

УДК 532.5.032:532.54

СМЕШИВАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МИКРОКАНАЛАХ

В. В. Мелешко¹, А. А. Гуржий², Т. С. Краснопольская^{3†}

¹Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
ул. Владимирская, 64/13, 01601, Киев, Украина

²Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина

³Институт гидромеханики НАН Украины
ул. Желябова, 8/4, 03057, Киев, Украина

†E-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl

Получено 27.06.2017

Статья посвящена анализу процессов смешивания микрожидкостей в прямолинейных микроканалах с прямоугольным поперечным сечением и системой желобков на одной из поверхностей канала. Построена общая методика исследования течения вязкой несжимаемой жидкости в микроканалах с прямоугольным поперечным сечением и разработано модельное представление течения в приближении Стокса. Указанная методика сводится к решению уравнений Стокса для продольной компоненты скорости жидкости (постулируется течение Пуазейля) и решению бигармонического уравнения относительно функции тока для поперечных компонент скорости. На основании сформулированной корректной математической задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном микроканале построены соответствующие аналитические решения. Решение бигармонической задачи искалось в виде суперпозиции решений с симметричным и антисимметричным распределениями функции тока по обеим координатам поперечного сечения канала. Каждое из них представлялось в виде разложения по собственным функциям. Для контроля качества полученных результатов проведен анализ точности выполнения граничных условий на поверхностях микроканала. Показано, что учет пяти слагаемых аналитического решения бигармонической задачи для функции тока в поперечном сечении канала позволяет удовлетворить граничные условия с ошибкой, не превышающей 0.1% по отношению к скорости движения границ. Полученные решения для продольной и поперечных компонент поля скорости течения жидкости в рассматриваемой области использованы для анализа процесса смешивания жидкостей при различных начальных условиях. Численное моделирование хода адвекции пассивной жидкости и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными позволяют сделать вывод о хорошем соответствии модельных представлений реальному течению в микроканале.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: микрожидкость, уравнения Стокса, хаотическая адвекция

1. ВВЕДЕНИЕ

Для нашего времени характерна тенденция к эффективной миниатюризации до микрометрических размеров различных механических, жидкостных, электромеханических, тепловых систем и пр. В 1980 г. достижения в этом направлении привели к созданию новой отрасли науки и техники, известной как микроэлектромеханические системы (МЭМС) [1]. Позже, в 1990-ых гг., данная область была значительно расширена: от МЭМС-устройств перешли к изготовлению микроустройств для различных химических, биологических и биомедицинских приложений. Упомянутые системы проектировались с использованием потоков жидкости, действующих в условиях малоразмерных каналов, которые ранее практически не изучались. Это привело к созданию новой научной дисциплины, получившей название микрожидкости (microfluidics) [1–14]. Парадигма микрожидкости может быть определена как изучение простых или сложных, моно- или многофазных потоков, которые циркулируют в искусственных микросистемах, изготавливаемых с использованием новых технологий.

В микрожидкостных устройствах обычно не используются движущиеся части, что является значительным упрощением по сравнению с традиционными, немикрожидкостными. Исходя из этого, внедрение микрожидкостных систем позволило обратиться к более простым технологиям, обладающих более высокой производительностью и низкой стоимостью, чем просто МЭМС. Более того, стало возможным интегрировать несколько элементов на одном чипе и создать устройства, получившие название «лабораторий-на-чипе» [1, 8]. Отметим, что идея построения микрофабрик на основе МЭМС возникла еще в 1980-ых гг.

2. МИКРОМИКСЕРЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Важное свойство микрожидкостных течений — их ламинарность. Более того, вследствие малых размеров и скоростей, течения в микроканалах характеризуются малыми числами Рейнольдса — $Re \leq O(1)$. Поэтому они с большой точностью могут быть описаны линейными уравнениями Стокса, когда течение настолько медленно, что инерционными силами можно пренебречь, по сравнению с силами вязкости. В работе [15] в ходе анализа результатов, полученных на основе расчетов с использованием полных уравнений Навье—Стокса и линейных уравнений Стокса, была показана высокая надежность приближения Стокса для моделирования микрожидкостных течений.

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к конструированию микромиксеров для биомедицинских нужд, а также к возможности управления процессами переноса и перемешивания разного рода примесей в жидкости [2, 4–9, 15, 16]. Использование микроканала в качестве миксера оказалось достаточно привлекательным, так как он легко интегрируется с другими микропроцессорными устройствами. Следует однако отметить, что контролируемое смешивание на микроуровне — достаточно сложный и трудно реализуемый процесс. В подобных устройствах нельзя использовать движущиеся части из-за наблюдаемого эффекта их прилипания (т. е. комбинированного явления адгезии и трения). Кроме того, поскольку коэффициент диффузии большинства биоматериалов на два порядка меньше, чем у обычных жидкостей, сам процесс диффузии в микроканалах протекает существенно медленнее, чем перенос вещества по каналу. В пионерской работе [10] предложен новый тип микромиксера с двумя отдельными

входными каналами на входе, обеспечивающий полное смешивание веществ на выходе (Рис. 1).

Аналитическая теория для описания смешивания в таком миксере, получившем название «шахматный скелет рыбы», предложена в работе [12]. При этом был использован аналитический метод суперпозиции, развитый В. В. Мелешко для двумерных течений Стокса в прямоугольной полости и представленный в его работах [17–29]. Тем не менее, в работе [12] остался не выясненным ряд ключевых вопросов, связанных с использованием метода суперпозиции. Детальное исследование граничной задачи о течении Пуазейля в таком прямоугольном микроканале составляет предмет данного исследования, которое стало одной из последних прижизненных разработок профессора В. В. Мелешко. Подчеркнем, что все аналитические выкладки и сама идея применения метода суперпозиции для моделирования процесса смешивания в микроканале принадлежат В. В. Мелешко и изложены в ряде его работ [17–24].

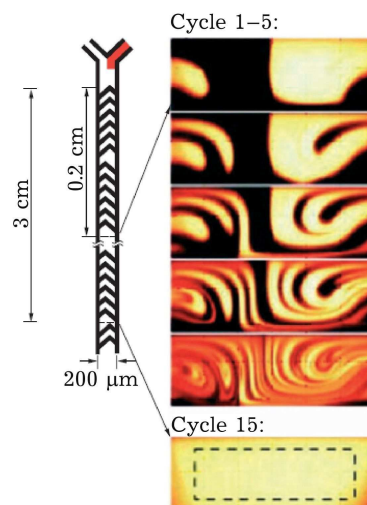


Рис. 1. Экспериментальная визуализация смешивания в микроканале двух жидкостей [9] (опубликовано с разрешения AAAS)

3. ФОРМИРОВАНИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В МИКРОКАНАЛЕ

Рассмотрим течение однородной вязкой несжимаемой жидкости внутри бесконечно прямолинейного канала ширины $2a$ и высоты $2b$, вписанного в совмещенную с центром поперечного сечения канала прямоугольную систему координат (Рис. 2). Пусть нижняя поверхность канала содержит систему периодических секций одинаковой протяженности L , каждая из которых включает в себя канавки с продольным периодом l и глубиной δ , расположенные в поперечном направлении несимметрично. Из технологии изготовления канала, изложенной в [10], следует, что период и глубина канавок намного меньше поперечного сечения канала — $l \ll a$ и $\delta \ll a$.

Для формирования течения в канале на входе первой и выходе последней секций прикладывается разность давлений с градиентом давления $\Delta p/L$. В результате возникает поток с максимальным значением осевой компоненты скорости W_{\max} в средней части поперечного сечения. Жидкость, протекающая в непосредственной близости от канавок, приобретает поперечную скорость, которая накладывается на основное (продольное) течение.

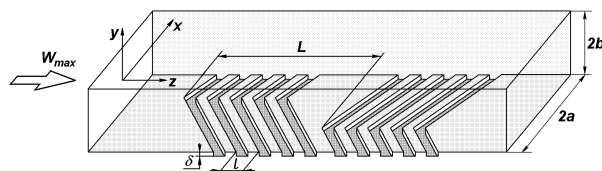


Рис. 2. Геометрия SHM микроканала [10] (опубликовано с разрешения AAAS)

Как это принято в гидромеханике, рассматриваемая ситуация характеризуется набором безразмерных масштабных величин. Одним из основных параметров, которые описывают режим движения жидкости, является число Рейнольдса Re . В данном случае, введя кинематическую вязкость среды ν , его можно определить в виде [30–33]

$$Re = \frac{2W_{\max}a}{\nu}. \quad (1)$$

Принимая во внимание характерные размеры канала — порядка (100...200) мкм — и скорости течения — порядка (0.1...1.0) мм/с, — можно заключить, что течение в микроканале для жидкостей с типичными значениями вязкости соответствует малым числам Рейнольдса — от 10^{-3} до 10^{-4} . Следовательно, для теоретического описания подобного течения несжимаемой жидкости действительно можно воспользоваться приближением Стокса [34], для которого характерно $Re \rightarrow 0$. В этом случае математическая формулировка задачи и ее решение существенно упрощаются, а анализ процесса перемешивания жидкости может быть проведен с меньшими усилиями, чем в полной постановке.

Исходя из пространственных масштабов и физических особенностей исследуемого течения, можно заключить, что трехмерное поле скорости в пределах отдельной секции зависит только от координат x и y поперечного сечения канала (см. Рис. 2). В этом случае вектор скорости течения может быть представлен в виде

$$\mathbf{U}(x, y) = iU(x, y) + jV(x, y) + kW(x, y), \quad (2)$$

где i, j, k — система единичных векторов прямоугольной системы координат, совмещенной с центром поперечного сечения на входе канала. При этом первые две компоненты поля скорости формируют течение в поперечном сечении канала, а последняя описывает течение вдоль него.

Примем внимание два обстоятельства, существенные для условий микроканала:

- масштаб скорости движения жидкости в поперечном направлении существенно меньше масштаба скорости вдоль канала;
- вязкие эффекты в рассматриваемом случае преобладают над инерционными (приближение Стокса).

Их учет позволяет сделать вывод о том, что течение в поперечном направлении слабо зависит от продольного профиля скорости в канале. Следовательно, математическая постановка задачи допускает разделение исходной трехмерной задачи на две двумерные. Первая из них связана с определением скорости $W(x, y)$ течения вязкой жидкости вдоль прямолинейного канала с прямоугольным поперечным сечением. В рамках второй задачи определяются компоненты $U(x, y)$ и $V(x, y)$ проекций скорости течения в поперечном сечении для каждого сегмента канала. Результирующее поле скорости определяется как суперпозиция этих двух полученных решений.

3.1. Вывод уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса

Течение вязкой однородной несжимаемой жидкости с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν удовлетворяет уравнению движения Навье—Стокса и уравнению нераз-

рывности, векторная форма записи которых имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{F}, \quad (3)$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — поле скорости течения; $p(\mathbf{r}, t)$ — давление; $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ — поле внешних сил в среде; ∇ — оператор градиента; Δ — оператор Лапласа. В дальнейшем будем считать, что течение жидкости вызвано исключительно действием внешних потенциальных сил:

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi, \quad (5)$$

где $\Phi(r, t)$ потенциал внешних сил.

