

А. А. Каминский, Е. Е. Курчаков

О ЗОНЕ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОРТОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua*

Abstract. A body with crack is considered. It is assumed that the pre-fracture zone is formed ahead the crack front. The constitutive equations are proposed which link the stress vectors components in points at the opposite boundaries of the pre-fracture zone and the relative displacements vector components of these points. A criterion of local fracture is formulated. A boundary problem in displacements vector components is stated on an equilibrium of plate from the nonlinearly elastic orthotropic material with the mode I crack. A numerical solving the boundary problem shows in which way the pre-fracture zone evolves under loading the plate. The features of deformation field near the end of pre-fracture zone are revealed. The applied to plate critical forces are found that initiate the crack growth.

Key words: nonlinear elastic orthotropic material, mode I crack, fracture process zone, constitutive equations, local fracture criterion.

Введение.

Эксперименты показывают, что перед фронтом трещины образуется зона предразрушения (fracture process zone) – узкая область, в которой наблюдаются микротрещины, поры и расслоения [9].

Наличие зоны предразрушения следует учитывать при постановке краевых задач о равновесии (в том числе и предельного) тел с трещинами. Однако это сопряжено со значительными трудностями. Во многом их удастся избежать, если использовать модели зоны предразрушения. Согласно одной из них, предложенной в работе [6], зону предразрушения следует представить в виде раскрытого разреза, к поверхностям которого, совпадающим с границами зоны предразрушения, приложены противоположные векторы напряжения. Придерживаясь современной тенденции в механике разрушения, необходимо также использовать конститутивные уравнения, связывающие между собой компоненты векторов напряжения и смещения в точках на противоположных границах зоны предразрушения [7, 8].

За последнее время построению названных уравнений посвящено, как явствует из обзора [12], много работ. Все они базировались на различных предпосылках и гипотезах. В этих работах строились, преимущественно, конститутивные уравнения для зоны предразрушения перед фронтом трещины нормального отрыва и поперечного сдвига. И хотя в них получено немало важных результатов, полностью проблема не решена.

Как представляется авторам, компоненты векторов напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения должны зависеть от расстояния между этими точками. Но далеко не все конститутивные уравнения отвечают этому требованию.

Наиболее известны конститутивные уравнения, установленные в работе [14]. Аргументами в этих уравнениях выступают нормальная и приведенная тангенциальная (по отношению к трещине) компоненты вектора смещения относительно друг друга точек на противоположных границах зоны предразрушения. При этих аргументах фигурирует скалярный множитель, являющийся функцией квадратного корня из некоторого квадратичного инварианта, образованного с привлечением указанных компонент

вектора смещения. Учитывая это, можно заключить, что конститутивные уравнения Твергарда – Хатчинсона [14] удовлетворяют высказанному выше требованию лишь в случае трещины нормального отрыва.

В отличие от уравнений Твергарда – Хатчинсона [14], аргументами в уравнениях, установленных в работах [5, 11], выступают уже нормальная и тангенциальная компоненты вектора смещения, а скалярный множитель при них является функцией квадратного корня из второго инварианта, образованного с привлечением упомянутых компонент. Так что, согласно уравнениям Нидлемана – Бэнкс-Силса [5, 11], компоненты векторов напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения зависят от расстояния между этими точками.

Для учета типа трещины (трещина нормального отрыва или трещина поперечного сдвига) авторами работ [5, 11] был введен в конститутивные уравнения специальный параметр. Однако не дано строгого обоснования тому, как это было осуществлено.

В данной статье исследуем (для случая плоского напряженного состояния) зону предразрушения у вершины трещины нормального отрыва в нелинейно-упругом ортотропном материале. Используя модель зоны предразрушения, предложенную в работе [6], поступаем следующим образом.

1. Переведем внутренние напряжения, действующие по границам зоны предразрушения, в категорию внешних напряжений. Для этого границы зоны предразрушения представим как наружные поверхности.

2. Решая краевую задачу, потребуем, чтобы в конце зоны предразрушения были непрерывными напряжения и соблюдался критерий прочности.

Будем подразумевать, что компоненты векторов напряжения в точках на границах зоны предразрушения зависят от компонент вектора смещения относительно друг друга этих точек. Конститутивные уравнения установим, исходя из положений общего характера. Сделаем это аналитически. Сформулируем также критерий локального разрушения.

Воспользовавшись тензорно-линейными определяющими уравнениями, связывающими компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций, и установленными конститутивными уравнениями, поставим (в компонентах вектора перемещения) краевую задачу о равновесии пластины из нелинейно-упругого ортотропного материала, имеющей трещину нормального отрыва. Решив (численно) краевую задачу, получим зависимость раскрытия трещины в вершине от нагрузки на пластину. Проанализируем также поле деформаций возле конца зоны предразрушения. Особое внимание уделим состоянию предельного равновесия пластины, в котором становится критическим раскрытие трещины в вершине.

§1. Построение конститутивных уравнений.

Рассмотрим тело с трещиной. При нагружении данного тела перед фронтом трещины образуется зона предразрушения – узкая область, в которой начинается разрушение. Принимаем, что зона предразрушения представляет собой совокупность прямолинейных элементов, присоединенных к ее границам [1].

Обособим перед фронтом трещины точку C , переходящую вследствие деформации тела в точки C_+ и C_- на границах зоны предразрушения (рис. 1, а).

Выделим прямолинейный элемент, присоединенный к границам зоны предразрушения в точках C_+ и C_- . Затем к концам выделенного элемента приложим векторы напряжения P_+ и P_- (рис. 1, б), а к границам зоны предразрушения – векторы напряжения $-P_+$ и $-P_-$ (рис. 1, в). Каждые из этих векторов противоположны и лежат на прямой, проходящей через точки C_+ и C_- .

Предположим, что известны векторы $\overrightarrow{CC_+} \equiv \mathbf{u}^+$ и $\overrightarrow{CC_-} \equiv \mathbf{u}^-$, изображающие перемещения точек C_+ и C_- , соответственно, относительно точки C .

