

УДК 534.1:537.226.86

## АНАЛІЗ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ПРИ НЕРІВНОМІРНОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

В. Л. Карлаш

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна  
E-mail: [karlashv@ukr.net](mailto:karlashv@ukr.net)*

*Отримано 03.03.2016*

На прикладах задач про вимушені коливання вузьких п'єзокерамічних пластин-стрижнів з частково електродованими поверхнями або з розрізами електродного покриття у статті розглянуто вплив нерівномірного електричного навантаження на адмітанс і динамічний коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) перетворювачів енергії цього типу. На основі аналізу вітчизняних і закордонних бібліографічних джерел дано широку ретроспективу досліджень у цьому напрямку за останні сто років. В подальших розділах наведено основні співвідношення лінійної теорії електропружності та сформульовано крайові задачі для випадків усталених вимушених коливань тонкостінних п'єзоелектричних резонаторів з поперечною поляризацією. Дано вирази для обчислення енергетичних характеристик процесу, зокрема, динамічного КЕМЗ. Розглянуто ряд конкретних математичних постановок для різних конфігурацій поверхневих електродів. Показано, що, в залежності від характеру навантаження, відбувається суттєва зміна модової структури коливань і амплітудних співвідношень між модами. Наприклад, протифазне збудження коливань є доволі ефективним засобом для виділення обергонів, які відповідають вищим модам, і підвищення таким чином робочих частот резонаторів. Наявність безелектродних ділянок може призводити до певного (хоча й незначного) підвищення КЕМЗ основного резонансу. Наслідком закорочування частини електродів стає поява як непарних, так і парних поздовжніх мод, які не збуджуються при суцільному електродуванні. Розрахунки напруженого стану й адмітансу добре узгоджуються з експериментальними даними про амплітудно-частотні характеристики вимушених коливань п'єзоелектричних пластин з поверхнями, вкритими секціонованими електродами.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** *п'єзокерамічні перетворювачі, коефіцієнт електромеханічного зв'язку, вимушені коливання, адмітанс, активна й реактивна компоненти, напружений стан*

## 1. ВСТУП

Ефективність перетворення електричної енергії в механічну й навпаки у п'єзоелектричних електромеханічних перетворювачах — резонаторах, трансформаторах, фільтрах частот тощо — залежить від багатьох факторів. До них слід віднести, насамперед, матеріал п'єзоелектрика й геометричну форму виготовленого з нього перетворювача. У п'єзокерамічних перетворювачах надзвичайно важливу роль виконує також електродне покриття, нерозривно зв'язане з п'єзоактивним матеріалом. Наносяться електроди в процесі виготовлення п'єзокераміки й використовуються під час її поляризації та при експлуатації перетворювача. У випадку природних п'єзоелектричних кристалів електродне покриття наносять здебільшого шляхом вакуумного напилення. Товщина такого покриття у всіх випадках незначна (лише кілька сот ангстремів), тому з практичної точки зору його масою можна знехтувати. Втім, досліди багатьох учених показали, що форма й положення електродів істотно впливають на електромеханічні характеристики перетворювачів.

П'єзоелектричні пластини та стрижні з кварцу, турмаліну, сегнетової солі тощо інтенсивно досліджувались іще на початку ХХ ст. Детальний огляд публікацій з цього питання подано в монографії У. Кеді [1]. Зокрема, встановлено, що для найбільш ефективного електричного збудження основної поздовжньої моди  $L1$  тонкого стрижня необхідно залишати біля його торців безелектродні ділянки так, щоб довжина електродного покриття становила три чверті від загальної довжини пластини. Досліджуючи коливання кварцових пластин з розділеними електродами, Д. Дай [2] помітив дивне явище — між електродами, коли один з них не був приєднаний до інших, часом виникало світіння повітря, схоже на тліючий розряд. То був перший у світі прототип високовольтного п'єзотрансформатора, хоча до винаходу С. Розена [3] залишалося ще майже 30 років!

