{rk} (dx)^n = \frac{p_0\, \hat{Q}^k}{(rk+1)\ldots(rk+n)} x^{-n+rk+n} \le$$

$$\le \frac{p_0\, \hat{Q}^k}{(rk+1)\ldots(rk+n)}\, \varepsilon^{rk},$$

что не превышает $\hat{u}$, если

$$0 \le x \le \varepsilon < \left(\frac{(rk+1)\ldots(rk+n)\, \hat{u}}{p_0\, \hat{Q}^k} \right)^{\frac{1}{rk}}.$$

Докажем, что правая часть равенства (4), как функция от $u(x) \in U$, является сжимающим отображением из U в U.

Поскольку $Q_{n-r-1}(0) \ne 0$, можно выбрать ε так, чтобы кроме указанных выше условий для $0 \le x \le \varepsilon$ выполнялось неравенство

$$|Q_{n-r-1}(x)| > \hat{u}\, \varepsilon^{n-r}.$$

Введем обозначение

$$\hat{q}_\varepsilon = \inf \left\{ |Q_{n-r-1}(x)| - \hat{u}\, \varepsilon^{n-r} : 0 \le x \le \varepsilon \right\} > 0.$$

Тогда

$$\Bigg| p_0 x^{-n} \int\limits_0^x \ldots \int\limits_0^x x^{rk} \left(Q_{n-r-1}(x) + x^{n-r} u_1(x) \right)_{\pm}^k (dx)^n -$$

$$- p_0 x^{-n} \int\limits_0^x \ldots \int\limits_0^x x^{rk} \left(Q_{n-r-1}(x) + x^{n-r} u_2(x) \right)_{\pm}^k (dx)^n \Bigg| \le$$

$$\le p_0 x^{-n} \int\limits_0^x \ldots \int\limits_0^x x^{rk} \left| \left(Q_{n-r-1}(x) + x^{n-r} u_1(x) \right)_{\pm}^k - \left(Q_{n-r-1}(x) + x^{n-r} u_2(x) \right)_{\pm}^k \right| (dx)^n \le$$

$$\le p_0 x^{-n} \int\limits_0^x \ldots \int\limits_0^x x^{rk} k \hat{q}_\varepsilon^{k-1} x^{n-r} \left| u_1(x) - u_2(x) \right| (dx)^n \le$$

$$\le \frac{p_0\, k\, \hat{q}_\varepsilon^{k-1}}{(rk+n-r+1)\ldots(rk+n-r+n)}\, x^{-n+rk+n-r+n} \left| u_1(x) - u_2(x) \right| \le$$

$$\le \frac{p_0\, k\, \hat{q}_\varepsilon^{k-1}}{(rk+n-r+1)\ldots(rk+n-r+n)}\, \varepsilon^{rk+n-r} |u_1(x) - u_2(x)| = q |u_1(x) - u_2(x)|,$$

где коэффициент

$$q = \frac{p_0\, k\, \hat{q}_\varepsilon^{k-1}}{(rk+n-r+1)\dots(rk+n-r+n)}\, \varepsilon^{rk+n-r}$$

с помощью очередного уменьшения ε можно сделать меньше единицы, так как

$$rk+n-r = n+r(k-1) > n-r > 0,$$

а $\hat{q}_\varepsilon$ при уменьшении ε возрастает, так что $\hat{q}_\varepsilon^{k-1}$, как и ε^{rk+n-r}, убывает.

Таким образом, доказана требуемая сжимаемость, что влечет существование и единственность $u(x) \in U$, удовлетворяющего уравнению (4).

Поскольку любую функцию класса C^n с такими же начальными данными можно представить в виде (3), единственность решения рассматриваемой задачи Коши доказана.

Замечание 1. Существование решения задачи Коши следует из непрерывности правой части.

Замечание 2. Могут существовать два различных решения задачи Коши для нулевых начальных условий при $k \in (0,1)$, например,

$$y_1 = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le x_0, \\ \left(\dfrac{(1-k)^n p_0}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(n-j(1-k))} \right)^{\frac{1}{1-k}} (x-x_0)^{\frac{n}{1-k}} \quad \text{при} \quad x > x_0 \end{cases}$$

и $y_2 \equiv 0$ являются решениями уравнения (1) при $p_0 > 0$.

Теорема 7. *Уравнение (1) при $n > 2$, $p_0 \ne 0$, имеет осциллирующие решения.*

При $k > 1$ это частный случай утверждения 2.3 из [2], а также теоремы 6.1 из [6], а при $k \in (0,1)$ — теоремы 7.9 из [6].

Лемма 1 ([2], лемма 2.5, или [6], лемма 6.1). *Если $y(x)$ — решение уравнения (1), A, B, C — константы, причем $|A| = B^{\frac{n}{k-1}}$, $B > 0$, то $z(x) = Ay(Bx+C)$ — также решение уравнения (1).*

Доказательство. Подстановка $z(x)$ в уравнение (1) показывает, что если выполняется равенство

$$AB^n y^{(n)}(Bx+C) = p_0 (A)^k_{\pm} (y(Bx+C))^k_{\pm},$$

то $z(x)$ является решением. Если $AB^n = (A)^k_{\pm}$, $B > 0$, то равенство действительно выполнится. Условия $AB^n = (A)^k_{\pm}$, $B > 0$, равносильны условиям $|A| = B^{\frac{n}{k-1}}$, $B > 0$.