Если рассматривается течение, в котором вязкие силы в жидкости преобладают над инерционными, то левой частью в уравнении (3) можно пренебречь. Уравнение Навье—Стокса с учетом соотношения (5) существенно упрощается:

$$\nabla(p - \rho\Phi) = \mu \Delta \mathbf{U}. \quad (6)$$

Здесь $\mu = \rho\nu$ — динамическая вязкость жидкости. Последнее уравнение получило название уравнения Стокса, а приближение, в котором оно было получено, — приближения Стокса [32, 34]. В двумерном случае векторное уравнение (6) в прямоугольной системе координат (x, y) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(p - \rho\Phi) = \mu \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(p - \rho\Phi) = \mu \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right\}, \quad (8)$$

где $U(x, y)$ и $V(x, y)$ — проекции поля скорости течения на координатные оси Ox и Oy соответственно. Если уравнение (7) продифференцировать по координате y , а (8) — по координате x и определить их разность, можно получить уравнение, связывающее компоненты поля скорости течения вязкой жидкости:

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (9)$$

Двумерные течения удобно рассматривать в терминах функции тока $\Psi(x, y)$, связывающей проекции поля скорости течения следующими выражениями [32, 33]:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (10)$$

Подстановка формулы (10) в уравнение (9) приводит к соотношению

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = 0, \quad (11)$$

которое получило название бигармонического уравнения для функции тока. Часто это уравнение записывают через оператор Лапласа:

$$\Delta\Delta\Psi = 0. \quad (12)$$

Для однозначного определения поля скорости течения жидкости бигармоническое уравнение (12) необходимо дополнить граничными условиями на твердых поверхностях [30–32]:

$$\Psi|_S = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_S = U_S, \quad (13)$$

где $\partial\Psi/\partial n$ — производная функции тока в направлении, перпендикулярном к твердой поверхности.

Бигармоническое уравнение линейно относительно функции тока. Следовательно, любое сложное движение жидкости в приближении Стокса можно представить в виде суперпозиции простых движений, допускающих аналитическое или численно-аналитическое решения.

3.2. Определение продольной компоненты скорости течения в прямоугольном канале

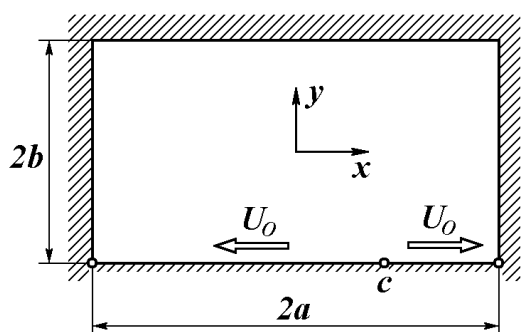


Рис. 3. Геометрия канала в поперечном сечении

Рассмотрим продольное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с размерами $2a \times 2b$ в прямоугольной системе координат, совмещенной с центром поперечного сечения (Рис. 3). Движение жидкости формируется постоянным градиентом давления dp/dz в продольном направлении канала и определяется уравнением Стокса (3) и уравнением несжимаемости (4).

Для однородной вязкой жидкости в случае отсутствия внешних сил уравнение Стокса сводится к одному скалярному

уравнению [34]

$$\frac{dp}{dz} = \mu \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\} \quad (14)$$

относительно компоненты скорости $W(x, y)$ с граничными условиями

$$W(\pm a, y) = 0, \quad W(x, \pm b) = 0. \quad (15)$$

Для удобства записи в дальнейшем введем обозначение

$$P_0 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (16)$$

Решение динамической задачи (14), (15) будем искать в виде суперпозиции однородного $\tilde{W}(x, y)$ и неоднородного $W^*(x, y)$ решений уравнения (14):

$$W(x, y) = \tilde{W}(x, y) + W^*(x, y). \quad (17)$$

Неоднородное решение задачи найдем путем последовательного интегрирования уравнения

$$\frac{d^2 W^*}{dy^2} = P_0, \quad (18)$$

в результате чего получим выражение

$$W^* = P_0 \frac{y^2}{2} + Ay + B, \quad (19)$$

с произвольными постоянными интегрирования A и B . Подстановка выражения (19) в граничные условия (15) приводит к системе двух линейных уравнений:

$$P_0 \frac{b^2}{2} + Ab + B = 0, \quad (20)$$

$$P_0 \frac{b^2}{2} - Ab + B = 0,$$

имеющих решение

$$A = 0, \quad B = -P_0 \frac{b^2}{2}. \quad (21)$$

Таким образом, неоднородное решение задачи можно представить как

$$W^*(x, y) = P_0 \frac{y^2 - b^2}{2}. \quad (22)$$

Однородное решение задачи найдем в виде бесконечной суммы

$$\tilde{W}(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{\operatorname{ch} \beta_l x}{\operatorname{ch} \beta_l a} \cos \beta_l y, \quad \beta_l = \frac{2l-1}{2b} \pi, \quad (23)$$

где A_l — неизвестные коэффициенты. Подстановка выражения (23) в граничные условия (15) с учетом неоднородного решения (22) приводит к равенству

$$\tilde{W}(a, y) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \cos \beta_l y = -P_0 \frac{y^2 - b^2}{2}. \quad (24)$$

Умножим левую и правую части последнего соотношения на $\cos \beta_k y$ и проинтегрируем по всей границе $-b < y < b$. В результате получим

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l \int_{-b}^b \cos \beta_l y \cos \beta_k y dy = P_0 \frac{b^2}{2} \int_{-b}^b \cos \beta_k y dy - \frac{P_0}{2} \int_{-b}^b y^2 \cos \beta_k y dy. \quad (25)$$

Отсюда определяются значения неизвестных коэффициентов, входящих в формулу (23):

$$A_l = (-1)^{l+1} \frac{2P_0}{b\beta_l^3}. \quad (26)$$

С учетом проведенных преобразований, запишем распределение продольной проекции поля скорости течения вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с граничными условиями (15) в следующем окончательном виде:

$$W(x, y) = P_0 \frac{y^2 - b^2}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{2P_0}{b\beta_l^3} \frac{\operatorname{ch} \beta_l x}{\operatorname{ch} \beta_l a} \cos \beta_l y. \quad (27)$$

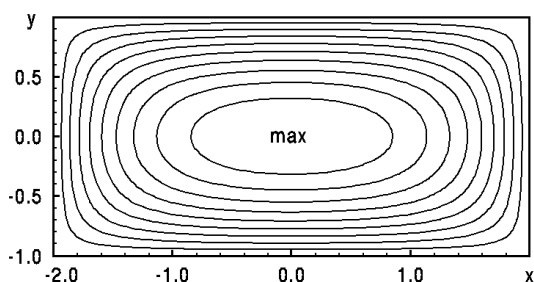


Рис. 4. Распределение продольной компоненты скорости в поперечном сечении прямоугольного канала

Рассмотрим в качестве примера прямоугольный канал с $a/b = 2$ и единичной нормированной максимальной скоростью на оси канала. Для ее достижения нужно приложить нормированное давление $P_0 = 2.19545$ [19]. Результаты численных расчетов показаны на Рис. 4, на котором нанесены изолинии, соответствующие одинаковым значениям продольной скорости с дискретностью $\Delta W/W_{\max} = 0.1$. Из графика видно, что распределение продольной проекции скорости обладает симметрией и

имеет нулевое значение на твердых поверхностях. Течение достигает максимального значения скорости в центре поперечного сечения канала. Заметим, что бесконечные суммы в выражении (27) обладают достаточно быстрой сходимостью, порядка l^{-3} . Исследования показали, что, если учитывать только первые пять слагаемых в бесконечной сумме из уравнения (27), погрешность выполнения граничных условий не превышает 0.2% от значения W_{\max} .

3.3. Поперечные компоненты скорости течения жидкости

Рассмотрим медленное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямолинейном канале с поперечным сечением $2a \times 2b$, при котором часть нижней границы ($-a < x < c$) движется с постоянной скоростью в положительном направлении оси Ox , а другая ее часть ($c < x < a$) перемещается с той же скоростью в отрицательном направлении (через c обозначена координата точки сопряжения движущихся границ). Иными словами, моделируется двухмерное движение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной полости, в которой левая и правая части нижней границы двигаются с одинаковыми по модулю скоростями, но в противоположных направлениях.

Решение соответствующей динамической задачи сводится к решению бигармонического уравнения относительно функции тока (12) со следующими граничными условиями на твердых поверхностях [17–20]:

$$\Psi(\pm a, y) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (28)$$

$$\Psi(x, \pm b) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{y=\pm b} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=-b} = \begin{cases} U_0 & \text{при } x < c, \\ -U_0 & \text{при } x > c. \end{cases}$$

Здесь U_0 — модуль скорости движения в поперечном направлении границы, которая определяется системой канавок на нижней поверхности микроканала.

Распределение функции тока в таком течении представим в виде суперпозиции четырех функций тока [27, 29]

$$\Psi(x, y) = A\Psi_1(x, y) + B\Psi_2(x, y) + C\Psi_3(x, y) + D\Psi_4(x, y). \quad (30)$$

Здесь $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ — функции тока течений, являющиеся четными по координате Ox и одновременно четными или нечетными по координате Oy соответственно; $\Psi_3(x, y)$ и $\Psi_4(x, y)$ — функции тока течений, являющиеся нечетными по координате Ox и одновременно четными и нечетными по координате Oy соответственно. В приведенном выражении A, B, C и D — весовые коэффициенты. Поля скоростей, соответствующие указанным функциям тока, — векторные. Каждое из них характеризуется двумя компонентами, у которых четность и нечетность по координатам не совпадают, так как выполнение условий (10) изменяет четность (нечетность) функции тока на нечетность (четность) компоненты поля скоростей.

Рассмотрим подробно решение задачи по определению первой функции тока (см. Рис. 5а). Течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной полости описывается функцией тока, удовлетворяющей бигармоническому уравнению и граничным условиям

$$\Psi_1(\pm a, y) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (31)$$

$$\Psi_1(x, \pm b) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = \begin{cases} \pm U_0^{(1)} & \text{при } |x| \leq c, \\ 0 & \text{при } c < |x| \leq a. \end{cases}$$

Решение этой бигармонической задачи будем искать в виде

$$\Psi_1(x, y) = a \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{\beta_l} Y_l^{(1)} \left(a \operatorname{th} \beta_l a \frac{\operatorname{ch} \beta_l x}{\operatorname{ch} \beta_l a} - x \frac{\operatorname{sh} \beta_l x}{\operatorname{ch} \beta_l a} \right) \cos \beta_l y -$$

$$- b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\alpha_m} X_m^{(1)} \left(b \operatorname{th} \alpha_m b \frac{\operatorname{ch} \alpha_m y}{\operatorname{ch} \alpha_m b} - y \frac{\operatorname{sh} \alpha_m y}{\operatorname{ch} \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x, \quad (32)$$

где $\alpha_m = (2m - 1)\pi/(2a)$, $\beta_l = (2l - 1)\pi/(2b)$. Подстановка этого выражения в граничные условия (31) с учетом тождеств, приведенных в [27–29], приводит к линейной алгебраической системе уравнений

$$X_m^{(1)} b \Delta_1(\alpha_m b) - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{(1)} \frac{4\alpha_m^2 \beta_l}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} = (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(1)}}{a} \sin \alpha_m c, \quad (33)$$

$$Y_l^{(1)} a \Delta_1(\beta_l a) - \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(1)} \frac{4\beta_m^2 \alpha_l}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} = 0$$