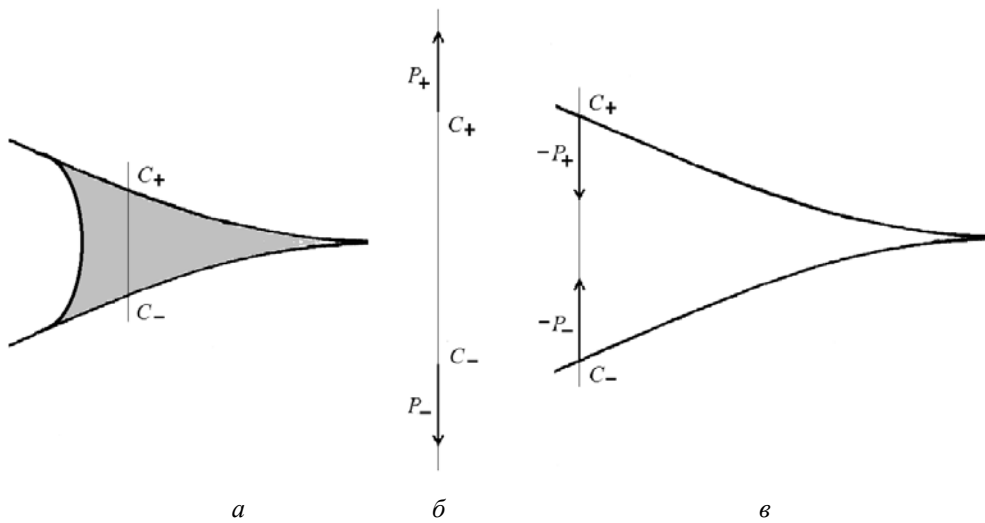


Рис. 1

Образует вектор \mathbf{v}^{+-} ($\mathbf{v}^{+-} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$), изображающий смещение точки C_+ относительно точки C_- , и вектор \mathbf{v}^{-+} ($\mathbf{v}^{-+} = \mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+$), изображающий смещение точки C_- относительно точки C_+ .

Сосредоточим внимание на выделенном элементе. Для описания состояния этого элемента можно выбрать какие-либо одни векторы напряжения и смещения — \mathbf{P}_+ и \mathbf{v}^{+-} или \mathbf{P}_- и \mathbf{v}^{-+} . Ради простоты выбранные векторы будем записывать как \mathbf{P} и \mathbf{v} . Из вышеизложенного вытекает, что векторы \mathbf{P} и \mathbf{v} коллинеарны. Более того, они равнонаправлены.

Отнесем рассматриваемое тело к системе неортогональных криволинейных координат x^1, x^2, x^3 , характеризуемой ковариантным метрическим тензором с компонентами $g_{\alpha\beta}$ и контравариантным метрическим тензором с компонентами $g^{\alpha\beta}$.

Пусть имеются взаимные базисы, представленные системами локальных базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$.

Укажем, что

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = g_{\alpha\beta}; \quad \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{\alpha\beta}. \quad (1.1)$$

При этом

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta. \quad (1.2)$$

В формулах (1.2) фигурируют символы Кронекера δ_α^β :

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 (\alpha = \beta); \\ 0 (\alpha \neq \beta). \end{cases} \quad (1.3)$$

В дальнейшем будем пользоваться правом на замену немых индексов, не оговаривая это особо.

Выразим вектор \mathbf{P} через его контравариантные компоненты:

$$\mathbf{P} = P^\gamma \mathbf{e}_\gamma. \quad (1.4)$$

Для модуля $|\mathbf{P}| \equiv P$ вектора \mathbf{P} имеем

$$P = \sqrt{\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}}. \quad (1.5)$$

Согласно формуле (1.4) и первым из формул (1.1) скалярное произведение $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ будет

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta. \quad (1.6)$$

Выразим вектор \mathbf{v} через его ковариантные компоненты:

$$\mathbf{v} = v_\gamma \mathbf{e}^\gamma. \quad (1.7)$$

Для модуля $|\mathbf{v}| \equiv v$ вектора \mathbf{v} имеем

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}. \quad (1.8)$$

Согласно формуле (1.7) и вторым из формул (1.1) скалярное произведение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ будет

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta. \quad (1.9)$$

Построим уравнения, связывающие контравариантные компоненты вектора \mathbf{P} с ковариантными компонентами вектора \mathbf{v} .

Пусть имеется орт \mathbf{i} , равнонаправленный с вектором \mathbf{P} .

Запишем вектор \mathbf{P} следующим образом:

$$\mathbf{P} = P \mathbf{i}. \quad (1.10)$$

Умножая обе части формулы (1.10) на \mathbf{e}^α , получаем

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}^\alpha = P \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}^\alpha. \quad (1.11)$$

В соответствии с формулой (1.4), формулами (1.2) и равенствами (1.3) скалярные произведения $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}^\alpha$ будут

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}^\alpha = P^\alpha. \quad (1.12)$$

Поскольку векторы \mathbf{P} и \mathbf{v} равнонаправлены, то для орта \mathbf{i} будем иметь

$$\mathbf{i} = \mathbf{v}/v. \quad (1.13)$$

Согласно формуле (1.7) и вторым из формул (1.1) скалярные произведения $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^\alpha$ будут

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta. \quad (1.14)$$

В силу формулы (1.13) и формул (1.14) скалярные произведения $\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}^\alpha$ будут

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}^\alpha = \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}. \quad (1.15)$$

Подстановка в формулы (1.11) формул (1.12) и (1.15) дает

$$P^\alpha = P \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}. \quad (1.16)$$

Следовательно, пришли к искомому уравнению.

Связь контравариантных компонент вектора \mathbf{P} с ковариантными компонентами вектора \mathbf{v} по уравнениям (1.16) будет определенной, если известна функциональная зависимость модуля P от модуля v (рис. 2).

Следуя работе [16], положим, что эта зависимость выражается формулой

$$P = P_o f(v), \quad (1.17)$$

где $f(v)$ – функция, убывающая в промежутке (o, η) .

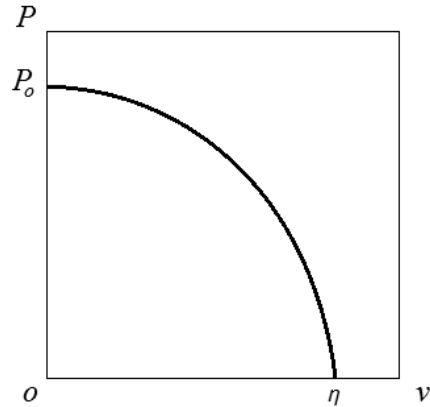


Рис. 2

Конечно, значение η модуля v вектора \mathbf{v} должно зависеть от ориентации выделенного элемента по отношению к трещине.

Потребуем, чтобы функция $f(v)$ удовлетворяла таким условиям:

$$f(v)|_{v=0} = 1; \quad \left. \frac{d}{dv} f(v) \right|_{v=0} = 0; \quad f(v)|_{v=\eta} = 0; \quad \left. \frac{d}{dv} f(v) \right|_{v=\eta} = m. \quad (1.18)$$

Для многих приложений функция $f(v)$ может быть аппроксимирована многочленом

$$f(v) = 1 - b_{k_1} v^{k_1} - b_{k_2} v^{k_2}, \quad (1.19)$$

где k_1, k_2 – целые числа ($1 < k_1 < k_2$).

Дифференцируя формулу (1.19), установим

$$\frac{d}{dv} f(v) = -k_1 b_{k_1} v^{k_1-1} - k_2 b_{k_2} v^{k_2-1}. \quad (1.20)$$

Очевидно, что первое и второе из условий (1.18) превращаются, в силу формул (1.19) и (1.20), в тождества.