Лемма 1 доказана.

В дальнейшем будем говорить, что если для решений $y(x)$, $z(x)$ существуют такие A, B, C, что $B > 0$, $|A| = B^{\frac{n}{k-1}}$,

$$z(x) = Ay(Bx+C), \tag{5}$$

то $y(x)$ и $z(x)$ связаны соотношением (5), или же что $z(x)$ получено из $y(x)$ применением соотношения (5).

Лемма 2. *Для уравнения (1) в зависимости от значений $k > 1$, p_0, n возможны (но не обязательны) лишь следующие варианты качественного поведения максимально продолженных вправо решений возле правой границы их области определения:*

1) тождественный нуль,

2) осциллирующее решение,

3) решение, стремящееся к $\pm\infty$,

4) стремящееся к нулю кнезеровское решение, т. е. такое нетривиальное решение $y(x)$, что $(-1)^j y^{(j)}(x) \to +0$ или $(-1)^j y^{(j)}(x) \to -0$ при $x \to \infty$, $0 \le j \le n-1$ (возможно только в случаях $n = 4$, $p_0 > 0$ и $n = 3$, $p_0 < 0$).

Замечание 3. Отметим, что в случае $n = 3$, $k \in (0, 1)$ нетривиальное решение в некоторой точке может обращаться в нуль вместе со всеми своими производными. При этом слева от нее оно может быть как знакопостоянным при $p_0 < 0$, так и осциллирующим при $p_0 > 0$. Вправо от этой точки решение может быть соответственно продолжено осциллирующим или знакопостоянным, а также тождественно равным нулю.

Замечание 4. Данная лемма имеет вспомогательный характер. Полная асимптотическая классификация решений уравнения (1) приведена в [6] (гл. 7).

Доказательство леммы 2. Любое нетривиальное решение, начиная с некоторого момента, либо знакопостоянно, либо осциллирует. Знакопостоянное решение, как следует из вида уравнения (1), имеет знакопостоянную производную n-го порядка. Поскольку n-я производная знакопостоянна, то $(n-1)$-я производная строго монотонна и поэтому знакопостоянна в окрестности правой границы области определения. Продолжая рассуждения, получаем, что и само решение строго монотонно в некоторой окрестности правой границы области определения и поэтому имеет конечный или бесконечный предел. Если этот предел конечен, то конечный предел имеет и n-я производная, а при ограниченной справа области определения — и все младшие производные, из чего следует продолжаемость решения вправо за границу области определения. Таким образом, знакопостоянное решение бывает непродолжаемым вправо за конечную границу, только если оно имеет на ней вертикальную асимптоту.

Рассмотрим случай неограниченной справа области определения. Начиная с некоторого момента знакопостоянное решение монотонно и на бесконечности стремится к пределу, конечному или бесконечному. Без ограничения общности считаем решение положительным. Если решение стремится к ненулевому пределу, то его n-я производная, начиная с некоторого момента, больше некоторой положительной константы, так что само решение стремится к $+\infty$.

Если же решение стремится на бесконечности к нулю, то к нулю должны стремиться и его производные порядка $1, \ldots, n$. Если для некоторого $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ функции $y^{(j)}$ и $y^{(j+1)}$ в окрестности $+\infty$ имеют один и тот же знак, то $y^{(j)}$ не может стремиться к нулю. Таким образом, стремящееся к нулю решение является кнезеровским. При этом $y^{(n)}$ должна, начиная с некоторого момента, иметь тот же знак, что и $(-1)^n y$. Это возможно только при $p_0 < 0$, если $n = 3$, и при $p_0 > 0$, если $n = 4$.

Лемма 2 доказана.

3.1. Случай уравнения третьего порядка. Далее подразумевается, что $n = 3$ и $p_0 > > 0$. Для произвольного решения $y(x)$ уравнения (1) рассматривается интервал (x_1, x_2), на котором оно знакопостоянно, причем $y(x_1) = 0$. Без ограничения общности считаем, что $y > 0$, в противном случае будем рассматривать функцию $-y(x)$, также являющуюся решением. Для изучения уравнения третьего порядка используется замена

$$u_1 = y' y^{-\beta_1},$$
$$u_2 = y'' y^{-\beta_2}$$

с параметризацией

$$t = \int\limits_{x_0}^{x} y^{\frac{1}{\alpha}} dx,$$

где

$$\alpha = \frac{3}{k-1}, \quad \beta_1 = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \beta_2 = 1 + \frac{2}{\alpha}.$$