Протягом неповних ста років, які минули з часу виходу піонерських робіт [4–6], з'явилося чимало публікацій, в котрих описувались різні способи керування ефективністю перетворення енергії в п'єзоелектричних тілах. Цей перелік зайняв би не одну сторінку, проте на кількох із них варто зупинитись. У публікаціях [7, 8] для трансформаторів і резонаторів з розділеними або неповними електродами досліджено вплив положення межі розділу електродованих областей на динамічний коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ). Отримані результати були порівняні з висновками статей [9, 10], в яких зроблені розрахунки для частково електродованих п'єзокерамічних дисків. Аналітичні й експериментальні дослідження для поперечно поляризованих п'єзоелементів показали, що максимум динамічного КЕМЗ на основному поздовжньому резонансі досягається, коли електродне покриття займає 75% площі пластини. Перший радіальний резонанс досягає максимальної ефективності, коли електроди нанесені на ділянці від центру до 80% діаметра. Зауважимо, що різниця пружних властивостей електродованих і безелектродних ділянок у згаданих працях не враховувалась. Доповідь [11] присвячено дослідженню поздовжніх коливань тонкого п'єзокерамічного стрижня з двома розрізами електродів і їх протифазним з'єднанням. Її автори спромоглися виділити перший обертоном поздовжніх коливань моду  $L3$  з одночасним придушенням основної поздовжньої моди  $L1$ .

У статті [12] узагальнено результати дослідження [13], в якому вперше розглянуті поздовжні коливання стрижня з одним двостороннім розрізом електродного покриття

при кількох режимах навантаження (протифазні електроди, коротке замикання однієї з ділянок або її холостий хід) й наведені експериментальні дані щодо напруженого стану елемента. Показана також є хибність висновків робіт [14–16] про те, що в багатоелектродному стрижні буцімто можна отримати надширокосмуговий перетворювач за допомогою негативного зворотного зв'язку. У цих публікаціях описані результати експериментальних досліджень вимушених коливань тонких вузьких стрижнів-пластин, в яких електродне покриття розділялось обабіч на декілька (до шести) ділянок з однаковими площами. Два вибрані електроди використовувались як актуатори для збудження електромеханічних коливань, а решта виконували роль сенсора — з них знімалась вихідна різниця потенціалів. У статті [12] доведено, що в частотному інтервалі, який передує першому резонансному піку, й між сусідніми піками різниця потенціалів на будь-якому п'єзотрансформаторному виході визначається винятково подільником напруги, утвореним відповідними міжелектродними ємностями, й зовсім не залежить від проявів п'єзоэффекту.

Треба принагідно зауважити, що задовго до праць [7–10] А. Т. Улітко запропонував і обґрунтував так званий енергетичний метод визначення ефективних КЕМЗ [17, 18]. На прикладах поздовжніх коливань частково електродованого тонкого стрижня з поперечною поляризацією і стрижня з поздовжньою поляризацією при заглиблених електродних (або виготовленого зі склеєних один над одним електродованих дисків) було показано, що динамічний КЕМЗ досягав максимуму у випадках, коли активна частина становила 75% об'єму або площі зразка. Ці висновки були повністю підтверджені при дослідженні коливань склеєного з окремих кругових кілець макета потужного акустичного перетворювача [19]. Коливання п'єзоелементів дискової та циліндричної форми при наявності розрізних і неповних електродних також вивчалися в багатьох працях, зокрема [20–30].

Відомо, що будь-яка відділена від основного електродного покриття п'єзоелемента ділянка перетворює його на трансформатор напруги або струму [31, 32]. Наявність безелектродних областей [21], неповна поляризація окремих ділянок [33] або часткова деполіаризація [34], з'єднання (склеювання) п'єзокерамічних і металевих шарів [35, 36] призводять до нерівномірного електричного навантаження, яке з практичної точки зору може мати позитивні або негативні наслідки. У праці [37] двобічне розділення електродів параболічними, діагональними чи трикутними розрізами з протифазним електричним живленням дало можливість виділити слабо збуджувану при суцільних електродних крайову моду  $E_1$ , довівши її амплітуду до рівня першого поздовжнього резонансу.

Цікавим з точки зору сучасних нам уявлень є експеримент, описаний У. Мезоном ще у 1940 році [38]. Прямокутна пластина  $45^\circ$  X-зрізу сегнетової солі завбільшки  $18 \times 6 \times 0.6$  мм була приклеєна до прямокутної кварцової пластини  $38.9 \times 6 \times 0.6$  мм  $18.5^\circ$  зрізу. Для забезпечення можливості збудження коливань частину кварцової пластини було вкрито електродними смужками. Вузькі електродні смужки було також нанесено посередині сегнетової ділянки й на кварцовій частині за 8 мм від місця склеювання. Збуджуючи коливання на моді  $L_2$  кварцової частини, автор порівнював потенціали обох смужок, і зумів у такий спосіб визначити невідомий доти п'єзомодуль сегнетової солі. У цій дотепній конструкції наявні й актуатор (кварцова пластина), і сенсори у вигляді електродних смужок, і п'єзотрансформатор з багатьма виходами, і безелектродні ділянки.