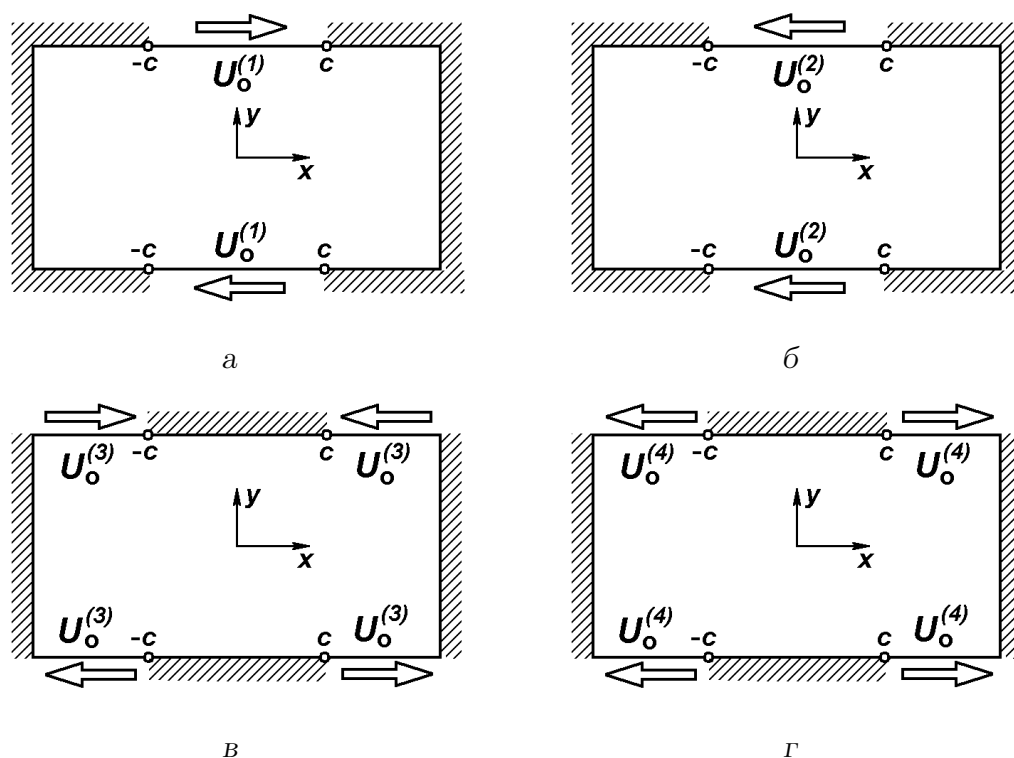


Рис. 5. Граничные условия для разных задач функции тока в прямоугольной полости с учетом четности и нечетности скоростей

относительно неизвестных $X_m^{(1)}$ и $Y_l^{(1)}$. Здесь использовано обозначение

$$\Delta_1(\xi) = \operatorname{th} \xi + \frac{\xi}{\operatorname{ch}^2 \xi}.$$

Решение (33) обладает слабой сходимостью коэффициентов $X_m^{(1)}$ и $Y_l^{(1)}$, поскольку в правой части системы стоит неубывающая знакопеременная функция.

Асимптотическое поведение решения значительно улучшается при введении замены

$$X_m^{(1)} = x_m^{(1)} + (-1)^{m-1} \frac{2U_0}{ab} \sin \alpha_m c, \quad (34)$$

$$Y_l^{(1)} = y_l^{(1)}.$$

В этом случае бесконечная система уравнений (33) может быть сведена к конечной алгебраической системе уравнений

$$\begin{aligned} x_m^{(1)} b \Delta_1(\alpha_m b) - \sum_{l=1}^L y_l^{(1)} \frac{4\alpha_m^2 \beta_l}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} &= (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(1)}}{a} [1 - \Delta_1(\alpha_m b)] \sin \alpha_m c, \\ y_l^{(1)} a \Delta_1(\beta_l a) - \sum_{m=1}^M x_m^{(1)} \frac{4\beta_l^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} &= \frac{8U_0^{(1)} \beta_l^2}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\alpha_m}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} \sin \alpha_m c, \end{aligned} \quad (35)$$

решение, которой обладает быстрой сходимостью. Анализ показывает, что для достижения приемлемой точности при проведении вычислений можно положить $L = M = 5$.

Таким образом, распределение функции тока в первой задаче записывается в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) = & a \sum_{l=1}^L \frac{(-1)^{l-1}}{\beta_l} y_l^{(1)} \left(a \operatorname{th} \beta_l a \frac{\operatorname{ch} \beta_l x}{\operatorname{ch} \beta_l a} - x \frac{\operatorname{sh} \beta_l x}{\operatorname{ch} \beta_l a} \right) \cos \beta_l y - \\ & - b \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1}}{\alpha_m} x_m^{(1)} \left(b \operatorname{th} \alpha_m b \frac{\operatorname{ch} \alpha_m y}{\operatorname{ch} \alpha_m b} - y \frac{\operatorname{sh} \alpha_m y}{\operatorname{ch} \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x - \Psi_1^*, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\Psi_1^* = -\frac{U_0}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ B_r^{(-)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_{1r}^{(1)} - \operatorname{arctg} \Phi_{1r}^{(2)} \right) + B_r^{(+)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_{1r}^{(3)} - \operatorname{arctg} \Phi_{1r}^{(4)} \right) \right\}.$$

В представлении для Ψ_1^* использованы следующие обозначения:

$$B_r^{(-)} = 2rb + b - y; \quad B_r^{(+)} = 2rb + b + y;$$

$$\Phi_{1r}^{(1)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi(c-x)}{2a} \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi B_r^{(-)}}{2a} \right]}; \quad \Phi_{1r}^{(2)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi(c+x)}{2a} \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi B_r^{(-)}}{2a} \right]};$$

$$\Phi_{1r}^{(3)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi(c-x)}{2a} \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi B_r^{(+)}}{2a} \right]}; \quad \Phi_{1r}^{(4)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi(c+x)}{2a} \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi B_r^{(+)}}{2a} \right]}.$$

Отметим, что слагаемое Ψ_1^* было получено после подстановки соотношений (34) в уравнение (32) с последующим изменением порядка суммирования и использования вспомогательных тождеств, см. [27–29].

Функция тока $\Psi_2(x, y)$ также является решением бигармонического уравнения при удовлетворении граничных условий, соответствующих Рис. 5б:

$$\begin{aligned} \Psi_2(\pm a, y) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0, \\ \Psi_2(x, \pm b) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = \begin{cases} -U_0^{(2)} & \text{при } |x| \leq c, \\ 0 & \text{при } c < |x| \leq a. \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Решение этой задачи, четной по координате Ox и нечетной по координате Oy , ищем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, y) = & a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\delta_k} Y_k^{(2)} \left(a \operatorname{th} \delta_k a \frac{\operatorname{ch} \delta_k x}{\operatorname{ch} \delta_k a} - x \frac{\operatorname{sh} \delta_k x}{\operatorname{ch} \delta_k a} \right) \sin \delta_k y + \\ & + b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} X_m^{(2)} \left(b \operatorname{cth} \alpha_m b \frac{\operatorname{sh} \alpha_m y}{\operatorname{sh} \alpha_m b} - y \frac{\operatorname{ch} \alpha_m y}{\operatorname{sh} \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\delta_k = \pi k/b$. Подстановка этого выражения в граничные условия (37) приводит к линейной алгебраической системе уравнений

$$\begin{aligned} X_m^{(2)} b \Delta_2(\alpha_m b) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(2)} \frac{4\alpha_m^2 \delta_k}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(2)}}{a} \sin \alpha_m c, \\ Y_k^{(2)} a \Delta_1(\delta_k a) + \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(2)} \frac{4\delta_k^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\Delta_2(\xi) = \operatorname{cth} \xi - \frac{\xi}{\operatorname{sh}^2 \xi}.$$

Сходимость решения системы (39) можно улучшить, используя замену

$$\begin{aligned} X_m^{(2)} &= x_m^{(2)} + (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(2)}}{ab} \sin \alpha_m c, \\ Y_k^{(2)} &= y_k^{(2)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Преобразования, аналогичные проведенным для первой задачи, позволяют представить систему уравнений (39) в виде

$$\begin{aligned} x_m^{(2)} \Delta_2(\alpha_m b) + \sum_{k=1}^K y_k^{(2)} \frac{4\alpha_m^2 \delta_k}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(2)}}{a} [1 - \Delta_2(\alpha_m b)] \sin \alpha_m c, \\ y_k^{(2)} \Delta_1(\delta_k a) + \sum_{m=1}^M x_m^{(2)} \frac{4\delta_k^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= \frac{8U_0^{(1)} \delta_k^2}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} \sin \alpha_m c, \end{aligned} \quad (41)$$

решение которой обладает быстрой сходимостью.

Окончательно распределение соответствующей функции тока записывается как

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, y) &= a \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^l}{\delta_k} y_k^{(2)} \left(a \operatorname{th} \delta_k a \frac{\operatorname{ch} \delta_k x}{\operatorname{ch} \delta_k a} - x \frac{\operatorname{sh} \delta_k x}{\operatorname{ch} \delta_k a} \right) \sin \delta_k y + \\ &+ b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} x_m^{(2)} \left(b \operatorname{cth} \alpha_m b \frac{\operatorname{sh} \alpha_m y}{\operatorname{sh} \alpha_m b} - y \frac{\operatorname{ch} \alpha_m y}{\operatorname{sh} \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x - \Psi_2^*, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\Psi_2^* = \frac{U_0}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ B_r^{(-)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_{2r}^{(1)} + \operatorname{arctg} \Phi_{2r}^{(2)} \right) - B_r^{(+)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_{2r}^{(3)} + \operatorname{arctg} \Phi_{2r}^{(4)} \right) \right\},$$

причем $\Phi_{2r}^{(j)} = \Phi_{1r}^{(j)}$. Последнее слагаемое в выражении (42) было получено после подстановки замены переменных (40) в уравнение (38) с последующим изменением порядка суммирования и использования тождеств, приведенных в [27–29].

Функция тока $\Psi_3(x, y)$ является решением бигармонической задачи со следующими граничными условиями (см. Рис. 5В):

$$\Psi_3(\pm a, y) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (43)$$

$$\Psi_3(x, \pm b) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = \begin{cases} \pm U_0^{(3)} & \text{при } -a \leq x \leq -c, \\ 0 & \text{при } |x| \leq c, \\ \mp U_0^{(3)} & \text{при } c < |x| \leq a. \end{cases}$$

Как и в предыдущих случаях, решение третьей задачи ищем в виде

$$\Psi_3(x, y) = a \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\beta_l} Y_l^{(3)} \left(a \operatorname{cth} \beta_l a \frac{\operatorname{sh} \beta_l x}{\operatorname{sh} \beta_l a} - x \frac{\operatorname{ch} \beta_l x}{\operatorname{sh} \beta_l a} \right) \cos \beta_l y -$$

$$- b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma_n} X_n^{(3)} \left(b \operatorname{th} \gamma_n b \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} - y \frac{\operatorname{sh} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} \right) \sin \gamma_n x, \quad (44)$$

где $\gamma_n = \pi n/a$ и $\beta_l = (2l-1)\pi/(2b)$. Подстановка приведенного выражения в граничные условия (43) приводит к линейной алгебраической системе уравнений

$$X_n^{(3)} b \Delta_1(\gamma_n b) - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{(3)} \frac{4\gamma_n^2 \beta_l}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} = \frac{2U_0^{(3)}}{a} [1 - (-1)^n \cos \gamma_n c], \quad (45)$$

$$Y_l^{(3)} a \Delta_2(\beta_l a) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(3)} \frac{4\beta_l^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} = 0.$$

Асимптотическое поведение решения $X_n^{(3)}$ и $Y_l^{(3)}$ системы уравнений (45) значительно улучшится при введении замены переменных

$$X_n^{(3)} = X_3 + x_n^{(3)} - (-1)^n \frac{2U_0^{(3)}}{ab} \cos \gamma_n c, \quad (46)$$

$$Y_l^{(3)} = Y_3 + y_l^{(3)},$$

где

$$X_3 = 2 \frac{\pi^2 U_0}{ab(\pi^2 - 4)}, \quad Y_3 = 4 \frac{\pi U_0}{ab(\pi^2 - 4)}.$$

Подробности определения постоянных X_3 и Y_3 можно найти в [27].