Данная замена возможна только на интервале положительности решения. Уравнение (1) преобразуется в систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{u_1} = \frac{du_1}{dt} = \frac{du_1}{dx}\frac{dx}{dt} = (y' y^{-\beta_1})' \frac{dx}{dt} = \left(y'' y^{-\beta_1} - \beta_1 (y')^2 y^{-\beta_1 - 1}\right) y^{-\frac{1}{\alpha}} =$$
$$= \left(y'' y^{-1-\frac{2}{\alpha}} - \beta_1 (y')^2 y^{-2-\frac{2}{\alpha}}\right) = u_2 - \beta_1 u_1^2,$$
$$\dot{u_2} = \frac{du_2}{dt} = \frac{du_2}{dx}\frac{dx}{dt} = y''' y^{-1-\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}} - \beta_2 y'' y' y^{-1-\frac{2}{\alpha}-1-\frac{1}{\alpha}} = y''' y^{-k} - \beta_2 u_1 u_2 = p_0 - \beta_2 u_1 u_2.$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{u_1} &= u_2 - \beta_1 u_1^2, \\ \dot{u_2} &= p_0 - \beta_2 u_1 u_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что $u_1 \to \infty$ при $x \to x_1$, если $y'(x_1) \neq 0$, и $u_2 \to \infty$, если $y''(x_1) \neq 0$, так как x_1 — нуль решения $y(x)$.

В дальнейшем максимально продолженные решения системы (6) будем называть фазовыми кривыми. Эта система имеет неподвижную точку (a_1, a_2), где

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{p_0}{\beta_1 \beta_2}}, \quad a_2 = \sqrt[3]{\frac{{p_0}^2 \beta_1}{{\beta_2}^2}}. \tag{7}$$

Согласно [2], справедлива следующая лемма.

Лемма 3 ([2], лемма 2.5, или [6], лемма 6.1). *Система (6) задает семейство фазовых кривых на плоскости, причем каждому знакопостоянному интервалу решения уравнения (1) соответствует фазовая кривая. Более того, если двум разным интервалам соответствует одна и та же фазовая кривая, то они связаны соотношением (5). Обратно, двум связанным соотношением (5) решениям соответствует одна и та же фазовая кривая.*

Рассмотрим возможные фазовые кривые на плоскости. Замена выполняется на промежутке положительности решения уравнения (1), т. е. рассматриваемая часть решения при продолжении вправо либо пересечет ось Ox, либо нет. Следующая теорема описывает асимптотический вид максимально продолженных вправо решений, положительных в окрестности правой границы области определения. Отрицательные же получаются из них умножением на -1.

Теорема 8. *Все фазовые кривые из первой четверти плоскости (u_1, u_2) стремятся к неподвижной точке системы (a_1, a_2), а соответствующие им решения уравнения (1) имеют следующий асимптотический вид:*

если $k \in (0, 1)$, то

$$y(x) = \left(\frac{3(2+k)(1+2k)}{(1-k)^3 p_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} x^{\frac{3}{1-k}}(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad x \to \infty, \tag{8}$$

если $k > 1$, то

$$y(x) = \left(\frac{3(2+k)(1+2k)}{(k-1)^3 p_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} (x^* - x)^{\frac{3}{1-k}}(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad x \to x^* - 0, \tag{9}$$

где a_1, a_2 определяются формулами (7).

Других максимально продолженных вправо решений, положительных, начиная с некоторого момента, уравнение (1) не имеет.

Доказательство. Рассмотрим семейство прямоугольников

$$[a_1\theta, a_1/\theta] \times [a_2\theta^2, a_2/\theta^2], \quad \theta \in (0, 1).$$

У них есть общая точка (a_1, a_2). Пусть S_θ, где $0 < \theta \le 1$, — границы этих прямоугольников. Очевидно, что при $\theta = 1$ множество S_θ вырождается в точку, а множества S_θ при различных $0 < \theta \le 1$ не пересекаются. При этом объединение всех таких множеств S_θ при $0 < \theta \le 1$ совпадает с $\mathbb{R}^2_+$. Таким образом, каждая точка $u \in \mathbb{R}^2_+$ однозначно определяет такое $\theta \in (0, 1]$, что $u \in S_\theta$, поэтому рассматриваемая фазовая кривая $u(t)$ однозначно определяет функцию $\theta(t)$. Покажем, что эта функция возрастает, т. е. если решение $u(t)$ пересекает S_θ, то ее касательный вектор в точке пересечения направлен внутрь прямоугольника. Производная от u_1 на левой границе прямоугольника равна

$$\dot{u}_1 = u_2 - \beta_1 a_1^2 \theta^2,$$

но так как $u_2 \in [a_2\theta^2, a_2/\theta^2]$, то $\dot{u}_1 \geqslant 0$, т. е. фазовая кривая пересекает эту границу слева направо или касается ее. На нижней же границе имеем