Учитывая третье и четвертое из условий (1.18), найдем по формулам (1.19) и (1.20) коэффициенты b_{k_1}, b_{k_2} :

$$b_{k_1} = \frac{k_2 + m\eta}{(k_2 - k_1)\eta^{k_1}}; \quad b_{k_2} = \frac{k_1 + m\eta}{(k_1 - k_2)\eta^{k_2}}. \quad (1.21)$$

Представим функцию $f(v)$ так:

$$f(v) = [1 - \tilde{f}(v)], \quad (1.22)$$

где $\tilde{f}(v)$ – функция, возрастающая в промежутке $(0, \eta)$.

Сопоставляя формулы (1.19) и (1.22), заключим, что

$$\tilde{f}(v) = b_{k_1} v^{k_1} + b_{k_2} v^{k_2}. \quad (1.23)$$

Согласно формулам (1.17) и (1.22) уравнения (1.16) примут вид

$$P^\alpha = P_o [1 - \tilde{f}(v)] \frac{g^{\alpha\beta} v^\beta}{v}. \quad (1.24)$$

Воспользовавшись уравнениями (1.24), а также формулой (1.23) и формулами (1.21), можно вычислить контравариантные компоненты вектора \mathbf{P} . А зная их, не составит труда получить контравариантные компоненты вектора $-\mathbf{P}$.

В момент разрушения выделенного элемента модуль P вектора \mathbf{P} оказывается равным нулю. Согласно формуле (1.17) и третьему из условий (1.18), это происходит тогда, когда модуль v вектора \mathbf{v} принимает значение η . Таким образом, имеем критерий локального разрушения:

$$v = \eta. \quad (1.25)$$

Этот критерий является обобщением известного критерия критического раскрытия [13, 15].

§2. Постановка краевой задачи.

Ограничимся малыми деформациями.

Воспользуемся тензорно-линейными определяющими уравнениями, связывающими контравариантные компоненты тензора напряжений \mathbf{S} с ковариантными компонентами тензора деформаций \mathbf{D} [3]:

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (2.1)$$

Аргументом функции $\tilde{\varphi}(\Omega)$ является величина

$$\Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (2.2)$$

Инварианты Z , E и Ξ таковы:

$$Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \quad E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \quad (2.3)$$

Взаимно обратные тензоры четвертого ранга F и G характеризуют анизотропию. Эти тензоры обладают высокой симметрией. Иначе говоря, в компонентах этих тензоров можно менять местами как индексы, относящиеся к любой одной паре индексов, так и сами пары индексов.

Будем считать, что система координат x^1, x^2, x^3 , к которой отнесена пластина, является прямоугольной декартовой. Стало быть,

$$g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (2.4)$$

Выведем основные уравнения для компонент вектора перемещения u . Воспользуемся соотношениями Коши [10]:

$$D_{\varepsilon\zeta} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^\zeta}(\varepsilon, \zeta). \quad (2.5)$$

В соотношениях (2.5) предполагается симметрирование по индексам ε, ζ . Привлекая соотношения (2.5), запишем уравнения (2.1) в виде

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (2.6)$$

С учетом соотношений (2.5) второй и третий из инвариантов (2.3) будут

$$E = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta}. \quad (2.7)$$

Предположим, что материал пластины является ортотропным. Главные направления примем совпадающими с направлениями осей x^1, x^2, x^3 .

Остановимся на случае плоского напряженного состояния, полагая, что

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2); \quad (2.8)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 3; \alpha = 3, \beta = 1, 2; \alpha = 3, \beta = 3). \quad (2.9)$$

В соответствии с равенствами (2.4) первый из инвариантов (2.7) примет вид

$$E = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (2.10)$$

Так как $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$, то в силу равенств (2.9) и (2.4) из уравнений (2.6) следует, что

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \delta = 3; \gamma = 3, \delta = 1, 2). \quad (2.11)$$

Используем обозначения

$$\begin{aligned} G^{1111} &\equiv \mu_{AA}; \quad G^{1212} \equiv \mu_{BB}; \quad G^{1122} \equiv \mu_{AD}; \quad G^{2222} \equiv \mu_{DD}; \\ G^{1133} &\equiv \mu_{AF}; \quad G^{2233} \equiv \mu_{DF}; \quad G^{3333} \equiv \mu_{FF}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Согласно равенствам (2.11) и обозначениям (2.12) второй из инвариантов (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} \Xi &= \mu_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{AD} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + 2\mu_{AF} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \\ &+ \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\ &+ \mu_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + 2\mu_{DF} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \mu_{FF} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Учитывая равенства (2.9) и (2.4), на основании уравнений (2.6) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} &= \frac{1}{G^{3333}} \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + G^{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{E}{Z} \right) - \right. \\ &\quad \left. - G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Опираясь на равенства (2.4) и выражение (2.14), для уравнений (2.6) будем иметь

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} &= \left(G^{\alpha\beta 11} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3311} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(G^{\alpha\beta 22} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3322} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \\ - \tilde{\varphi}(\Omega) &\left[\left(G^{\alpha\beta 11} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3311} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(G^{\alpha\beta 22} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3322} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} \right) \frac{E}{Z} \right] \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \alpha = \beta); \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} &= G^{\alpha\beta 12} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + G^{\alpha\beta 21} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \\ - \tilde{\varphi}(\Omega) &\left(G^{\alpha\beta 12} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + G^{\alpha\beta 21} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Введем обозначения

$$\frac{G^{1133}}{G^{3333}} \equiv \xi_{AF}; \quad \frac{G^{2233}}{G^{3333}} \equiv \xi_{DF}; \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} G^{1111} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3311} &\equiv \check{\mu}_{AA}; \quad G^{1122} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{AD}; \\ G^{2211} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3311} &\equiv \check{\mu}_{DA}; \quad G^{2222} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{DD}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Воспользуемся уравнениями Навье [10]:

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (2.19)$$

Допустим, что материал пластины является однородным.

Принимая во внимание формулы (2.8) и равенства (2.9), используя уравнения (2.15), (2.16) и учитывая второе из обозначений (2.12), а также обозначения (2.17) и (2.18), на основании уравнений (2.19) установим

$$\begin{aligned} \check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + (\check{\mu}_{AD} + \mu_{BB}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^1; \\ \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + (\mu_{BB} + \check{\mu}_{DA}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q^1 &= \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^1} \left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} E \right) + \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^2} \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\ &+ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + (\check{\mu}_{AD} + \mu_{BB}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} \frac{\partial E}{\partial x^1} \right]; \\ Q^2 &= \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^1} \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^2} \left(\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} E \right) + \\ &+ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\mu_{BB} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + (\mu_{BB} + \check{\mu}_{DA}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} \frac{\partial E}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

На границах пластины, берегах трещины и границах зоны предразрушения зададим вектор напряжения \mathbf{P} с компонентами P^α .

Воспользуемся граничными условиями [10]:

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha, \quad (2.22)$$

где n_β – компоненты единичного вектора внешней нормали \mathbf{n} .