В этом случае бесконечная система уравнений (45) может быть сведена к конечной

алгебраической системе

$$\begin{aligned}
 x_n^{(3)} b \Delta_1(\gamma_n b) - \sum_{l=1}^L y_l^{(3)} \frac{4\gamma_n^2 \beta_l}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} &= \frac{2U_0^{(3)}}{a} - X_3 b \Delta_1(\gamma_n b) - \\
 - (-1)^n \frac{2U_0^{(3)}}{a} [1 - \Delta_1(\gamma_n b)] \cos \gamma_n c + 4Y_3 \gamma_n^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_l}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2}, & \\
 y_l^{(3)} a \Delta_2(\beta_l a) - \sum_{n=1}^N x_n^{(3)} \frac{4\beta_l^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} &= -Y_3 a \Delta_2(\beta_l a) - \\
 - \frac{8U_0^{(3)} \beta_l^2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} \cos \gamma_n c + 4X_3 \beta_l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2}, &
 \end{aligned} \tag{47}$$

решение которой обладает быстрой сходимостью.

Результирующее распределение функции тока имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Psi_3(x, y) = a \sum_{l=1}^L \frac{(-1)^l}{\beta_l} y_l^{(3)} \left(a \operatorname{cth} \beta_l a \frac{\operatorname{sh} \beta_l x}{\operatorname{sh} \beta_l a} - x \frac{\operatorname{ch} \beta_l x}{\operatorname{sh} \beta_l a} \right) \cos \beta_l y - a Y_3 S_\beta^{(3)} - \\
 - b \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\gamma_n} x_n^{(3)} \left(b \operatorname{th} \gamma_n b \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} - y \frac{\operatorname{sh} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} \right) \sin \gamma_n x + b X_3 S_\gamma^{(3)} - S_C^{(3)}, &
 \end{aligned} \tag{48}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 S_\beta^{(3)} &= \frac{b}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ A_r^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_{3r}^{(1)} - A_r^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_{3r}^{(2)} \right\}; \\
 S_\gamma^{(3)} &= \frac{a}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ B_r^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_{3r}^{(4)} - B_r^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_{3r}^{(4)} \right\}; \\
 S_C^{(3)} &= \frac{U_0}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ B_r^{(-)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_{3r}^{(5)} + \operatorname{arctg} \Phi_{3r}^{(6)} \right) + B_r^{(+)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_{3r}^{(7)} + \operatorname{arctg} \Phi_{3r}^{(8)} \right) \right\};
 \end{aligned}$$

$$A_r^{(-)} = 2ra + a - x; \quad A_r^{(+)} = 2ra + a + x;$$

$$\Phi_{3r}^{(1)} = \frac{\cos \left[\frac{\pi y}{2b} \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi A_r^{(-)}}{2b} \right]}; \quad \Phi_{3r}^{(5)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi(x-c)}{a} \right]}{\exp \left[\frac{\pi B_r^{(-)}}{a} \right] - \cos \left[\frac{\pi(x-c)}{a} \right]};$$

$$\Phi_{3r}^{(2)} = \frac{\cos \left[\frac{\pi y}{2b} \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{\pi A_r^{(+)}}{2b} \right]}; \quad \Phi_{3r}^{(6)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi(x+c)}{a} \right]}{\exp \left[\frac{\pi B_r^{(-)}}{a} \right] - \cos \left[\frac{\pi(x+c)}{a} \right]};$$

$$\Phi_{3r}^{(3)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi x}{a} \right]}{\exp \left[\frac{\pi B_r^{(-)}}{a} \right] + \cos \left[\frac{\pi x}{a} \right]}; \quad \Phi_{3r}^{(7)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi(x-c)}{a} \right]}{\exp \left[\frac{\pi B_r^{(+)}}{a} \right] - \cos \left[\frac{\pi(x-c)}{a} \right]};$$

$$\Phi_{3r}^{(4)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi x}{a} \right]}{\exp \left[\frac{\pi B_r^{(+)}}{a} \right] + \cos \left[\frac{\pi x}{a} \right]}; \quad \Phi_{3r}^{(8)} = \frac{\sin \left[\frac{\pi(x+c)}{a} \right]}{\exp \left[\frac{\pi B_r^{(+)}}{a} \right] - \cos \left[\frac{\pi(x+c)}{a} \right]}.$$

Как и ранее, дополнительные слагаемые в уравнении (48) были получены после подстановки (47) в уравнение (44). При этом в выражениях изменялся порядок суммирований и использовались тождества, приведенные в [27–29].

Функция тока $\Psi_4(x, y)$ находится как решение бигармонического уравнения при удовлетворении граничных условий (см. Рис. 5г):

$$\Psi_4(\pm a, y) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_4}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0,$$

$$\Psi_4(x, \pm b) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = \begin{cases} -U_0^{(4)} & \text{при } -a \leq x \leq -c, \\ 0 & \text{при } |x| \leq c, \\ U_0^{(4)} & \text{при } c < |x| \leq a. \end{cases} \quad (49)$$

Оно имеет следующий вид:

$$\Psi_4(x, y) = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\delta_k} Y_k^{(4)} \left(a \operatorname{cth} \delta_k a \frac{\operatorname{sh} \delta_k x}{\operatorname{sh} \delta_k a} - x \frac{\operatorname{ch} \delta_k x}{\operatorname{sh} \delta_k a} \right) \sin \delta_k y +$$

$$+ b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma_n} X_n^{(4)} \left(b \operatorname{cth} \gamma_n b \frac{\operatorname{sh} \gamma_n y}{\operatorname{sh} \gamma_n b} - y \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{sh} \gamma_n b} \right) \sin \gamma_n x. \quad (50)$$

Подстановка уравнения (50) в граничные условия (49) дает

$$X_n^{(4)} b \Delta_2(\gamma_n b) - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(4)} \frac{4\gamma_n^2 \delta_k}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} = \frac{2U_0^{(3)}}{a} [1 - (-1)^n \cos \gamma_n c],$$

$$Y_l^{(4)} a \Delta_2(\delta_k a) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(4)} \frac{4\delta_k^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} = 0. \quad (51)$$

Сходимость решения системы уравнений (51) улучшается при введении замены переменных

$$X_n^{(4)} = X_4 + x_n^{(4)} - (-1)^n \frac{2U_0^{(4)}}{ab} \cos \gamma_n c, \quad Y_k^{(4)} = Y_4 + y_k^{(4)}. \quad (52)$$

В рассматриваемом случае $X_3 = X_4$ и $Y_3 = Y_4$ (см. подробности в [27]).

Подстановка (52) изменяет вид алгебраической системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 x_n^{(4)} b \Delta_2(\gamma_n b) - \sum_{k=1}^K y_k^{(k)} \frac{4\gamma_n^2 \delta_k}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} &= \frac{2U_0^{(4)}}{a} - X_4 b \Delta_2(\gamma_n b) - \\
 - (-1)^n \frac{2U_0^{(4)}}{a} [1 - \Delta_2(\gamma_n b)] \cos \gamma_n c + 4Y_4 \gamma_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2}, & \\
 y_l^{(4)} a \Delta_2(\delta_k a) - \sum_{n=1}^N x_n^{(4)} \frac{4\delta_k^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} &= -Y_4 a \Delta_2(\delta_k a) - \\
 - \frac{8U_0^{(4)} \delta_k^2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} \cos \gamma_n c + 4X_3 \delta_k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2}. &
 \end{aligned} \tag{53}$$

В конечном итоге распределение функции тока записывается как

$$\begin{aligned}
 \Psi_4(x, y) &= a \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1}}{\delta_k} y_k^{(4)} \left(\operatorname{acth} \delta_k a \frac{\operatorname{sh} \delta_k x}{\operatorname{sh} \delta_k a} - x \frac{\operatorname{ch} \delta_k x}{\operatorname{sh} \delta_k a} \right) \sin \delta_k y + a Y_4 S_{\beta}^{(4)} + \\
 + b \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\gamma_n} x_n^{(4)} \left(b \operatorname{ctch} \gamma_n b \frac{\operatorname{sh} \gamma_n y}{\operatorname{sh} \gamma_n b} - y \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{sh} \gamma_n b} \right) \sin \gamma_n x - b X_4 S_{\gamma}^{(4)} + S_C^{(4)}, &
 \end{aligned} \tag{54}$$

где

$$\begin{aligned}
 S_{\beta}^{(4)} &= \frac{b}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ A_r^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_{4r}^{(1)} - A_r^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_{4r}^{(2)} \right\}; \\
 S_{\gamma}^{(4)} &= \frac{a}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ B_r^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_{4r}^{(4)} - B_r^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_{4r}^{(4)} \right\}; \\
 S_C^{(4)} &= \frac{U_0}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ B_r^{(-)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_{4r}^{(5)} + \operatorname{arctg} \Phi_{4r}^{(6)} \right) - B_r^{(+)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_{4r}^{(7)} + \operatorname{arctg} \Phi_{4r}^{(8)} \right) \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{4r}^{(1)} &= \frac{\sin \left[\frac{\pi y}{2b} \right]}{\exp \left[\frac{\pi A_r^{(-)}}{b} \right] + \cos \left[\frac{\pi y}{b} \right]}; & \Phi_{4r}^{(2)} &= \frac{\sin \left[\frac{\pi y}{2b} \right]}{\exp \left[\frac{\pi A_r^{(+)}}{b} \right] + \cos \left[\frac{\pi y}{b} \right]};
 \end{aligned}$$

$$\Phi_{4r}^{(j)} = \Phi_{3r}^{(j)} \text{ при } j = 3, \dots, 8.$$

Полученные выражения для значений функций тока в каждой из четырех рассмотренных задач, а именно (36), (42), (48) и (54), позволяет представить значение функции тока для течения с распределением значений скорости движения верхней и нижней границ в соответствии с соотношением (30).