$$\dot{u}_2 = p_0 - \beta_2 u_1 u_2 = p_0 - \beta_2 a_2 \theta^2 u_1,$$

но так как $u_1 \in [a_1\theta, a_1/\theta]$, то

$$\dot{u}_2 \geqslant p_0 - \beta_2 a_2 a_1 \theta = p_0 - p_0\theta > 0,$$

т. е. там фазовая кривая пересекает нижнюю границу снизу вверх. Аналогично оцениваются производные на оставшихся границах. Некоторые из полученных оценок нестрогие, поэтому возможны случаи, когда фазовая кривая остановится на границе прямоугольника, либо направлена вдоль нее. Но первый случай невозможен, так как система (6) имеет лишь одну неподвижную точку. Фазовая кривая не может оставаться на левой или правой границе прямоугольника в силу доказанных неравенств, а если траектория пересечет прямоугольник в углу, то там оценка одной из производных строгая, и фазовая кривая направлена внутрь прямоугольника. Итак, функция $\theta(t)$ возрастает, ограничена сверху, а значит, стремится к конечному пределу θ_*. Если $\theta_* = 1$, то $u(t) \to (a_1, a_2)$; в противном случае фазовая кривая наматывается на S_{θ_*}, т. е. все ее предельные точки лежат в S_{θ_*}. Отсюда следует, что существует фазовая кривая, целиком лежащая в S_{θ_*}, что невозможно. Следовательно, все фазовые кривые действительно стремятся к (a_1, a_2).

Докажем вторую часть утверждения при $k \in (0,1)$. Если в некоторой точке x_0 функция $y(x)$ и все ее производные положительны, то для всех $x > x_0$ выполняется $y(x) > y(x_0) > 0$. В области $y > y(x_0) > 0$ правая часть уравнения удовлетворяет глобальному условию Липшица, поэтому $y(x)$ продолжаема вправо до $+\infty$ и $y(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, так как $y'''(x) > p_0 y(x_0)^k$. Применяя правило Лопиталя и учитывая, что $-\dfrac{1}{\alpha} > 0$, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y^{-\frac{1}{\alpha}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{\alpha} y^{-\frac{1}{\alpha}-1}\, y'}{1} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to+\infty} u_1 = -\frac{a_1}{\alpha},$$

откуда

$$y = \left(-\frac{a_1\, x}{\alpha}\right)^{-\alpha} (1 + o(1)) = \left(\frac{3(2+k)(1+2k)}{(1-k)^3 p_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} x^{\frac{3}{1-k}} (1 + o(1)).$$

Таким образом, фазовые кривые, оказавшиеся в первой четверти, соответствуют решениям, имеющим вид (8).

Аналогично доказывается тот факт, что при $k > 1$ решения имеют вид (9) (см. [2] или [6], теорема 5.4).

Согласно лемме 2, при $n = 3$ и $p_0 > 0$ любое максимально продолженное вправо знакопостоянное (без ограничения общности положительное) на своей области определения решение уравнения (1) стремится к $+\infty$. Тогда и пределы всех его производных порядка $j = 0, 1, 2, 3$ равны $+\infty$. Действительно, если область определения решения не ограничена, то из $y \to +\infty$ в силу уравнения (1) следует, что $y^{(n)} \to +\infty$, откуда при повторном интегрировании получаем, что $y^{(j)} \to +\infty$ при $0 < j < n$. В случае же ограниченной области определения, если хотя бы один из пределов $y^{(j)}$ конечен, при повторном интегрировании убеждаемся, что $y(x)$ также стремится к конечному пределу. Таким образом, других максимально продолженных вправо решений, положительных, начиная с некоторого момента, уравнение (1) не имеет.

Теорема 8 доказана.

Для изучения осциллирующих решений уравнения (1) воспользуемся следующей леммой, в которой t_* и t^* обозначают соответственно левую и правую границы области изменения параметра t.

Лемма 4 (при $k > 1$ следствие леммы 2.5 из [2] или [6], следствие 6.1.1). *На плоскости* (u_1, u_2) *существует:*

ровно одна фазовая кривая системы (6), для которой $u_1 \to +\infty$ *и* $u_2 \to 0$ *при* $t \to t_*$,

ровно одна фазовая кривая, для которой $u_1 \to -\infty$ *и* $u_2 \to 0$ *при* $t \to t^*$,

ровно одна фазовая кривая, для которой $u_2 \sim +\dfrac{u_1^2}{2}$ *и* $u_1 \to +\infty$ *при* $t \to t_*$,

ровно одна фазовая кривая, для которой $u_2 \sim +\dfrac{u_1^2}{2}$ *и* $u_1 \to -\infty$ *при* $t \to t^*$,

для любого $C \neq 0$ *ровно одна фазовая кривая, для которой* $u_1 \to +\infty$ *при* $t \to t_*$ *и*

$$u_2 \sim C|u_1|^{\beta_2/\beta_1}, \tag{10}$$

для любого $C \neq 0$ *ровно одна фазовая кривая, для которой* $u_1 \to -\infty$ *при* $t \to t^*$ *и выполняется (10).*

Замечание 5. Асимптотика фазовой кривой вида (10) и $u_1 \to -\infty$ означают, что соответствующее решение определено на некотором (конечном или бесконечном) интервале знакопостоянства с правым концом x_0, причем $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) \neq 0$, $y''(x_0) \neq 0$. Аналогично, если $u_1 \to +\infty$ и выполняется (10), то решение имеет интервал знакопостоянства с левым концом x_0, где $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) \neq 0$, $y''(x_0) \neq 0$.