Окремий клас нерівномірно навантажених електромеханічних перетворювачів утво-

рюють п'єзотрансформатори різноманітних конструкцій і призначення [39–49]. Багато неординарних конструкцій з нерівномірним електричним або механічним навантаженням читач можна знайти в огляді [50].

Цю статтю присвячено аналізу вимушених коливань нерівномірно навантажених перетворювачів, головним чином, пластин—стрижнів з товщиною поляризацією при одному або двох двосторонніх розрізах електродного покриття, а також частково електродованих пластин. При цьому виявлені й описані деякі електромеханічні ефекти, не помічені попередніми дослідниками. Отримані експериментальні дані повністю узгоджуються з розрахунками. Зауважимо, що ефективність перетворення енергії оцінювалась як за динамічним КЕМЗ, так і за напруженим станом і вхідним адмітансом.

## 2. АНАЛІТИЧНІ ВИРАЗИ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ПОВНОЇ ПРОВІДНОСТІ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ РЕЗОНАТОРІВ СТРИЖНЕВОГО ТИПУ

У попередніх публікаціях автора цієї статті [51–54] показано, що всі існуючі формули для повної провідності (адмітансу) п'єзокерамічних резонаторів можуть бути зведені до єдиного виразу

$$Y_{pe} = j\omega C_0 \frac{\Delta_a}{\Delta_r} = \frac{j2\pi f_{01} C_0 x}{x_{01}} \frac{\Delta_a}{\Delta_r} = ja_{C_0} x \frac{\Delta_a}{\Delta_r}, \quad a_{C_0} = \frac{2\pi f_{01} C_0}{x_{01}}, \quad (1)$$

в якому  $j$  — уявна одиниця;  $\omega$  — кругова частота;  $C_0$  — статична міжелектродна ємність;  $\Delta_r$  — резонансний визначник;  $\Delta_a$  — антирезонансний визначник;  $x$  — поточне значення комплексної безрозмірної частоти;  $x_{01}$  — активна складова резонансної безрозмірної частоти;  $f_{01}$  — виміряна частота максимуму повної провідності.

У випадку поздовжніх коливань тонкого п'єзокерамічного стрижня з поперечною поляризацією при суцільних електродах, які повністю покривають головні поверхні, маємо

$$\Delta_r(x) = \cos(x), \quad \Delta_a(x) = (1 - k_{31}^2)\Delta(x) + k_{31}^2 \frac{\sin x}{x}. \quad (2)$$

Усі електропружні коефіцієнти у виразах (1) і (2) — комплексними числами [12, 53–58]:

$$s_{11}^E = s_{110}(1 - js_{11m}), \quad \varepsilon_{33}^T = \varepsilon_{330}(1 - j\varepsilon_{33m}), \quad d_{31} = d_{310}(1 - jd_{31m}). \quad (3)$$

Для тонкого стрижня завдовжки  $l$ , завширшки  $w$  і завтовшки  $h$  з суцільними електродами справедливі такі співвідношення:

$$C_1 = C_{01}(1 - j\varepsilon_{33m}), \quad x = x_0(1 - 0.5js_{11m}), \quad C_{01} = \frac{\varepsilon_{330}lw}{h}, \quad (4)$$

$$d_{31}^2 = d_{310}^2(1 - 2jd_{31m}), \quad k_{31}^2 = k_{310}^2[1 + j(s_{11m} + \varepsilon_{33m} - 2d_{31m})].$$

Перейдемо до аналізу вимушених коливань тонких п'єзокерамічних вузьких стрижнів з частково електродованими поверхнями і з електродами, розділеними двома або одним паралельними до їхніх торців розрізами. Схематичні зображення таких структур для зразка з поздовжнім розміром  $2l$  наведено на Рис. 1, де відділені електродні ділянки вважаються увімкнутими в електричне коло протифазно. Можливі також інші схеми електричного навантаження — коротке замикання або холостий хід окремих ділянок. Електродні ділянки зображено потовщеними лініями.