Рассматриваем течение жидкости в поперечном сечении прямоугольного канала $2a \times 2b$ с неподвижной верхней и подвижной нижней границей (см. Рис. 3). Пусть правая часть нижней границы ($c < x < a$) движется со скоростью U_0 в направлении оси

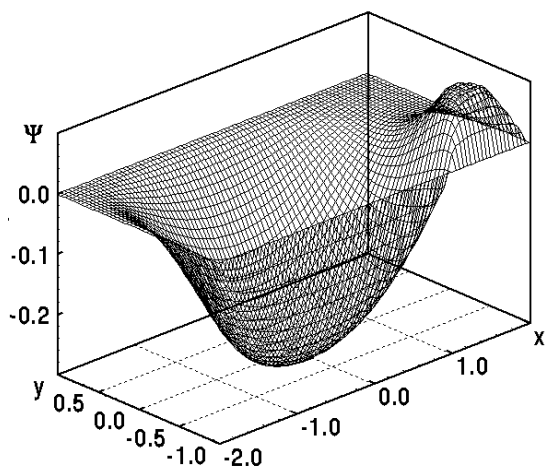


Рис. 6. Распределение поля функции тока $\Psi(x, y)$ в поперечном сечении канала

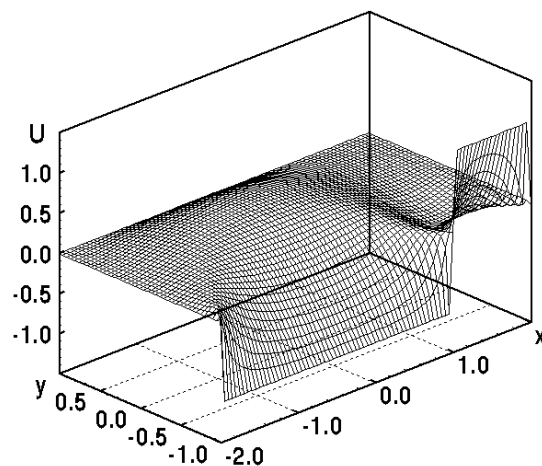


Рис. 7. Распределение проекции скорости $U(x, y)$ в поперечном сечении канала

Ox , а ее левая часть ($-a < x < c$) — такой же скоростью, но в противоположном направлении. Положим в граничных условиях (31), (37), (43) и (49)

$$U_0^{(1)} = 0.5, \quad U_0^{(2)} = 0.5, \quad U_0^{(3)} = 0.5, \quad U_0^{(4)} = 0.5. \quad (55)$$

Тогда весовые коэффициенты в соотношении (30) примут следующие значения:

$$A = B = C = D = U_0. \quad (56)$$

Для анализа точности выполнения граничных условий рассмотрим пример при $U_0 = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ для различного количества слагаемых $M = K = L = N$ в указанных ранее выражениях для функции тока. Соответствующее распределение функции тока $\Psi(x, y)$ показано на Рис. 6. Принимая на всех твердых поверхностях нулевое значение, Функция $\Psi(x, y)$ имеет нулевую производную в направлении, перпендикулярном к ним. На Рис. 7 показано распределение проекции скорости $U(x, y)$ в поперечном сечении прямоугольного канала.

Следует обратить внимание на хорошее качество выполнения граничных условий по скорости на верхней ($y = b$) и нижней ($y = -b$) поверхностях канала. Значения скоростей для различных N представлены в Табл. 1. Их анализ показывает, что для достижения точности решения задачи на границах порядка 0.1% по амплитуде скорости в них окрестности достаточно учитывать не более пяти слагаемых в усеченных суммах для функции тока в поперечном сечении канала [27–29].

4. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В МИКРОКАНАЛЕ

Тестирование модельного представления течения вязкой жидкости в прямолинейном канале с прямоугольным поперечным сечением и системой канавок на одной из поверхностей канала проводилось на основе данных реального эксперимента, опубликованного

Табл. 1. Значения проекции скорости $U(x, -b)$ на нижней границе полости

x	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 7$
-2.00	-0.00612	0.00263	0.00063	0.00035	0.00007
-1.60	-0.99829	-0.99913	-0.99975	-1.00000	-1.00003
-1.20	-0.99786	-1.00072	-1.00043	-0.99995	-0.99998
-0.80	-1.00304	-1.00042	-0.99944	-1.00009	-0.99995
-0.40	-1.00309	-0.99844	-1.00060	-0.99983	-1.00002
0.00	-0.99591	-1.00142	-0.99943	-1.00024	-1.00005
0.40	-0.99560	-1.00022	-1.00043	-0.99965	-0.99994
0.80	-1.00598	-0.99761	-0.99978	-1.00045	-0.99992
0.95	-1.00861	-0.99933	-0.99884	-1.00017	-0.99991
0.99	-1.00877	-0.99990	-0.99864	-0.99990	-0.99986
1.00	-0.00892	-0.00020	0.00123	0.00001	-0.00000
1.01	0.99092	0.99948	1.00110	0.99993	0.99985
1.05	0.99112	0.99887	1.00115	1.00022	0.99990
1.20	0.99383	0.99664	1.00010	1.00060	0.99990
1.60	1.01217	1.00220	0.99960	0.99931	0.99981
2.00	0.00612	-0.00264	-0.00063	-0.00035	-0.00007

в работах [10–12]. Образец с микроканалами изготавливался из полидиметилсилоксина мягким литографическим методом. Основной канал изготавливался негативным фоторезистным методом на отполированной кремниевой заготовке, которая использовалась в качестве фотошаблона. Применение такой технологии также позволило сформировать первый и последний гладкие сегменты микроканала. При этом негатив первого слоя наносился на силиконовую прокладку, размер которой соответствовал требуемой толщине канала, и запекался. Полученный фотошаблон использовался при формировании первого слоя канала. Следующий слой наносился на фотошаблон с желаемой структурой желобков и канавок, после чего образец подвергался запеканию. Второй сегмент канала, обладающий другой структурой канавок, формировался аналогичным образом. Точная копия нескольких сегментов канала изготавливалась методом травления фотошаблона. В конечном итоге получался образец с необходимой последовательностью сегментов и структурой канавок. Для шлифовки рабочих поверхностей наносился тонкий слой полимера тридекафлюоро-1, 1, 2, 2-тетрагидростил-1-трихлоросилана, который сглаживал технологические неровности на поверхности микроканала. Водонепроницаемость образца достигалась обжигом — обработкой его поверхности плазмой с общим давлением порядка (50...60) Па в течение одной минуты перед нанесением полимера на рабочие поверхности микроканала.

Используемая в эксперименте жидкость представляла собой смесь глицерина (80% объема) и воды (20% объема), имеющую динамическую вязкость $\mu = 6.7 \cdot 10^{-2}$ кг/(м·с). Коэффициент диффузии для указанной водно-глицериновой смеси составляет $D = 2 \cdot 10^{-12}$ м/с².

Для идентификации траекторий выделенных жидких частиц в течении использо-

валась флуоресцентная краска полиэтиламилин, даже незначительная концентрация которой (порядка 10^{-12} г/л) существенно увеличивает поток вторичного излучения при освещении раствора широкополосными лампами дневного света. Поток в микроканале формировался под внешним избыточным давлением, в атмосфере азота, применявшегося для предотвращения нежелательных реакций окисления внутри канала. Структура течения внутри сечения канала регистрировалась с помощью видеоаппаратуры через конфокальный микроскоп с сорокакратным линейным увеличением.

Предполагалось, что, если в поперечном сечении канала сформировать периодическую систему несимметричных желобков, то при определенных условиях вносимые ею возмущения могут привести к хаотизации движения жидких частиц и, как результат, к интенсивной адвекции жидкости в микроканале. По мере продвижения жидкости вдоль канала характер асимметрии желобков периодически меняется. Таким образом, в каждом из сегментов канала в поперечном сечении формируется несимметричное течение, заметно отличающееся от течений в предыдущем или последующем сегментах.

В экспериментах перемешивание наиболее наглядно проявлялось для канала, в исходном сечении которого подкрашенная жидкость занимала около половины его площади [10]. Рассмотрим образец, для которого микроканал имел ширину 200 мкм и высоту 85 мкм с периодически чередующимися сегментами при длине периода 2 мм. Система расположенных на нижней стенке желобков имела показатель асимметричности $2/3$. В канале генерировалось течение с осевой скоростью 2.8 мм/с. Это соответствует значению $Re = 10^{-2}$, вычисленному по максимальной скорости в канале, его ширине и кинематической вязкости раствора глицерина в воде. На входе первого сегмента подкрашенная жидкость заполняла 55% поперечного сечения канала (Рис. 8а). Анализ динамики подкрашенной области в канале позволил оценить величину поперечной скорости жидкости у снабженной системой желобков поверхности. Оказалось, что в этой области она составила 0.12 мм/с.

На Рис. 8б показано распределение подкрашенной жидкости на выходе первых двух сегментов канала (после первого периода). Видно, что часть подкрашенной жидкости увлекается течением в левую часть канала, формируя в поперечном сечении каплеобразную структуру у левой его стенки. В то же время, часть неподкрашенной жидкости попадает в нижнюю часть канала, формируя аналогичную структуру у правой стенки. После прохождения четырех сегментов (второго периода) еще одна каплеобразная область формируется только в левой части канала, а в правой никаких новообразований не наблюдается. Неподкрашенная жидкость, попавшая в правую часть канала, постепенно смещается вверх (см. Рис. 8в). На Рис. 8г показана структура течения после прохождения трех пространственных периодов сегментированного канала. В этом сечении подкрашенная жидкость проникает из левой части канала в низ правой части, формируя слоистую структуру, состоящую из чередующихся областей подкрашенной и неподкрашенной жидкости. Наиболее отчетливо она становится видна в сечении после четырех периодов канала (восьми сегментов), см. Рис. 8д. Известно, что слоистая структура — характерный признак интенсивного режима перемешивания пассивной жидкости [2, 21, 22, 24–26, 35–39]. Следовательно, формирование периодического несимметричного течения в поперечном сечении прямолинейного канала может приводить к интенсификации перемешивания жидкостей в таких системах.

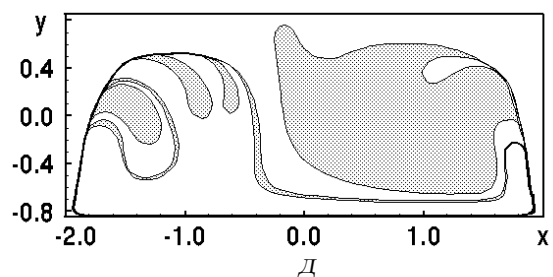
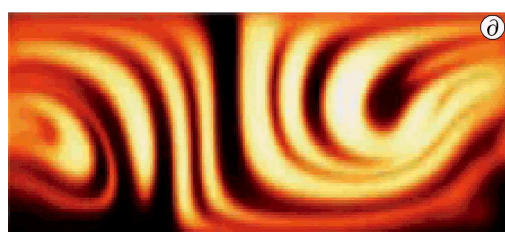
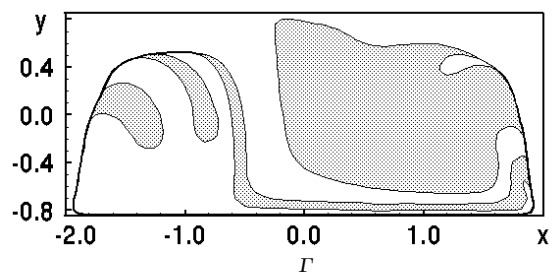
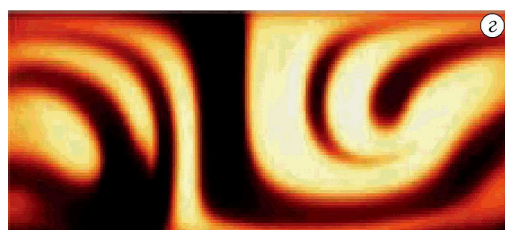
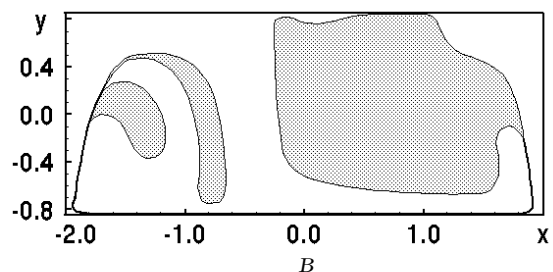
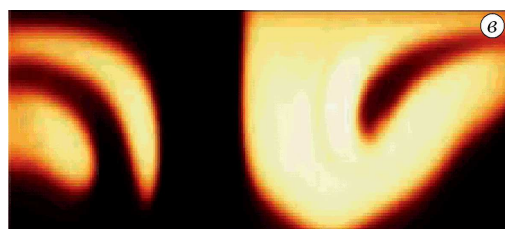
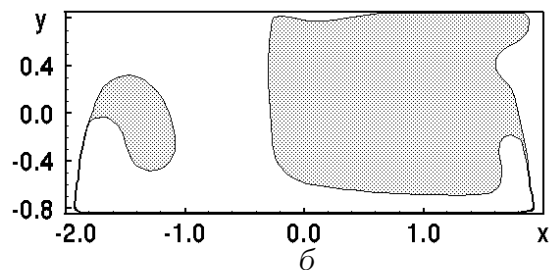
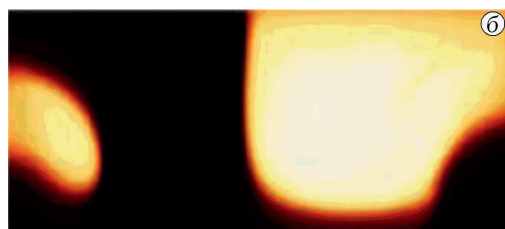
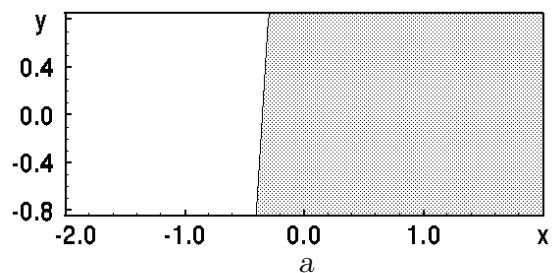
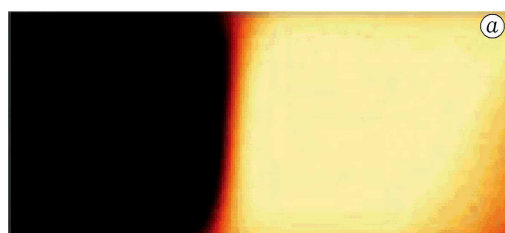