Среди фазовых кривых со степенной асимптотикой (10) есть одна особенная, играющая важную роль.

Лемма 5 (при $k > 1$ см. [2], лемма 2.6, или [6], лемма 6.2). *Существует фазовая кривая системы (6), которая при* $t \to t_*$ *и* $t \to t^*$ *удовлетворяет (10) с константами* C_0, $-C_0$ *соответственно, причем* $C_0 \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим некоторое осциллирующее решение $y(x)$ уравнения (1) при $n = 3$, $k \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, $p_0 > 0$ на его промежутке знакопостоянства с правым концом x_2. Обозначим через $y_1(x)$ ограничение $y(x)$ на этот промежуток. Без ограничения общности $y_1(x) > 0$. Пусть $y_1'(x_2) < 0$, $y_1''(x_2) > 0$. Поскольку $p_0 > 0$, $y_1(x) > 0$, то $y'''(x) > 0$, т. е. $y''(x)$ убывает при убывании x. Рассуждая, как и при доказательстве леммы 2, убеждаемся, что $y_1(x)$ монотонна в окрестности левого конца интервала. Замена $x \to -x$ позволяет при $p_0 < 0$ применить лемму 2, согласно которой бесконечный интервал знакопостоянства возможен, только если решение стремится либо к нулю, либо к бесконечности.

Пусть $y_1(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$. Тогда при $x \to -\infty$ имеем $y_1'''(x) \to +\infty$, $y_1''(x) \to -\infty$, $y_1'(x) \to +\infty$, $y_1(x) \to -\infty$ — противоречие.

Второй случай также невозможен, так как если $y_1(x) \to +0$ при $x \to -\infty$, то и $y_1^{(j)}(x) \to +0$, $j = 1,2,3$. Но тогда $y_1'(x)$ положительна и возрастает при росте x, а это противоречит тому, что $y_1'(x_2) < 0$.

Пусть $y_1(x) \to +\infty$ при $x \to x_1 + 0$, где $x_1 > -\infty$ — левый конец интервала знакопостоянства. В этом случае при $x \to x_1 + 0$ имеем $y_1'(x) \to -\infty$, $y_1''(x) \to +\infty$, $y_1'''(x) \to -\infty$, что невозможно, так как $p_0 > 0$.

Итак, при любом $k \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, если $y_1'(x_2) < 0$, $y_1''(x_2) > 0$, решение имеет конечный интервал знакопостоянства (x_1, x_2), причем $y_1(x_1) = 0$. Очевидно, $y_1'(x_1) \geq 0$.

Поскольку

$$0<\int\limits_{x_1}^{x_2} p_0|y|^{k+1}\,dx=\int\limits_{x_1}^{x_2} yy'''dx=-\int\limits_{x_1}^{x_2} y''dy=-\int\limits_{x_1}^{x_2} y'dy'=\frac{(y'(x_1))^2-(y'(x_2))^2}{2},$$

то $|y'(x_1)|>|y'(x_2)|$, следовательно, $y'(x_1)>0$. Поэтому в некоторой точке $a\in(x_1,x_2)$ выполнено $y'(a)=0$. Тогда

$$0<\int\limits_{a}^{x_2} p_0|y|^{k+1}\,dx=\int\limits_{a}^{x_2} yy'''dx=-y(a)y''(a)-\int\limits_{a}^{x_2} y''dy=$$

$$=-y(a)y''(a)-\int\limits_{a}^{x_2} y'dy'=-y(a)y''(a)-\frac{(y'(x_2))^2}{2}.$$

Так как $y(a)>0$, то $y''(a)<0$. На (x_1,x_2) функция $y''(x)$ возрастает, поэтому $y''(x_1)<0$. Итак, $y'(x_2)<0$, $y''(x_2)>0$, тогда $y'(x_1)>0$, $y''(x_1)<0$.

Поскольку x_2 — правый конец интервала знакопостоянства, соответствующая решению фазовая кривая будет иметь при $t\to t^*$ асимптотику

$$u_1\to-\infty,\quad u_2\sim y''(x_2)|y'(x_2)|^{-\beta_2/\beta_1}|u_1|^{\beta_2/\beta_1}.$$

Аналогично, для x_1 при $t\to t_*$ получим

$$u_1\to+\infty,\quad u_2\sim y''(x_1)|y'(x_1)|^{-\beta_2/\beta_1}|u_1|^{\beta_2/\beta_1}.$$

Если при $t\to t^*$ выполняется (10) с $C>0$, то при $t\to t_*$ также выполняется (10), но с некоторой константой $C_1<0$. Зададим функцию $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ формулой $\varphi: C\mapsto$ $\mapsto -C_1$. Заметим, что если при $t\to t^*$ две фазовые кривые удовлетворяют (10), то у той кривой, что выше, константа C больше, а $\varphi(C)$ меньше. Поэтому $\varphi(C)$ строго убывает и, очевидно, имеет связную область значений. Поэтому существует такое $C_0>0$, что $C_0=\varphi(C_0)$.