Принимая во внимание равенства (2.9), используя уравнения (2.15), (2.16) и учитывая второе из обозначений (2.12), а также обозначения (2.17) и (2.18), на основании условий (2.22) получим

$$\begin{aligned} \left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_1 + \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 &= P^1 + R^1; \\ \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) n_1 + \left(\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_2 &= P^2 + R^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R^1 &= \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} E \right) n_1 + \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 \right]; \\ R^2 &= \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) n_1 + \left(\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} E \right) n_2 \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Рассмотрим прямоугольную пластину малой толщины с трещиной по центру. С осями симметрии пластины совместим оси x^1, x^2 .

Нагрузку на пластину будем задавать симметрично относительно осей x^1, x^2 . Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь четвертой части пластины, например, располагающейся в первом квадранте (рис. 3).

Распишем уравнения (2.23) и формулы (2.24).

Для верхней границы рассматриваемой части пластины ($n_1 = 1, n_2 = 0$) уравнения (2.23) принимают вид

$$\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} = P^1 + R^1; \quad \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) = P^2 + R^2, \quad (2.25)$$

а формулы (2.24) будут

$$R^1 = \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} E \right); \quad R^2 = \tilde{\varphi}(\Omega) \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right). \quad (2.26)$$

Для боковой границы рассматриваемой части пластины ($n_1 = 0, n_2 = 1$) уравнения (2.23) принимают вид

$$\mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) = P^1 + R^1; \quad \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} = P^2 + R^2, \quad (2.27)$$

а формулы (2.24) будут

$$R^1 = \tilde{\varphi}(\Omega) \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right); \quad R^2 = \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} E \right). \quad (2.28)$$

Для верхнего берега трещины и верхней границы зоны предразрушения ($-n_1 = 1, n_2 = 0$) уравнения (2.23) принимают вид

$$-\left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) = P^1 + R^1; \quad -\mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) = P^2 + R^2, \quad (2.29)$$

а формулы (2.24) будут

$$-R^1 = \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} E \right); \quad -R^2 = \tilde{\varphi}(\Omega) \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right). \quad (2.30)$$

Поскольку исследуется зона предразрушения у вершины трещины нормального отрыва, то в точках на верхней границе рассматриваемой части пластины только компонента P^1 вектора \mathbf{P} должна быть отличной от нуля (рис. 3).

Компоненты вектора напряжения в точках на боковой границе рассматриваемой части пластины и в точках на верхнем берегу трещины примем равными нулю.

Компоненты вектора напряжения в точках на верхней границе зоны предразрушения необходимо представить, используя конститутивные уравнения, через компоненты вектора \mathbf{v} . Причем следует учесть, что компоненты вектора напряжения, фигурирующие в граничных условиях и в конститутивных уравнениях, являются компонентами противоположных векторов.

Под вектором \mathbf{v} будем понимать вектор, изображающий смещение точек на верхней границе зоны предразрушения относительно точек на нижней границе зоны предразрушения.

Очевидно, что в данной задаче

$$v_1 > 0, \quad (2.31)$$

а

$$v_2 = v_3 = 0. \quad (2.32)$$

В силу равенств (2.4), а также равенств (2.32) для скалярного произведения $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ имеем

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1 v_1. \quad (2.33)$$

Учитывая равенства (2.4), неравенство (2.31) и равенства (2.32), а также формулы (1.8) и (2.33), для первого из уравнений (1.24) получаем

$$P^1 = P_o \left[1 - \tilde{f}(v) \right], \quad (2.34)$$

а на основании второго и третьего из уравнений (1.24) установим

$$P^2 = P^3 = 0. \quad (2.35)$$

Заметим, что

$$v_1 = 2u_1. \quad (2.36)$$

Принимая во внимание неравенство (2.31), в соответствии с формулами (1.8) и (2.33) получаем

$$v = v_1. \quad (2.37)$$

При решении краевой задачи потребуется еще одна группа уравнений для компонент u_1, u_2 .

Из симметрии относительно осей x^1, x^2 следуют такие уравнения:

$$\begin{aligned} u_1(x^1, -x^2) - u_1(x^1, +x^2) &= 0; \quad u_2(x^1, -x^2) + u_2(x^1, +x^2) = 0; \\ u_1(-x^1, x^2) + u_1(+x^1, x^2) &= 0; \quad u_2(-x^1, x^2) - u_2(+x^1, x^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Из симметрии относительно оси x^2 вытекает, что в конце зоны предразрушения

$$u_1 = 0. \quad (2.39)$$

Выведем уравнение для компоненты u_2 .

Выделим около конца зоны предразрушения точку с координатами a^1, a^2 . Примем, что $u_2(x^1, x^2)$ – действительная функция, имеющая все непрерывные частные производные (до второго порядка включительно) в окрестности D точки (a^1, a^2) .

Составим кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням $x^1 - a^1, x^2 - a^2$:

$$\begin{aligned} u_2(x^1, x^2) &= u_2(a^1, a^2) + \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^\beta} \Big|_{(a^1, a^2)} (x^\beta - a^\beta) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \Big|_{(a^1, a^2)} (x^\beta - a^\beta)(x^\gamma - a^\gamma) \quad ((x^1, x^2) \in D). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Координаты конца зоны предразрушения запишем как $a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2$. С учетом этого на основании формулы (2.40) будем иметь

$$\begin{aligned} -u_2(a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2) + u_2(a^1, a^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Остается отметить, что, ввиду симметрии относительно оси x^2 , только компонента P^1 вектора \mathbf{P} в точках на верхней границе зоны предразрушения будет отличной от нуля.

§3. Дополнительные сведения.

Для содержащихся в уравнениях (2.1) компонент тензоров анизотропии F и G , как компонент взаимно обратных тензоров четвертого ранга, имеем

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta}G^{\gamma\delta\epsilon\zeta} = \delta_{\alpha}^{\epsilon}\delta_{\beta}^{\zeta} (\epsilon, \zeta). \quad (3.1)$$

В формулах (3.1) предполагается симметрирование по индексам ϵ, ζ .

Фигурирующую в уравнениях (2.1) функцию $\tilde{\varphi}(\Omega)$ примем в виде [3]

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega \in [0, \nu]; \\ \frac{\Omega - \nu - a \ln\left(\frac{\Omega - \nu}{a} + 1\right)}{\Omega} & \Omega \in [\nu, \psi]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Постоянные ν и ψ , а также коэффициент a подлежат определению в эксперименте.

Сформулируем критерии нелинейности и прочности, необходимые для решения краевой задачи.

Согласно формуле (3.2), связь контравариантных компонент тензора напряжений с ковариантными компонентами тензора деформаций по уравнениям (2.1) окажется нелинейной, как только величина Ω превысит постоянную ν , и функция $\tilde{\varphi}(\Omega)$ начнет возрастать. Таким образом, имеем критерий нелинейности:

$$\Omega = \nu. \quad (3.3)$$

Нарушение прочности произойдет тогда, когда величина Ω станет равной постоянной ψ , а функция $\tilde{\varphi}(\Omega)$ примет наибольшее значение. Следовательно, имеем критерий прочности:

$$\Omega = \psi. \quad (3.4)$$

Величина Ω может быть интерпретирована с физической точки зрения.