Рис. 8. Смешивание пассивной жидкости в эксперименте [10] (опубликовано с разрешения AAAS)

Рис. 9. Моделирование процесса смешивания в прямоугольном канале

Движение отдельной лагранжевой жидкости частицы в эйлеровом поле скорости описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (задача Коши) [3, 16, 37, 38, 40, 41]:

$$\frac{dX}{dt} = U(X, Y), \quad \frac{dY}{dt} = V(X, Y), \quad \frac{dZ}{dt} = W(X, Y) \quad (57)$$

с начальными условиями

$$X(0) = X^{(0)}, \quad Y(0) = Y^{(0)}, \quad Z(0) = Z^{(0)}. \quad (58)$$

В приведенном уравнении $U(X, Y)$, $V(X, Y)$, $W(X, Y)$ — компоненты поля скорости вдоль соответствующих осей прямоугольной системы координат в точке, в которой находится выделенная жидкая частица. В современной литературе ее принято называть маркером [2, 36–38]. Решением системы (57) и (58) являются зависимости $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, образующие траекторию движения частицы-маркера в канале.

Если принять во внимание тот факт, что течение жидкости в каждом из сегментов рассматриваемого микроканала стационарно, то интегрирование уравнений движения (57) по времени для отдельно взятого сегмента можно заменить интегрированием по продольной координате. Для этого необходимо первое и второе уравнения системы (57) разделить на третье из них. В результате получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения, описывающие траекторию отдельной жидкости частицы при перемещении ее вдоль канала:

$$\frac{dX}{dZ} = \frac{U(X, Y)}{W(X, Y)}, \quad \frac{dY}{dZ} = \frac{V(X, Y)}{W(X, Y)}. \quad (59)$$

Система уравнений (59) должна быть дополнена начальными условиями

$$X(0) = X^{(0)}, \quad Y(0) = Y^{(0)}. \quad (60)$$

Решением системы (59) при начальных условиях (60) будут зависимости $X(z)$, $Y(z)$, формирующие траекторию движения жидкой частицы в виде функции ее осевого положения в микроканале.

Исследования показывают, что для экономии вычислительных ресурсов удобно следить не за маркерами, заполняющими всю подкрашенную область, а за системой маркеров, формирующих ее поверхность в начальном сечении. Очевидно, что каждый такой маркер будет продолжать находиться на поверхности подкрашенной области, а объединение их траекторий позволит сформировать ее трансформацию при движении вдоль канала.

Значение осевой скорости $W(X, Y)$ определяется в соответствии с выражением (27). Величины компонент поперечных скоростей $U(X, Y)$, $V(X, Y)$ могут быть определены из значения функции тока течения в поперечном сечении канала, представляющей собой суперпозицию вкладов первой (36), второй (42), третьей (48) и четвертой (54) вспомогательных граничных задач с весовыми коэффициентами, определяемыми соотношениями (55), (56).

Пронормируем все геометрические и кинематические параметры канала на четверть ширины канала w и максимальное значение осевой скорости W_{\max}^0 жидкости в микроканале. В опыте эти нормирующие параметры имели значения

$$w = 50 \text{ мкм}, \quad W_{\max}^0 = 2.8 \text{ мм/с}.$$

Для определения нормированного значения приложенного градиента давления в канале, при котором достигается единичное нормированное значение осевой скорости, необходимо приравнять выражение (27) для $x = 0$ и $y = 0$ к единице и определить параметр P_0 из решения трансцендентного уравнения. Численное решение дает величину $P_0 = 2.92$. Все остальные нормированные параметры течения в канале, принятые при численном моделировании эксперимента, имеют следующие безразмерные значения:

$$a = 2.0, \quad b = 0.85, \quad c = 0.66, \quad L = 20.0, \quad U_0 = 0.07.$$

В начальный момент времени подкрашенная жидкость занимала правую часть поперечного сечения (см. Рис. 9а). После первого пространственного периода подкрашенная жидкость разделилась: большая ее часть осталась в правой части канала, а меньшая переместилась в левую (см. Рис. 9б). Кроме того, в правую часть канала снизу попало незначительное количество чистой жидкости, как и было показано на Рис. 8б. После второго периода (по прохождении четырех сегментов) в левой части канала появилась еще одна каплеобразная область подкрашенной жидкости, в то время как правая часть существенных изменений не претерпела (см. Рис. 9в). Некоторые изменения в структуре подкрашенной жидкости в сечении канала становятся заметны после прохождения жидкости шести сегментов, что соответствует трем пространственным периодам в продольном направлении. Здесь уже наблюдается проникновение в правую часть канала подкрашенной и чистой жидкостей из его левой части (см. Рис. 9г). Эта тенденция также хорошо просматривается на Рис. 8г, на котором запечатлен снимок из эксперимента. Наконец, на Рис. 9д показана структура перемешанной жидкости в поперечном сечении канала после прохождения жидкостью восьми его сегментов (четыре периода).

Отметим, что сравнение результатов численного моделирования и экспериментальных данных [10] выявило некоторые различия в структуре подкрашенной области, особенно в центральной части канала. Тем не менее, в целом качественная картина процесса перемешивания жидкости в обоих случаях совпадает. Таким образом, можно сделать вывод о хорошем соответствии развитого нами модельного представления реальному течению в микроканале.

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИНТЕНСИВНЫХ РЕЖИМОВ АДВЕКЦИИ

Исследование процесса адвекции жидкостей представляет собой одну из интересных фундаментальных научных проблем. Известно, что ламинарные течения жидкости при определенных условиях могут приводить к хаотизации течения и, как следствие, к интенсивным режимам перемешивания пассивных примесей [2, 36–38]. Уравнения, описывающие движение отдельных жидких частиц (маркеров) в реальных течениях, являются нелинейными. В некоторых случаях нелинейность может проявиться настолько существенным образом, что две близлежащие жидкие частицы с течением времени будут достаточно быстро удаляться друг от друга. В этом случае они двигаются по хаотическим траекториям, а расстояние между ними возрастает фактически по экспоненциальному закону [2, 18, 21, 25, 26, 38, 39]. Если анализировать движение только тех частиц, которые формируют границы выделенной области (жидкий контур), то можно утверждать, что длина жидкого контура при хаотическом режиме адвекции с течением времени также увеличивается экспоненциально [2, 18, 21, 25, 26, 38, 39].

В хаотической динамике существует несколько методов и критериев регистрации хаотического движения динамических систем [25, 26, 39]. К наиболее важным из них обычно относят анализ фазовой траектории, спектральный анализ проекций фазовых траекторий, построение сечений Пуанкаре и анализ показателей Ляпунова. В большинстве случаев совместное использование перечисленных процедур позволяет выявить хаотический режим движения отдельных жидких частиц, участвующих в процессе адвекции. К сожалению, в ряде прикладных задач применение большинства из упомянутых критериев оказывается недостаточным для достоверного определения хаотического режима адвекции. Основная причина этого заключается в том, что в процесс адвекции вовлечено большое количество маркеров, часть из которых может двигаться регулярно, а часть — в хаотическом режиме. Таким образом, для идентификации интенсивных режимов адвекции пассивной жидкости необходимо сначала проанализировать различные критерии, обеспечивающие идентификацию типа движения отдельных маркеров, а затем приступить к изучению собственно режимов перемешивания жидкостей.

Цель дальнейшего рассмотрения состоит в определении основных свойств и закономерностей процесса адвекции пассивной жидкости в прямолинейных каналах с прямоугольным поперечным сечением и периодическими системами асимметричных желобков на одной из поверхностей при изменении некоторых параметров течения. В качестве переменных будем рассматривать только те параметры течения или геометрии канала, которые могут быть изменены с наименьшими усилиями, например, при изменении длины сегментов микроканала и смещении точки сопряжения подвижной поверхности.

Рассмотрим процесс адвекции в прямолинейном канале с прямоугольным поперечным сечением при изменении длины сегментов, составляющих микроканал. Пусть он имеет фиксированными параметры

$$a = 2.0, \quad b = 0.85, \quad c = 0.66, \quad U_0 = 0.07,$$

а длина сегментов канала может варьироваться в пределах

$$10 < L < 30$$

без изменения последовательности их чередования.

На Рис. 10 показано изменение длины контура, образованного подкрашенной жидкостью в поперечном сечении, по мере его продвижения вдоль микроканала для различных нормированных длин сегментов. Анализу подвергается относительная длина контура:

$$C(t) = \frac{L_c(z)}{L_c(0)}, \quad (61)$$

где $L_c(z)$ — длина контура подкрашенной области для текущего сечения микроканала; а $L_c(0)$ — длина контура в начальном сечении.

Из графика видно, что длина исследуемого контура при адвекции жидкости в диапазоне значений $L < 25$ увеличивается по мере продвижения сечения вдоль канала по линейному закону, что соответствует регулярному режиму адвекции. Напротив, при $L \geq 25$ наблюдается увеличение длины контура по экспоненциальному закону. В этом случае адвекция пассивной жидкости происходит в соответствии с хаотическим режимом и процесс перемешивания протекает значительно более интенсивно.