Лемма 5 доказана.

Замечание 6. Фазовая кривая с данным свойством существует и при $k\in(0,1)$, и при $k>1$.

Лемма 6. *Уравнение (1) имеет такое знакопеременное решение, что если* (x_1,x_2), (x_2,x_3) *— два последовательных интервала его знакопостоянства и* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *— ограничения решения на эти два интервала, то* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *связаны соотношением (5) с коэффициентами* A_1, B_1, C_1, *причем* A_1, B_1 *одинаковы при любом выборе интервала* (x_1,x_2) *из имеющихся интервалов знакопостоянства.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый интервал (x_1,x_2) знакопостоянства решения $y(x)$, соответствующий фазовой кривой, существование которой утверждается в лемме 5.

Без ограничения общности можно считать, что $y(x) > 0$ на (x_1, x_2). Пусть y_1, y_2 — ограничения решения y на интервал (x_1, x_2) и на следующий за ним интервал знакопостоянства. В точке x_2 значения первой и второй производной $y(x)$ таковы, что асимптотика соответствующей y_1 фазовой кривой при $t \to t^*$ имеет вид (10) с константой

$$C_0 = y''(x_2)|y'(x_2)|^{-\beta_2/\beta_1}.$$

Поскольку $y_2(x) < 0$, рассмотрим фазовую кривую, соответствующую $|y_2(x)| = -y(x)$. Для нее выполняется (10) при $t \to t_*$ с константой

$$-C_0 = -y''(x_2)|y'(x_2)|^{-\beta_2/\beta_1}.$$

Но согласно лемме 5, функции $-y_2$ соответствует та же фазовая кривая, так как кривая с одинаковыми по модулю коэффициентами асимптотик единственна. Поэтому, согласно лемме 1, ограничения рассматриваемого решения на соседние интервалы знакопостоянства связаны соотношением (5) с некоторыми коэффициентами A_1, B_1, C. Но эти коэффициенты однозначно находятся из условия гладкости решения. Именно, пусть $y(x)$ — решение на (x_1, x_2), $A_1 y(B_1 x + C)$ — решение на (x_2, x_3). Так как фазовая кривая имеет асимптотический вид (10), в точках x_1, x_2 производные первого и второго порядков не равны нулю. Тогда из условия гладкости следует, что

$$y'(x_2) = B_1 A_1 y'(x_1), \quad y''(x_2) = B_1^2 A_1 y''(x_1),$$

откуда

$$B_1 = \frac{y'(x_1) y''(x_2)}{y'(x_2) y''(x_1)}, \quad A_1 = \frac{y'(x_2)}{y'(x_1) B_1}, \quad C = x_1 - B_1 x_2.$$

A_1 и B_1 зависят только от отношений $\dfrac{y'(x_1)}{y'(x_2)}$ и $\dfrac{y''(x_1)}{y''(x_2)}$, которые равны соответственно отношениям $\dfrac{y'(x_2)}{y'(x_3)}$ и $\dfrac{y''(x_2)}{y''(x_3)}$. Действительно, учитывая то, как связаны ограничения решения $y(x)$ на отрезки $[x_1, x_2]$ и $[x_2, x_3]$, получаем

$$\frac{y'(x_2)}{y'(x_3)} = \frac{B_1 A_1 y'(x_1)}{B_1 A_1 y'(x_2)} = \frac{y'(x_1)}{y'(x_2)}, \quad \frac{y''(x_2)}{y''(x_3)} = \frac{B_1^2 A_1 y''(x_1)}{B_1^2 A_1 y''(x_2)} = \frac{y''(x_1)}{y''(x_2)}.$$

Таким образом, A_1, B_1 одинаковы для ограничений решения на любую пару соседних интервалов знакопостоянства.

Аналогично, решение можно продолжить влево.

Лемма 6 доказана.

Замечание 7. Существование знакопеременного решения следует из существования особенной фазовой кривой, которая существует и при $k \in (0, 1)$, и при $k \in (0, +\infty)$.

Фазовая кривая задает знакопеременное решение, ограничения которого на соседние промежутки знакопостоянства связаны соотношением (5) с фиксированными коэффициентами A_1, B_1. Заметим, что A_1 — коэффициент вертикального растяжения решения при применении соотношения (5), а B_1 — коэффициент горизонтального растяжения решения при применении соотношения (5).

Пусть x_1, x_2, x_3 — соседние нули решения, ограничения решения на соседние отрезки связаны соотношением $y_2(x) = A_1 y_1(B_1 x + C_1)$. Тогда

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_2 - x_1|} = \frac{1}{B_1}, \quad \frac{|y'(x_1)|}{|y'(x_2)|} = \frac{1}{|A_1 B_1|} = B_1^{-\frac{3}{k-1}-1}.$$

Показатель степени при B_1 положителен при $k \in (0,1)$ и отрицателен при $k > 1$. Заметим также, что

$$0 < \int\limits_{x_1}^{x_2} p_0 |y|^{k+1}\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} yy''' dx = -\int\limits_{x_1}^{x_2} y'' dy = -\int\limits_{x_1}^{x_2} y' dy' = \frac{(y'(x_1))^2 - (y'(x_2))^2}{2}.$$

Это значит, что $|y'(x_1)| > |y'(x_2)|$ и $\dfrac{|y'(x_1)|}{|y'(x_2)|} > 1$. Следовательно, $B_1 > 1$ при $k \in (0,1)$ и $B_1 < 1$ при $k > 1$. В обоих случаях $A_1 = B_1^{\frac{3}{k-1}} < 1$.