Укажем, что инвариант E представляет собой относительное изменение объема элемента тела. Значит, величина E^2/Z представляет собой удвоенную энергию деформации, затрачиваемую на изменение объема элемента тела.

В предположении, что контравариантные компоненты тензора напряжений и ковариантные компоненты тензора деформаций связаны между собой линейно, инвариант Ξ представляет собой удвоенную энергию деформации элемента тела.

Итак, величина Ω есть, согласно формуле (2.2), квадратный корень из удвоенной энергии, идущей на деформацию элемента тела без изменения его объема. Эта интерпретация величины Ω совпадает, по сути, с интерпретацией интенсивности деформаций, принадлежащей Хенки [4].

Покажем особенность величины Ω .

Предположим, что ковариантные компоненты тензора деформаций могут быть представлены так:

$$D_{\epsilon\zeta} = F_{\epsilon\zeta\tau\kappa}g^{\tau\kappa}\chi. \quad (3.5)$$

В выражениях (3.5) χ – некоторая переменная.

Второй из инвариантов (2.3) в силу выражений (3.5) и первого из инвариантов (2.3) будет

$$E = Z\chi. \quad (3.6)$$

Для третьего из инвариантов (2.3) в соответствии с выражениями (3.5), формулами (3.1) и первым из инвариантов (2.3) будем иметь

$$\Xi = Z\chi^2. \quad (3.7)$$

Принимая во внимание выражения (3.6) и (3.7), установим, что $\Xi - E^2/Z = 0$, и, согласно формуле (2.2), $\Omega = 0$. Это означает, что ковариантные компоненты тензора деформаций, задаваемые выражениями (3.5), не могут удовлетворять критериям (3.3) и (3.4). В этом случае тело не может ни перейти в нелинейное состояние, ни разрушиться.

Как установлено в работе [3], при нарушении прочности, когда величина Ω становится равной постоянной ψ , плотность энергии, расходуемой на деформацию элемента тела без изменения его объема, принимает значение Ψ :

$$\Psi = \nu \left(\psi - \frac{\nu}{2} \right) + a^2 \left\{ \left(\frac{\psi - \nu}{a} + 1 \right) \left[\ln \left(\frac{\psi - \nu}{a} + 1 \right) - 1 \right] + 1 \right\}. \quad (3.8)$$

§4. Числовой пример.

Исследована зона предразрушения у вершины трещины нормального отрыва в нелинейно-упругом ортотропном материале.

При решении краевой задачи использованы данные для сплава Д16, полученные в работе [2].

Компоненты тензора анизотропии F являются такими:

$$\begin{aligned} F_{1111} &= 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; & -F_{1122} &= 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; & -F_{1133} &= 0,049 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \\ F_{1212} &= 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; & F_{1313} &= 0,121 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; & F_{2222} &= 0,142 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \\ -F_{2233} &= 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; & F_{2323} &= 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; & F_{3333} &= 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}. \end{aligned}$$

На основе значений компонент тензора анизотропии F по формулам (3.1) вычислены (с учетом равенств (1.3)) компоненты тензора анизотропии G :

$$\begin{aligned} G^{1111} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{1122} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{1133} &= 2,263 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \\ G^{1212} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{1313} &= 2,066 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{2222} &= 8,781 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \\ G^{2233} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{2323} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{3333} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}. \end{aligned}$$

Постоянные ν и ψ , а также коэффициент a из формул (3.2) и (3.8) являются такими:

$$\nu = 3,25 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}; \quad \psi = 93,50 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}; \quad a = 1,1112866 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}.$$

На основе этих значений по формуле (3.8) вычислено Ψ : $\Psi = 645,97 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

Принято, что

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3; \quad m = -0,2 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}; \quad \eta = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

На основе этих значений по формулам (1.21) вычислены коэффициенты b_{k_1} , b_{k_2} :

$$b_{k_1} = 0,08 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-2}; \quad b_{k_2} = -0,008 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

В соответствии с формулой (1.23) $\tilde{f}(\nu) = 1$, если $\nu = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}$. При этом, согласно уравнению (2.34), $P^1 = 0$, т. е. будет достигнуто состояние предельного равновесия.

Координата x^2 начала зоны предразрушения (точки A) записана как x_f^2 , а конца зоны предразрушения (точки B) – как x_g^2 (рис. 3).

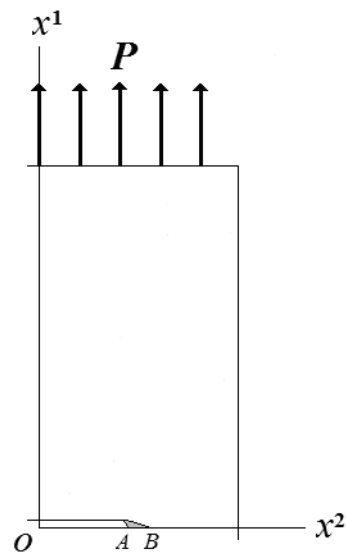


Рис. 3

Были заданы

$$x_f^2 = 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad x_g^2 = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}, 1,60 \cdot 10^{-2} \text{ м}, 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad -\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для длин трещины l_R и зоны предразрушения l_S имеем

$$l_R = x_f^2; \quad l_S = x_g^2 - x_f^2. \quad (4.1)$$

Итак, длина трещины оставалась неизменной, равной $1,50 \cdot 10^{-2}$ м, а длина зоны предразрушения согласно второй из формул (4.1) составляла $0,08 \cdot 10^{-2}$ м, $0,10 \cdot 10^{-2}$ м, $0,12 \cdot 10^{-2}$ м.

Компонента P^1 вектора \mathbf{P} в точках на верхней границе рассматриваемой части пластины выражена через параметр w нагрузки на пластину: $P^1 = w$.

Решая краевую задачу, следовало определить параметр w (из условия, что в точке B соблюдается критерий (3.4), а Ψ составляет $645,97 \cdot 10^4$ Па).

В общей сложности решение краевой задачи найдено для трех вариантов, различающихся длиной зоны предразрушения. В каждом из этих вариантов параметр w варьировали.

При решении краевой задачи (для каждого из значений параметра w) учитывали, что в точке B компонента S^{11} тензора \mathbf{S} должна удовлетворять равенству

$$S_B^{11} = P_o. \quad (4.2)$$

Не известную заранее величину P_o определяли за несколько итераций. Изначально ее задавали равной $1,90 \cdot 10^8$ Па.

Компоненту P^1 вектора \mathbf{P} в точках на верхней границе зоны предразрушения выражали, используя уравнение (2.34), через величину P_o и функцию $\tilde{f}(v)$. Кроме того, учитывали первое из равенств (2.35).