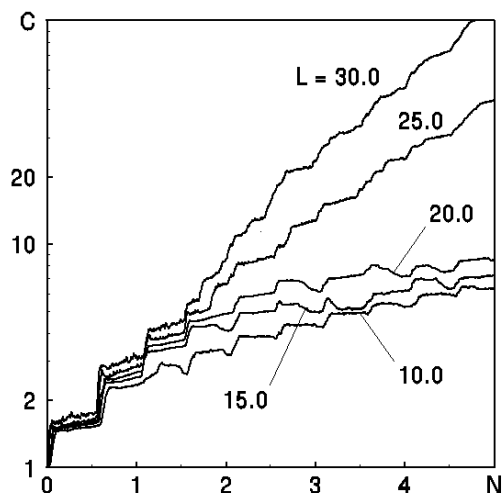


Рис. 10. Изменение относительной длины контура пассивной области в поперечном сечении вдоль микроканала при различных значениях длины сегментов

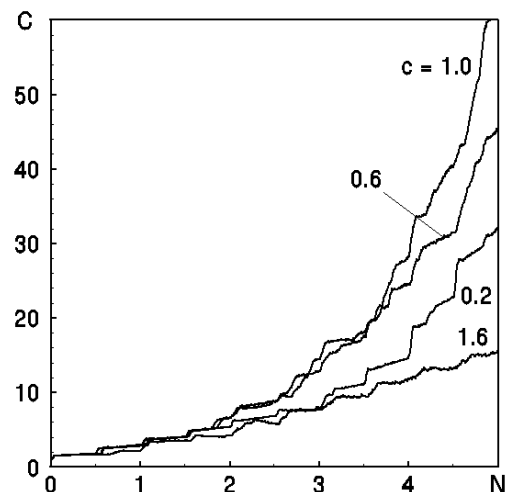


Рис. 11. Изменение относительной длины контура пассивной области в поперечном сечении вдоль микроканала при различных значениях координаты точки сопряжения

С технологической точки зрения, при изготовлении микроканалов, существует другой способ интенсификации адвекции жидкости, движущейся внутри них. Он связан с изменением асимметричности системы канавок на нижней поверхности канала. Каждая такая система канавок характеризуется положением точки сопряжения $0 \leq c \leq a$, которая в поперечном сечении микроканала определяет направление движения жидкости (или законы движения границы), прилегающей к его нижней поверхности.

Проанализируем процес адвекции пассивной примеси в прямоугольном микроканале при изменении координаты точки сопряжения движущихся поверхностей. В качестве базового режима выберем течение пассивной вязкой несжимаемой жидкости, при котором проявляется интенсивная ее адвекция. Рассматриваемый канал характеризуется следующими фиксированными безразмерными геометрическими и динамическими параметрами:

$$a = 2.0, \quad b = 0.85, \quad L = 25.0, \quad U_0 = 0.07.$$

Будем изменять только координату c точки сопряжения движущихся поверхностей в достаточно широком диапазоне значений:

$$0 < c < a.$$

Рис. 11 иллюстрирует изменение относительной длины (61) контура, охватывающего выделенную область жидкости в начальном поперечном сечении, при изменении координаты точки сопряжения движущихся поверхностей. Как видно из графика, наибольшему растяжению контур подвергается при значениях $0.5 < c < 1$. В этом случае при прохождении одного периода сегментов примерно одинаковые объемы жидкости сохраняют свое прежнее положение и переносятся в противоположную половину поперечного сечения микроканала. Численный анализ показывает, что именно в этом

случае достигается наиболее интенсивный режим адвекции пассивной примеси. Таким образом, диапазон $0.5 < c < 1$ соответствует оптимальным хаотическим режимам перемешивания, которые могут быть рекомендованы для практического применения при проектировании реальных миксеров.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана общая методика исследования течения вязкой несжимаемой жидкости в прямолинейных микроканалах с прямоугольным поперечным сечением, имеющих систему желобков на одной из поверхностей канала. Анализ масштабов течения позволил сформулировать его модельное представление в приближении Стокса. Получены основные соотношения для продольной и поперечных компонент поля скорости течения в рассматриваемой области.
2. Сформулирована корректная математическая задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в микроканале и получено ее аналитическое решение. Решение бигармонической задачи представлено в виде суперпозиции решений с симметричным и асимметричным распределениями функции тока по обеим координатам поперечного сечения канала. Каждое из решений записано в виде разложения по собственным функциям.
3. Проведен анализ точности выполнения граничных условий на поверхностях микроканала. Показано, что учет пяти слагаемых аналитического решения бигармонических задач для функции тока течения в поперечном сечении канала позволяет удовлетворить граничные условия с максимальной ошибкой, не превышающей 0.1% по отношению к скорости движения границ.
4. Численное моделирование процесса адвекции пассивной жидкости и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными позволяют сделать вывод о хорошем соответствии модельного представления реальному течению в микроканале.
5. Найденные в данной работе значения геометрических и динамических параметров микроканалов, при которых реализуются обеспечивающие интенсивное перемешивание хаотические режимы, могут быть рекомендованы для практической реализации при конструировании микромиксеров с заданными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Tabeling P. Introduction to microfluidics. — Oxford : Oxford University Press, 2005. — 312 p.
- [2] Frontiers of chaotic advection / H. Aref, J. R. Blake, M. Budišić et al. // Reviews of Modern Physics. — 2017. — Vol. 89, no. 2. — P. 025007(1–66).
- [3] Micro total analysis systems. 2. Analytical standard operations and applications / P. A. Auroux, D. Iossifidis, D. R. Reyes, A. Manz // Analytical Chemistry. — 2002. — Vol. 74. — P. 2637–2652.

- [4] Ottino J. M., Wiggins S. Designing optimal micromixers // *Science*. — 2004. — Vol. 305, no. 5683. — P. 485–486.
- [5] Phil J., Karlsson M., Chiu D. T. Microfluidic technologies in drug discovery // *Drug Discovery Today*. — 2005. — Vol. 10. — P. 1377–1383.
- [6] Micro total analysis systems. 1. Introduction, theory, and technology / D. R. Reyes, D. Iossifidis, P. A. Auroux, A. Manz // *Analytical Chemistry*. — 2002. — Vol. 74. — P. 2623–2636.
- [7] Squires T. M., Quake S. R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale // *Reviews of Modern Physics*. — 2005. — Vol. 77. — P. 977–1026.
- [8] Stone H. A., Kim S. Microfluidics: Basic issues, applications, and challenges // *American Institute of Chemical Engineers Journal*. — 2001. — Vol. 47. — P. 1250–1254.
- [9] Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2004. — Vol. 36. — P. 381–411.
- [10] Chaotic mixer for microchannels / A. D. Stroock, S. K. W. Dertinger, A. Ajdari et al. // *Science*. — 2002. — Vol. 295. — P. 647–651.
- [11] Pattering flows using grooved surfaces / A. D. Stroock, S. K. Dertinger, G. M. Whitesides, A. Ajdari // *Analytical Chemistry*. — 2002. — Vol. 74. — P. 5306–5312.
- [12] Stroock A. D., McGraw G. J. Investigation of the staggered herringbone mixer with a simple analytical model // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. — 2004. — Vol. A362. — P. 971–986.
- [13] Vilkner T., Janasek D., Manz A. Micro total analysis systems. Recent developments // *Analytical Chemistry*. — 2004. — Vol. 76. — P. 3373–3385.
- [14] Whitesides G. M. The origins and the future of microfluidics // *Nature*. — 2006. — Vol. 442. — P. 368–373.
- [15] Kang K., Chevray R. Visualization of fluid mixing in microchannels // *IEEE Computer Graphics and Applications*. — 2005. — Vol. 25, no. 6. — P. 16–20.
- [16] Beebe D. J., Mensing G. A., Walker G. M. Physics and applications of microfluidics in biology // *Annual Review of Biomedical Engineering*. — 2002. — Vol. 4. — P. 261–286.
- [17] Безымянная Э. Н., Гуржий А. А., Яременко Я. В. Идентификация областей интенсивной адвекции выделенной жидкости внутри прямоугольной полости с подвижными границами // *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна*. — 2011. — № 960. — С. 13–20.

- [18] Бернинг Р., Гуржий О. А., Мелешко В. В. Размешивание пассивной примеси в прямоугольной полости при периодическом движении границы в приближении Стокса // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. — 2007. — № 775. — С. 17–28.
- [19] Бернінг Р., Гуржій О. А., Мелешко В. В. Змішування в'язкої рідини в прямокутному мікроканалі // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2007. — Т. 50, № 4. — С. 140–148.
- [20] Бернинг Р., Гуржий А. А., Мелешко В. В. Адвекция пассивной примеси в прямоугольной полости в приближении Стокса при периодическом возбуждении движения жидкости в приповерхностном слое // Труды XIII Международного симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. — Харьков—Херсон, 2007. — С. 56–59.
- [21] Краснопольская Т. С., Мелешко В. В. Ламинарное смешивание жидкостей. Часть 1. Методологические аспекты исследования // Прикладная гидромеханика. — 2004. — Т. 6(78), № 3. — С. 28–40.
- [22] Краснопольская Т. С., Мелешко В. В. Ламинарное смешивание жидкостей. Часть 2. Периодические течения Стокса в клинообразной кольцевой полости // Прикладная гидромеханика. — 2004. — Т. 6(78), № 4. — С. 43–60.
- [23] Мелешко В. В., Гуржій О. А., Безим'янна Е. М. Електро-осмотичні течії в'язкої рідини у прямокутній порожнині // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2007. — Т. 50, № 1. — С. 107–116.
- [24] Мелешко В. В., ван Хейст Г. Я. Ф. Змішування в'язкої рідини у прямокутній порожнині // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2006. — Т. 49, № 1. — С. 43–52.
- [25] Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity / T. S. Krasnopolskaya, V. V. Meleshko, G. W. M. Peters, H. E. H. Meijer // European Journal of Mechanics B / Fluids. — 1999. — Vol. 18. — P. 793–822.
- [26] Krasnopolskaya T. S., Meleshko V. V. Quality measures and transport properties / Ed. by L. Cortelezzi, I. Mezic. — Udine : Springer-Verlag, 2009. — P. 291–306.
- [27] Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proceedings of the Royal Society A. — 1996. — Vol. 452. — P. 1999–2022.
- [28] Meleshko V. V. Biharmonic problem in a rectangle // Journal of Applied Sciences Research. — 1998. — Vol. 58. — P. 217–249.
- [29] Meleshko V. V., Gomilko A. M. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // Proceedings of the Royal Society A. — 1997. — Vol. 453. — P. 2139–2160.
- [30] Александров В. Л. Теоретическая гидромеханика. — М., Л. : Гостехиздат, 1946. — 432 с.

- [31] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — М. : Физматгиз, 1963. — Т. 2. — 728 с.
- [32] Ламб Г. Гидродинамика. — М., Л. : Гостехиздат технико-теоретической литературы, 1947. — 928 с.
- [33] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М. : Наука, 1987. — 840 с.
- [34] Хаппель Д., Бреннер Х. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М. : Мир, 1976. — 632 с.
- [35] Гуржий А. А., Мелешко В. В., ван Хейст Г. Я. Ф. Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей / Под ред. А. В. Борисова. — М., Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. — С. 441–467.
- [36] Aref H. Stirring by chaotic advection // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1984. — Vol. 143. — P. 1–23.
- [37] Aref H. Chaotic advection of fluid particle // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. — 1990. — Vol. 333. — P. 273–288.
- [38] Aref H. The development of chaotic advection // *Physics of Fluids*. — 2002. — Vol. 14, no. 4. — P. 1315–1325.
- [39] Modeling of propagation of a passive impurity on the surface of sea straits / A. A. Gourjii, V. V. Meleshko, S. A. Dovgiy, O. N. Trofymchyk // *IUTAM Symposium on Vortex Dynamics: Formation, Structure and Function*. — Fukuoka, Japan, 2013. — P. 128–129.
- [40] El-Ali J., Sorger P. K., Jensen K. F. Cells on chips // *Nature*. — 2006. — Vol. 442. — P. 403–411.
- [41] Dubois F., Salaun M., Salmon M. S. First vorticity-velocity-pressure numerical scheme for the Stokes problem // *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2003. — Vol. 192. — P. 4877–4907.