Пусть $m \in \mathbb{Z}$ — порядковый номер интервала знакопостоянства решения (интервалу (x_1, x_2) присвоен номер 0, отрицательные номера соответствуют интервалам знакопостоянства, расположенным слева от точки x_1). Длина m-го интервала равна $|x_2 - x_1| B_1^{-m}$. Ограничение решения на m-й интервал связано соотношением (5) с ограничением решения на интервал (x_1, x_2) с коэффициентом вертикального масштаба $A = A_1^m$.

При $k \in (0,1)$ имеем $B_1^{-1} < 1$, поэтому при возрастании m длины соответствующих интервалов образуют убывающую геометрическую прогрессию. Убывающая геометрическая прогрессия имеет конечную сумму, поэтому у множества правых концов данных интервалов (фактически это множество нулей рассматриваемого решения) будет точка накопления x^*, причем объединение интервалов лежит левее x^*. Решение при $x \to x^* - 0$ будет стремиться к нулю со всеми производными, так как $A_1^m \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, правее точки x^* решение можно продолжить тождественным нулем, причем $y(x^*) = 0$. Левее x^* решение имеет счетное число нулей, причем с единственной точкой накопления x^*.

При $k > 1$ имеем $B_1^{-1} > 1$, поэтому аналогичная точка накопления нулей x_* возникнет при продолжении решения влево. Но продолжить решение левее x_* невозможно, так как при убывании m значение A_1^m возрастает, поэтому модули локальных экстремумов решения будут стремиться к бесконечности при $x \to x_* + 0$. Правее x_* решение имеет счетное число нулей, причем x_* — единственная точка накопления нулей.

Использовав полученные результаты, докажем основные теоремы при $n = 3$.

Доказательство теоремы 1. По доказанному выше уравнение (1) при $p_0 > 0$ и $k \in (1, \infty)$ имеет решения, число нулей которых является счетным. Пусть $y(x)$ — такое решение. Очевидно, что можно выбрать такой отрезок $[x_1, x_2]$, что $y(x_1) = y(x_2) = 0$ и на отрезке имеется m нулей решения, где $m \geq 2$. Продеформировав данное решение и переместив его в отрезок $[a, b]$ с помощью соотношения (5), получим решение

$$\tilde{y}(x) = \left(\frac{|x_2 - x_1|}{|b - a|}\right)^{\frac{n}{k-1}} y\left(x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{|b - a|}(x - a)\right), \tag{11}$$

удовлетворяющее условиям теоремы. При $p_0 < 0$ задача сводится к предыдущей заменой $x \mapsto -x$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Утверждение про конечное число нулей следует из теоремы 1. Как было показано выше, уравнение (1) при $n = 3$, $p_0 > 0$ и $k \in (1, \infty)$ имеет решение $y(x)$, число нулей которого является счетным, с локальными максимумами, стремящимися к бесконечности при $x \to x_1+0$. Тогда $y(x)$ имеет на полуинтервале $(x_1, x_2]$ счетное число нулей, и для полуинтервала $(a, b]$ решение (11) удовлетворяет условию теоремы. При $p_0 < 0$ и полуинтервале $[a; b)$ задача сводится к предыдущей заменой $x \mapsto -x$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Как было показано выше, при $k \in (0, 1)$ уравнение (1) имеет решение $y(x)$ с точкой $\tilde{x}$ накопления нулей, продолженное нулем вправо. Можно выбрать отрезок $[x_1, x_2]$ так, чтобы он содержал в себе m нулей ($x_2 < \tilde{x}$), либо чтобы на отрезке оказалось счетное число нулей ($x_2 = \tilde{x}$), либо (при $x_2 > \tilde{x}$) чтобы получить нетривиальное решение с континуумом нулей. Во всех этих случаях продеформированное и перемещенное в отрезок $[a, b]$ решение (11) удовлетворяет условию теоремы. При $p_0 < 0$ задача сводится к предыдущей заменой $x \mapsto -x$.

Теорема 3 доказана.

3.2. Случай уравнения четвертого порядка. Пусть $n = 4$.

Лемма 7. *Функция*

$$F(y, y', y'', y''') := \int\limits_0^y p_0(y)_\pm^k dy + \frac{(y'')^2}{2} - y'y'''$$

является первым интегралом для уравнения (1) при $n = 4$, $p_0 > 0$.

Доказательство. Имееем

$$\frac{dF(y, y', y'', y''')}{dx} = p_0(y)_\pm^k y' + y''y''' - y'y'''' - y''y''' = 0,$$

т. е. при подстановке в F решения $y(x)$ уравнения (1) получится константа.