Затем по уравнениям (2.20) и (2.25), (2.27), (2.29), а также (2.38), (2.39) и (2.41) отыскивали, представив частные производные через конечные разности, компоненты u_1 , u_2 . Делали это по методу последовательных приближений, обобщающему метод Ильюшина. В первом приближении принимали, что $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$. При этом в соответствии с формулами (2.21) и (2.26), (2.28), (2.30) имели место равенства $Q^1, Q^2 = 0$ и $R^1, R^2 = 0$. Кроме того, в первом приближении полагали, что $\tilde{f}(v) = 0$. В каждом последующем приближении, одном из восьмидесяти девяти приближений, значения функции $\tilde{\varphi}(\Omega)$, величин Q^1, Q^2 и R^1, R^2 , а также функции $\tilde{f}(v)$ устанавливали на основе значений компонент u_1 , u_2 , полученных в предыдущем приближении. Для этого привлекали формулы (3.2), (2.2), первый из инвариантов (2.3), инварианты (2.10) и (2.13), выражение (2.14), формулы (2.21) и (2.26), (2.28), (2.30), а также формулы (1.23), (2.37) и (2.36).

После этого по первому из уравнений (2.15) вычисляли компоненту S^{11} тензора \mathbf{S} в точке B . Если она не удовлетворяла равенству (4.2), то величину P_o корректировали, и всю процедуру повторяли.

Учитывая формулу (2.2), первый из инвариантов (2.3), инварианты (2.10) и (2.13), проверяли соблюдение (в точке B) критерия (3.4). Если это было не так, то параметр w изменяли.

§5. Анализ полученных результатов.

В результате решения краевой задачи для различных длин зоны предразрушения определена, прежде всего, нагрузка на пластину (параметр w). Полученные значения параметра w приведены в табл. 1.

Из табл. 1 явствует, что с повышением нагрузки на пластину увеличиваются длина зоны предразрушения и, как следствие, раскрытие трещины в вершине (точке A). Иными словами, пластина стремится к состоянию предельного равновесия, в котором модуль v вектора v принимает значение η , а модуль P вектора P становится равным нулю (все это – в точке A).

По мере повышения нагрузки на пластину изменение длины зоны предразрушения становится все более значительным. Это убедительно иллюстрирует график, представленный на рис. 4.

Подобным же образом ведет себя и раскрытие трещины в вершине.

Для каждой нагрузки на пластину выявлены точки, в которых соблюдается критерий (3.3). При этом учитывали формулу (2.2), инварианты (2.10) и (2.13), выражение (2.14). Через эти точки проведены линии, являющиеся границами зоны нелинейности.

В качестве примера на рис. 5 показана зона нелинейности (затемненная область) для нагрузки на пластину, составляющей $5,9098 \cdot 10^7$ Па.

Образовавшись у вершины трещины, для которой $x^1 = 0$, а $x^2 = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м, зона нелинейности почти полностью вышла на боковую границу рассматриваемой части пластины, отстоящую от оси x^1 на $3,0 \cdot 10^{-2}$ м. Этого не произошло лишь на малой части указанной границы напротив трещины.

С повышением нагрузки на пластину зона нелинейности расширялась. Действительно, она простиралась по боковой границе рассматриваемой части пластины в пределах от $x^1 = 0,56 \cdot 10^{-2}$ м до $x^1 = 2,54 \cdot 10^{-2}$ м при $w = 5,8463 \cdot 10^7$ Па,

но в пределах от $x^1 = 0,50 \cdot 10^{-2}$ м до $x^1 = 2,64 \cdot 10^{-2}$ м при $w = 5,9098 \cdot 10^7$ Па. Умеренное расширение зоны нелинейности вполне закономерно, ибо нагрузка на пластину повышалась незначительно.

Наглядное представление об эволюции зоны предразрушения в процессе нагружения пластины дает рис. 6. Для кривых, показанных на этом рисунке, длина зоны предразрушения такова:

- 1 – $0,08 \cdot 10^{-2}$ м; 2 – $0,10 \cdot 10^{-2}$ м;
- 3 – $0,12 \cdot 10^{-2}$ м.

На рис. 6, а показано, как именно увеличивается перемещение (в направлении оси x^1) верхней границы зоны предразрушения с возрастанием длины зоны предразрушения.

Таблица 1

$l_s \cdot 10^2, \text{м}$	$w \cdot 10^{-7}, \text{Па}$
0,08	5,846375
0,10	5,903761
0,12	5,909860

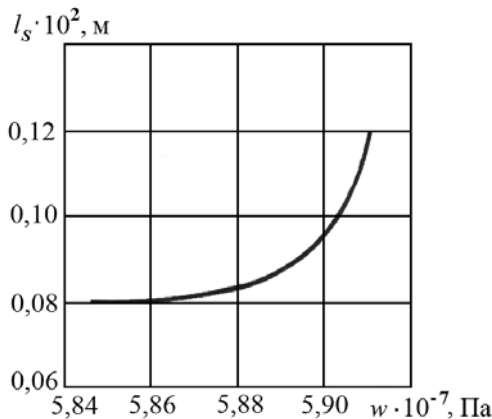


Рис. 4

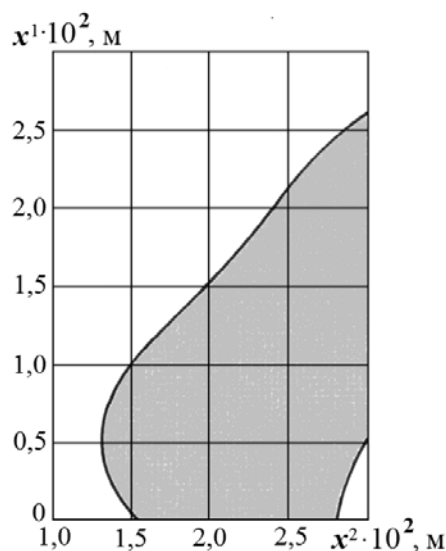


Рис. 5

Интересно, что компонента S^{11} тензора S в точке B слабо зависит от длины зоны предразрушения. В самом деле, для кривых 1, 2, 3, показанных на рис. 6, \bar{b} , она составляет $2,0026 \cdot 10^8$ Па, $2,0046 \cdot 10^8$ Па, $2,0087 \cdot 10^8$ Па, соответственно.

Согласно установленным результатам, S_B^{11} можно считать равной $2,00 \cdot 10^8$ Па, независимо от длины зоны предразрушения. В силу равенства (4.2), $P_o = 2,00 \cdot 10^8$ Па.

Зависимости компоненты u_1 вектора u и компоненты S^{11} тензора S в точке A от параметра w иллюстрируют рис. 7, a, \bar{b} , соответственно. Из этих рисунков видно, что u_1^A резко увеличивается, а S_A^{11} столь же резко уменьшается с повышением параметра w .

Для каждой длины зоны предразрушения по соотношениям (2.5) вычислены (с учетом выражения (2.14)) компоненты D_{11}, D_{22}, D_{33} тензора D в точках, расположенных возле точки B . Особый интерес вызывают значения этих компонент в самой точке B (табл. 2).