REFERENCES

- [1] P. Tabeling, *Introduction to microfluidics*. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- [2] H. Aref, J. R. Blake, M. Budišić, S. S. S. Cardoso, J. H. E. Cartwright, H. J. H. Clercx, K. E. Omari, U. Feudel, R. Golestanian, E. Guillard, G. J. F. van Heijst, T. S. Krasnopolskaya, Y. L. Guer, R. S. MacKay, V. V. Meleshko, G. Metcalfe, I. Mezić, A. P. S. de Moura, O. Piro, M. F. M. Speetjens, R. Sturman, J.-L. Thiffeault, and I. Tuval, “Frontiers of chaotic advection,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 89, no. 2, pp. 025007(1–66), 2017.
- [3] P. A. Auroux, D. Iossifidis, D. R. Reyes, and A. Manz, “Micro total analysis systems. 2. Analytical standard operations and applications,” *Analytical Chemistry*, vol. 74, pp. 2637–2652, 2002.

- [4] J. M. Ottino and S. Wiggins, “Designing optimal micromixers,” *Science*, vol. 305, no. 5683, pp. 485–486, 2004.
- [5] J. Phil, M. Karlsson, and D. T. Chiu, “Microfluidic technologies in drug discovery,” *Drug Discovery Today*, vol. 10, pp. 1377–1383, 2005.
- [6] D. R. Reyes, D. Iossifidis, P. A. Auroux, and A. Manz, “Micro total analysis systems. 1. Introduction, theory, and technology,” *Analytical Chemistry*, vol. 74, pp. 2623–2636, 2002.
- [7] T. M. Squires and S. R. Quake, “Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 77, pp. 977–1026, 2005.
- [8] H. A. Stone and S. Kim, “Microfluidics: Basic issues, applications, and challenges,” *American Institute of Chemical Engineers Journal*, vol. 47, pp. 1250–1254, 2001.
- [9] H. A. Stone, A. D. Stroock, and A. Ajdari, “Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 36, pp. 381–411, 2004.
- [10] A. D. Stroock, S. K. W. Dertinger, A. Ajdari, I. Mezič, H. A. Stone, and G. M. Whitesides, “Chaotic mixer for microchannels,” *Science*, vol. 295, pp. 647–651, 2002.
- [11] A. D. Stroock, S. K. Dertinger, G. M. Whitesides, and A. Ajdari, “Pattering flows using grooved surfaces,” *Analytical Chemistry*, vol. 74, pp. 5306–5312, 2002.
- [12] A. D. Stroock and G. J. McGraw, “Investigation of the staggered herringbone mixer with a simple analytical model,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 362, pp. 971–986, 2004.
- [13] T. Vilker, D. Janasek, and A. Manz, “Micro total analysis systems. Recent developments,” *Analytical Chemistry*, vol. 76, pp. 3373–3385, 2004.
- [14] G. M. Whitesides, “The origins and the future of microfluidics,” *Nature*, vol. 442, pp. 368–373, 2006.
- [15] K. Kang and R. Chevray, “Visualization of fluid mixing in microchannels,” *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 25, no. 6, pp. 16–20, 2005.
- [16] D. J. Beebe, G. A. Mensing, and G. M. Walker, “Physics and applications of microfluidics in biology,” *Annual Review of Biomedical Engineering*, vol. 4, pp. 261–286, 2002.
- [17] E. N. Bezmyannaya, A. A. Gourjii, and Y. V. Yaremenko, “Identification of areas of intensive advection of the marked liquid inside a rectangular cavity with movable boundaries,” *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University*, no. 960, pp. 13–20, 2011.
- [18] R. Berning, A. A. Gourjii, and V. V. Meleshko, “Stirring of the passive admixture in a rectangular cavity with periodic boundary motion in the Stokes approximation,” *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University*, no. 775, pp. 17–28, 2007.

- [19] R. Berning, A. A. Gourjii, and V. V. Meleshko, “Mixing of viscous fluid in rectangular microchannel,” *Matematicheskie Metody i Fiziko-Mehaničeskie Polâ*, vol. 50, no. 4, pp. 140–148, 2007.
- [20] R. Berning, A. A. Gourjii, and V. V. Meleshko, “Advection of a passive admixture in a rectangular cavity in the Stokes approximation with periodic excitation of fluid motion in the near-surface layer,” in *Proceedings of XIII International Symposium “Methods of Discrete Singularities in Problems of Mathematical Physics”*, (Kharkov—Kherson), pp. 56–59, 2007.
- [21] T. S. Krasnopolskaya and V. V. Meleshko, “Laminar stirring of fluids. Part 1. Methodological aspects,” *Applied Hydromechanics*, vol. 6(78), no. 3, pp. 28–40, 2004.
- [22] T. S. Krasnopolskaya and V. V. Meleshko, “Laminar stirring of fluids. Part 2. Periodical Stokes flows in wedge annular cavity,” *Applied Hydromechanics*, vol. 6(78), no. 4, pp. 43–60, 2004.
- [23] V. V. Meleshko, A. A. Gourjii, and E. N. Bezym’yana, “Electro-osmotic flows of viscous fluid in a rectangular cavity,” *Matematicheskie Metody i Fiziko-Mehaničeskie Polâ*, vol. 50, no. 1, pp. 107–116, 2007.
- [24] V. V. Meleshko and G. J. F. van Heijst, “Mixing of viscous fluid in rectangular cavity,” *Matematicheskie Metody i Fiziko-Mehaničeskie Polâ*, vol. 49, no. 1, pp. 43–52, 2006.
- [25] T. S. Krasnopolskaya, V. V. Meleshko, G. W. M. Peters, and H. E. H. Meijer, “Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity,” *European Journal of Mechanics B / Fluids*, vol. 18, pp. 793–822, 1999.
- [26] T. S. Krasnopolskaya and V. V. Meleshko, *Quality measures and transport properties*, ch. Analysis and control of mixing with an application to micro and macro flow processes, pp. 291–306. Udine: Springer-Verlag, 2009.
- [27] V. V. Meleshko, “Steady stokes flow in a rectangular cavity,” *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 452, pp. 1999–2022, 1996.
- [28] V. V. Meleshko, “Biharmonic problem in a rectangle,” *Journal of Applied Sciences Research*, vol. 58, pp. 217–249, 1998.
- [29] V. V. Meleshko and A. M. Gomilko, “Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle,” *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 453, pp. 2139–2160, 1997.
- [30] V. L. Aleksandrov, *Theoretical hydromechanics*. Moscow, Leningrad: Gostehizdat, 1946.
- [31] N. E. Kochin, I. A. Kibel, and N. V. Roze, *Theoretical hydromechanics*, vol. 2. New York: John Wiley & Sons, 1964.
- [32] H. Lamb, *Hydrodynamics*. New York: Dover, 1945.
- [33] L. G. Loitsianskii, *Mechanics of liquids and gases*. New York: Begell House, 1995.

- [34] J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1965.
- [35] A. A. Gourjii, V. V. Meleshko, and G. J. F. van Heijst, *Fundamental and applied problems of the vortex theory*, ch. Modes of chaotic mixing of a liquid in a circle by a pair of point vortices, pp. 441–467. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Sciences, 2003.
- [36] H. Aref, “Stirring by chaotic advection,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 143, pp. 1–23, 1984.
- [37] H. Aref, “Chaotic advection of fluid particle,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 333, pp. 273–288, 1990.
- [38] H. Aref, “The development of chaotic advection,” *Physics of Fluids*, vol. 14, no. 4, pp. 1315–1325, 2002.
- [39] A. A. Gourjii, V. V. Meleshko, S. A. Dovgiy, and O. N. Trofymchyk, “Modeling of propagation of a passive impurity on the surface of sea straits,” in *IUTAM Symposium on Vortex Dynamics: Formation, Structure and Function*, (Fukuoka, Japan), pp. 128–129, 2013.
- [40] J. El-Ali, P. K. Sorger, and K. F. Jensen, “Cells on chips,” *Nature*, vol. 442, pp. 403–411, 2006.
- [41] F. Dubois, M. Salaun, and M. S. Salmon, “First vorticity-velocity-pressure numerical scheme for the Stokes problem,” *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, pp. 4877–4907, 2003.

В. В. Мелешко, О. А. Гуржій, Т. С. Краснополська
Змішування в'язкої рідини в прямокутних мікроканалах

Статтю присвячено аналізу процесів змішування мікрорідин у прямолінійних мікроканалах з прямокутним поперечним перерізом і системою жолобків на одній з поверхонь каналу. Побудовано загальну методику дослідження течії в'язкої нестисливої рідини в мікроканалах з прямокутним поперечним перерізом і розроблено модельне представлення течії в наближенні Стокса. Вказана методика зводиться до розв'язання рівнянь Стокса для поздовжньої компоненти швидкості рідини (постулюється течія Пуазейля) і розв'язання бігармонічного рівняння відносно функції течії для поперечних компонент швидкості. На базі сформульованої коректної математичної задачі про течію в'язкої нестисливої рідини в прямокутному мікроканалі побудовано відповідні аналітичні розв'язки. Розв'язок бігармонічної задачі шукався у вигляді суперпозиції розв'язків із симетричним і антисиметричним розподілами функції течії по обох координатах поперечного перерізу каналу. Кожний з них представлявся у вигляді розкладу за власними функціям. Для контролю якості отриманих результатів проведено аналіз точності виконання граничних умов на поверхнях мікроканалу. Показано, що врахування п'яти членів аналітичного розв'язку бігармонічної задачі для функції течії у поперечному перерізі каналу дозволяє задовольнити граничні умови з похибкою, яка не перевищує 0.1% відносно

швидкості руху меж. Отримані розв'язки для поздовжньої та поперечних компонент поля швидкості течії рідини в розглянутій області використано для аналізу процесу змішування рідин при різних початкових умовах. Числове моделювання ходу адвекції пасивної рідини й порівняння отриманих результатів з експериментальними даними дозволяють зробити висновок про хорошу відповідність модельних уявлень реальній течії в мікроканалі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: мікрорідина, рівняння Стокса, хаотична адвекція

V. V. Meleshko, A. A. Gourjii T. S. Krasnopolskaya
Mixing of viscous fluid in rectangular microchannels

The paper deals with the analysis of microfluidics mixing processes in straight microchannels with a rectangular cross-section and system of grooves on one of the channel surfaces. A general technique for studying of the flow of a viscous incompressible fluid in microchannels with a rectangular cross-section is constructed and the model representation of the flow in the Stokes approximation is developed. The mentioned technique is reduced to solving of the Stokes equations for the longitudinal fluid velocity component (the Poiseuille flow is postulated) and solving of the biharmonic equation with respect to stream function for the transversal fluid velocity components. The corresponding solutions are constructed basing on of the formulated correct mathematical problem for the flow of a viscous incompressible fluid in a rectangular microchannel. The biharmonic problem solution is expanded in a form of a superposition of the solutions with a symmetric and antisymmetric stream function distributions with respect to both coordinates of the channel cross-section. Each of the last ones is presented as an expansion in eigenfunctions. The accuracy of the fulfillment of the boundary conditions at the microchannel surfaces was analyzed to control the quality of the obtained results. It is shown that the retaining of as much as five terms in the analytical solution of the biharmonic problem provides the fulfillment of the boundary conditions with the error not exceeding 0.1% of motion velocity of the boundaries. The obtained solutions for the longitudinal and transversal components of the fluid flow velocity field in the domain under consideration are used to analyze the fluid mixing process under various initial conditions. The numerical modeling of the passive fluid advection process and comparison of the obtained results with the experimental data lead to the conclusion that the model representation is in a good accordance with a real flow in the microchannel.

KEY WORDS: *microfluidics, the Stokes equations, chaotic advection*