Лемма 8 ([6], лемма 6.5). *Знакопеременные решения уравнения (1) при* $n = 4$, $p_0 > 0$ *ограничены, как и их вторые производные.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ — знакопеременное решение и первый интеграл F принимает на нем значение c. Тогда в точках, где $y' = 0$, имеем

$$\int\limits_0^y p_0(y)_\pm^k dy = \frac{p_0|y|^{k+1}}{k+1} = c - \frac{(y'')^2}{2} \le c,$$

из чего следует ограниченность решения. В точках, где $y''' = 0$, выполняется неравенство

$$\frac{(y'')^2}{2} = c - \frac{p_0|y|^{k+1}}{k+1} \le c,$$

что и завершает доказательство леммы.

Согласно теореме 6.5 из [6], для любого знакопеременного решения $y(x)$ уравнения (1) при $n = 4$, $k > 1$ и $p_0 > 0$ существуют такие d, e, что если δ — расстояние между любыми соседними нулями, то $d < \delta < e$. Отсюда следует, что знакопеременное решение будет определено на всей прямой и имеет на ней счетное число нулей.

Согласно теореме 4.3 из [3] (см. также теорему 7.2 из [6]), уравнение (1) при $n = 4$, $k > 1$ и $p_0 < 0$ имеет решение, определенное на интервале (a, b), где a, b — точки накопления нулей, причем экстремумы решения стремятся к бесконечности при приближении x к границам интервала.

Доказательство теоремы 4. По доказанному выше, уравнение (1) при $n = 4$ во всех случаях, удовлетворяющих условию теоремы, имеет решения со счетным числом нулей. Пусть $y(x)$ — такое решение. Очевидно, что можно выбрать такой отрезок $[x_1, x_2]$, что $y(x_1) = y(x_2) = 0$ и на отрезке имеется m нулей решения, где $m \geq 2$. Продеформировав и сдвинув решение в отрезок $[a, b]$ с помощью соотношения (5), получим решение (11), удовлетворяющее условиям теоремы.

Доказательство теоремы 5. Как было доказано выше, уравнение (1) в данном случае имеет решение $y(x)$ с двумя точками накопления нулей, причем максимумы решения стремятся к бесконечности при стремлении x к точкам накопления нулей. Выбрав полуинтервал между x_1, x_2 так, чтобы точка накопления нулей дополняла его до отрезка, продеформировав и сдвинув решение в отрезок $[a, b]$ соотношением (5), получим решение (11), удовлетворяющее условию теоремы.

1. *Асташова И. В.* Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. расшир. зас. сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа. — 1988. — **3**, № 3. – С. 9–12.

2. *Асташова И. В.* Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. — 2003. — **8**. — С. 3–33.

3. *Асташова И. В.* Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера четвертого порядка // Неклассические уравнения математической физики: Тр. междунар. конф. „Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященной 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СОРАН. — 2007. — С. 41–55.

4. *Astashova I. V.* On existence of non-oscillatory solutions to quasi-linear differential equations // Georg. Math. J. — 2007. — **2**, № 14. — P. 223–238.

5. *Astashova I. V.* Uniform estimates for solutions to the third order Emden–Fowler type autonomous differential equation // Funct. Different. Equat. — 2011. — **18**, № 1–2. — P. 55–63.

6. *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. — С. 22–288.

7. *Асташова И. В.* О равномерных оценках решений нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка // Труды сем. им. И. Г. Петровского. — 2013. — **29**. — С. 144–159.

8. *Astashova I.* Uniform estimates and existence of solutions with prescribed domain to nonlinear third-order differential equation // Springer Proc. Math. and Stat. Different. and Difference Equat. with Appl. — 2013. — **47**. — P. 227–237.

9. *Atkinson F. V.* On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math. — 1955. — **5**, № 1. — P. 643–647.

10. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. – 432 с.

11. *Кигурадзе И. Т.* Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1992. — **28**, № 2. — С. 207–219.

12. *Кондратьев В. А.* О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка // Труды Моск. мат. о-ва. — 1959. — **8**. — С. 259–281.

13. *Кондратьев В. А., Самовол В. С.* О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. —1981. — **17**, № 4. — С. 749–750.

14. *Kusano T., Naito M.* Nonlinear oscillation of fourth-order differential equations // Can. J. Math. — 1976. — **28**, № 4. — P. 840–852.

15. *Lovelady D. L.* An oscillation criterion for a fourth-order integrally superlinear differential equation // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. — 1975. — **58 (8)**, № 4. — P. 531–536.

16. *Smirnov S.* On some spectral properties of third order nonlinear boundary value problems // Math. Modelling and Anal. — 2012. — **17**, Issue 1. — P. 78–89.

17. *Taylor W. E., Jr.* Oscillation criteria for certain nonlinear fourth order equations // Int. J. Math. — 1983. — **6**, № 3. — P. 551–557.

18. *Waltman P.* Oscillation criteria for third order nonlinear differential equations // Pacif. J. Math. — 1966. — **18**. — P. 385–389.

Получено 06.11.13