Отметим, что возрастание длины зоны предразрушения с $0,08 \cdot 10^{-2}$ м до $0,12 \cdot 10^{-2}$ м привело к увеличению D_{11}^B с $2,0235 \cdot 10^{-2}$ до $2,0311 \cdot 10^{-2}$ и уменьшению D_{22}^B с $1,8232 \cdot 10^{-2}$ до $1,8170 \cdot 10^{-2}$. При этом D_{33}^B изменилась гораздо менее заметно, уменьшившись с $-3,5356 \cdot 10^{-2}$ до $-3,5364 \cdot 10^{-2}$.

Представляется интересным тот факт, что, невзирая на заметное возрастание длины зоны предразрушения, D_{33}^B не претерпела ощутимых изменений.

Компонента D_{33} тензора D в точке B принимает минимальное значение (рис. 8). Кривые, изображенные на рис. 8, соответствуют таким длинам зоны предразрушения: 1 – $0,08 \times 10^{-2}$ м; 2 – $0,10 \cdot 10^{-2}$ м; 3 – $0,12 \cdot 10^{-2}$ м.

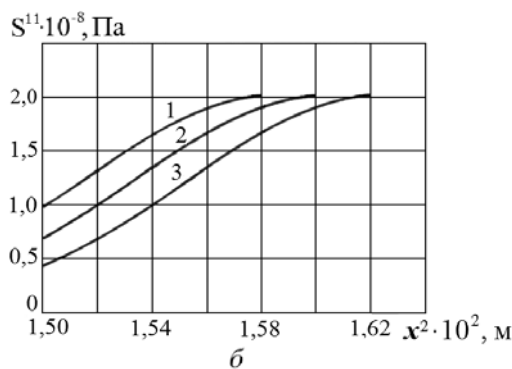
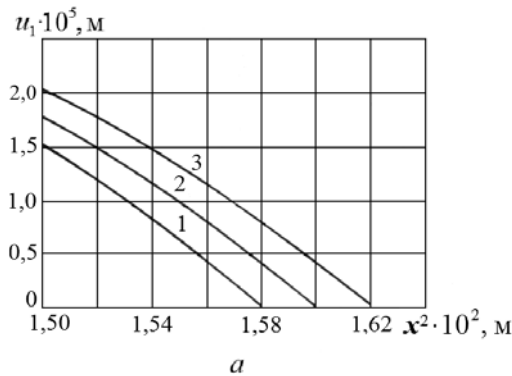


Рис. 6

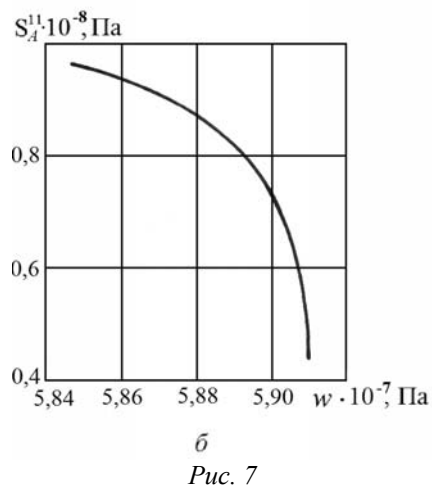
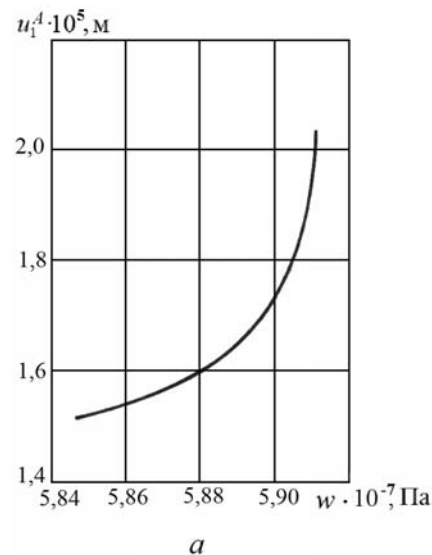


Рис. 7

Таблица 2

$l_S \cdot 10^2, \text{м}$	$D_{11}^B \cdot 10^2$	$D_{22}^B \cdot 10^2$	$D_{33}^B \cdot 10^2$
0,08	2,0235	1,8232	-3,5356
0,10	2,0281	1,8190	-3,5359
0,12	2,0311	1,8170	-3,5364

Следовательно, зная из эксперимента компоненту D_{33} тензора D в различных точках около вершины трещины, можно обнаружить точку B , установив, тем самым, длину зоны предразрушения.

Крайне важна зависимость раскрытия трещины в вершине от нагрузки на пластину, т.е. зависимость $v^A = v^A(w)$.

Значения v^A для различных значений параметра w приведены в табл. 3.

Экстраполируя зависимость $v^A = v^A(w)$, установим критическое значение параметра w , при котором пластина достигает состояния предельного равновесия.

Пусть зависимость v^A от параметра w является экспоненциальной:

$$v^A = b + c \exp(\alpha w). \quad (5.1)$$

Будем считать, что

$$v^A \Big|_{w=w_o, w_p, w_q} = v_o^A, v_p^A, v_q^A. \quad (5.2)$$

Согласно первому из условий (5.2) формула (5.1) будет

$$v_o^A = b + c \exp(\alpha w_o).$$

Отсюда находим коэффициент c :

$$c = \frac{v_o^A - b}{\exp(\alpha w_o)}. \quad (5.3)$$

Подставляя в формулу (5.1) выражение (5.3), будем иметь

$$v^A = b + (v_o^A - b) \exp[\alpha(w - w_o)]. \quad (5.4)$$

Преобразуем формулу (5.4) к виду

$$\alpha(w - w_o) = \ln \frac{v^A - b}{v_o^A - b}. \quad (5.5)$$

В соответствии с формулой (5.5),

$$\alpha = \frac{1}{w - w_o} \ln \frac{v^A - b}{v_o^A - b}. \quad (5.6)$$

Принимая во внимание второе и третье из условий (5.2), выведем на основании формулы (5.6) уравнение относительно постоянной b :

$$\frac{1}{w_p - w_o} \ln \frac{v_p^A - b}{v_o^A - b} = \frac{1}{w_q - w_o} \ln \frac{v_q^A - b}{v_o^A - b}. \quad (5.7)$$

Решением уравнения (5.7) будет $b = 3,042052 \cdot 10^{-5} \text{м}$.

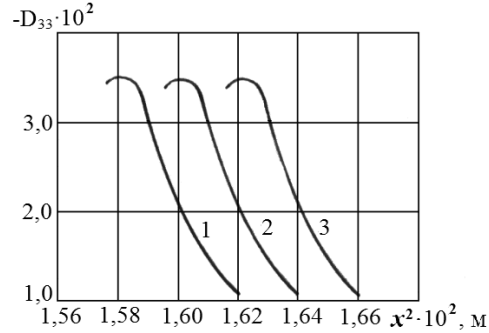


Рис. 8

Полагая, что $w = w_p$ и $v^A = v_p^A$, вычислим по формуле (5.6) коэффициент α :
 $\alpha = 101,8201 \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}$.

Из формулы (5.6) имеем

$$w = w_o + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{v^A - b}{v_o^A - b}. \quad (5.8)$$

Таблица 3

$w \cdot 10^{-7}, \text{Па}$	$v^A \cdot 10^5, \text{м}$
5,846375	3,043642
5,903761	3,590334
5,909860	4,062284

Учитывая, что для состояния предельного равновесия, согласно критерию (1.25), $v^A = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, вычислим по формуле (5.8) критическое значение параметра w . Оно составляет $5,916262 \cdot 10^7 \text{ Па}$, несколько превосходя последнее из значений параметра w , приведенных в табл. 3.

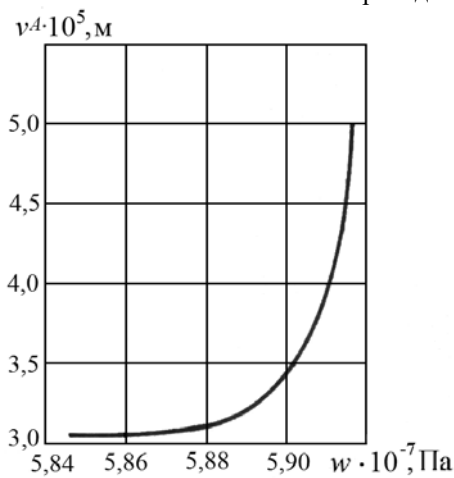


Рис. 9

На основе полученных результатов построен график, представленный на рис. 9. Как видно из этого графика, по мере повышения нагрузки на пластину раскрытие трещины в вершине резко увеличивается.

Оценим характер зависимости $v^A = v^A(w)$ по производной dv^A/dw .

Дифференцируя формулу (5.4), получаем

$$\frac{dv^A}{dw} = (v_o^A - b)\alpha \exp[\alpha(w - w_o)]. \quad (5.9)$$

Вычисления по формуле (5.9) показывают, что с повышением параметра w производная dv^A/dw стремительно увеличивается.

Действительно, если при $w = 5,846375 \cdot 10^7 \text{ Па}$ она была равна $0,16 \times 10^{-12} \text{ мПа}^{-1}$, то при $w = 5,903761 \cdot 10^7 \text{ Па}$ – $55,82 \cdot 10^{-12} \text{ мПа}^{-1}$, а при $w = 5,909860 \times 10^7 \text{ Па}$ – $103,87 \cdot 10^{-12} \text{ мПа}^{-1}$. Однако при критическом значении параметра w , составляющем $5,916262 \cdot 10^7 \text{ Па}$, производная dv^A/dw равна уже $199,35 \cdot 10^{-12} \text{ мПа}^{-1}$.

Заключение.

Рассмотрено тело с трещиной, перед фронтом которой образуется зона предразрушения. Установлены конститутивные уравнения, связывающие между собой компоненты векторов напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения и компоненты вектора смещения относительно друг друга этих точек. Сформулирован критерий локального разрушения. В компонентах вектора перемещения поставлена краевая задача о равновесии пластины из нелинейно-упругого ортотропного материала, имеющей трещину нормального отрыва. В результате численного решения краевой задачи выяснено, как именно эволюционирует зона предразрушения при нагружении пластины. Выявлены особенности поля деформаций возле конца зоны предразрушения. Найдена критическая нагрузка на пластину, приводящая к росту трещины.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто тіло із тріщиною, перед фронтом якої утворюється зона передруйнування. Встановлено конститутивні рівняння, що зв'язують між собою компоненти векторів напруження у точках на протилежних межах зони передруйнування й компоненти вектора зміщення відносно одна одній цих точок. Сформульовано критерій локального руйнування. У компонентах вектора пе-

решення поставлено крайову задачу про рівновагу пластини з нелінійно-пружного ортотропного матеріалу, що має тріщину нормального відриву. В результаті чисельного розв'язання крайової задачі з'ясовано, як саме еволюціонує зона передруйнування при навантаженні пластини. Виявлено особливості поля деформацій біля кінця зони передруйнування. Знайдено критичне зусилля на пластину, яке приводить до зростання тріщини.

1. Богданова О.С., Каминский А.А., Курчаков Е.Е. О зоне предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле // Доп. НАН України. – 2017. – № 5. – С. 25 – 33.
2. Курчаков Е.Е. Исследование связи деформаций с напряжениями для нелинейной анизотропной среды // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 9. – С. 19 – 24.
3. Курчаков Е.Е. Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела // Доп. НАН України. – 2015. – № 9. – С. 46 – 53.
4. Хенки Х. Развитие и современное состояние теории пластичности // Прикл. математика и механика. – 1940. – 4, № 3. – С. 31 – 36.
5. Banks-Sills L., Trivitzky N., Ashkenazi D., Eliasi R. A methodology for measuring interface fracture properties of composite materials // Int. J. Fract. – 1999. – 99, N 3. – P. 143 – 160.
6. Kaminsky A.A., Bogdanova O.S. Long-Term Crack-Resistance of Orthotropic Viscoelastic Plate under Biaxial Loading // Int. Appl. Mech. – 1995. – 31, N 9. – P. 747 – 753.
7. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Influence of Tension along a Mode I Crack in an Elastic Body on the Formation of a Nonlinear Zone // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 2. – P. 130 – 148.
8. Kaminsky A.A., Selivanov M.F. On Modeling of Subcritical Crack Growth in Viscoelastic Body under Point Forces // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 5. – P. 538 – 544.
9. Kurchakov E.E. Experimental Study of the Plastic Zone at the Front of a Mode I Crack // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 213 – 219.
10. Love A. Treatise on the mathematical theory of elasticity. – Cambridge: At the university press, 1927. – 674 p.
11. Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding // J. Appl. Mech. – 1987. – 54, N 3. – P. 525 – 531.
12. Park K., Paulino G. H. Cohesive zone models: A critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces // Appl. Mech. Reviews. – 2011. – 64, N 11. – P. 1 – 20.
13. Savin G.N., Kaminskii A.A. The growth of cracks during the failure of hard polymers // Sov. Appl. Mech. – 1967. – 3, N 9. – P. 22 – 25.
14. Tvergaard V., Hutchinson J.W. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – 41, N 6. – P. 1119 – 1135.
15. Wells A.A. Critical tip opening displacement as fracture criterion // Proc. Crack Propagation Symp. Granfield. – 1961. – 1. – P. 210 – 221.
16. Wittmann F.H., Rokugo K., Bruehwiler E., Mihashi H., Simonin P. Fracture energy and strain softening of concrete as determined by means of compact tension specimens // Mater. Struct. – 1988. – 21, N 1. – P. 21 – 32.

Поступила 10.10.2017

Утверждена в печать 22.11.2018