Поляризація на перших трьох схемах спрямована вздовж поперечної (товщинної) координати, а на останній — поперечно-поздовжня. Ця схема зображає класичний п'єзотрансформатор типу Розена, в якому одна половина пластини поляризована по товщині, а друга — по довжині. До електродів першої (вхідної) секції підводиться низька різниця потенціалів  $V_1$  від ультразвукового генератора, а з електрода другої (вихідної) секції знімається висока різниця потенціалів  $V_2$ .

Щоб отримати вирази для повної провідності того чи іншого п'єзоперетворювача необхідно розв'язати відповідну електропружну задачу.

### 2.1. Коливання частково електродованих п'єзокерамічних стрижнів

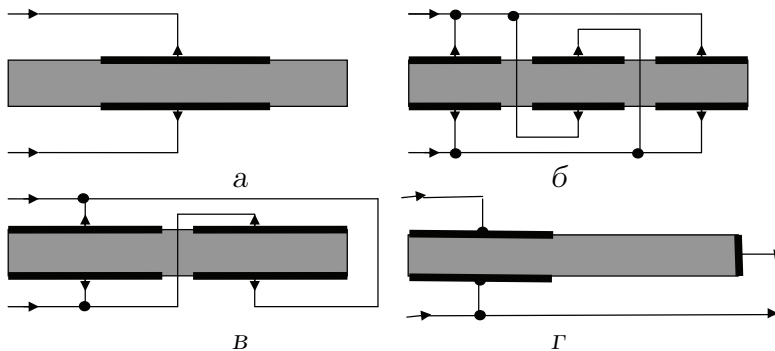


Рис. 1. Схематичні зображення деяких нерівномірно навантажених п'єзокерамічних стрижнів

Для всіх чотирьох схем сумістимо початок координат з центром пластини і почнемо розгляд першої схеми, у якій наявні електродні й безелектродні ділянки поверхні (див. Рис. 1а). Вкрита електродами ділянка I займає частину пластини з координатами  $-a \leq y \leq a$ , безелектродна ділянка II (праворуч) розміщена в межах  $a \leq y \leq l$ , а ділянка III (ліворуч) сягає  $-l \leq y \leq -a$ . Усім змінним в подальшому присвоїмо відповідні індекси 1, 2 і 3, а умовні позначення запозичимо з праць [12, 51–54]. Вважаємо, що електродне покриття було видалене з частини поверхні вже після поляризації всього стрижня. Коливання збуджуються прикладеною від генератора різницею потенціалів  $V_0 = V_0 e^{j\omega t}$  (множник  $e^{j\omega t}$  в подальшому опускаємо).

Рівняння стану й руху на електродованій ділянці мають вигляд

$$\varepsilon_{y1} = \frac{\partial U_{y1}}{\partial y} = s_{11}^E \sigma_{y1} + d_{31} E_{x1}, \quad D_{x1} = \varepsilon_{33}^T E_{x1} + d_{31} \sigma_{y1}, \quad \frac{d^2 U_{y1}}{dy^2} + \rho \omega^2 s_{11}^E U_{y1} = 0. \quad (5)$$

Для безелектродних ділянок рівняння стану інші, зокрема,

$$D_{x2} = 0, \quad E_{x2} = \frac{d_{31} \sigma_{y2}}{\varepsilon_{33}^T}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{y2} = s_{11}^E \sigma_{y2} - \frac{d_{31}^2 \sigma_{y2}}{\varepsilon_{33}^T} = s_{11}^E \sigma_{y2} \left( 1 - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} \right) = s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_{y2} = s_{11}^D \sigma_{y2}.$$

Вирази для поздовжніх зміщень і деформацій для всіх трьох ділянок мають однаковий вигляд:

$$U_{yi} = A_i \sin k_i y + B_i \cos k_i y, \quad \varepsilon_{yi} = A_i k_i \cos k_i y - B_i k_i \sin k_i y, \quad (7)$$

$$k_1^2 = \rho \omega^2 s_{11}^E, \quad k_2^2 = \rho \omega^2 s_{11}^D.$$

Для поздовжніх деформацій і напружень в областях пластини можна записати відповідно

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y1} &= s_{11}^E \sigma_{y1} + d_{31} E_{x1}, & \sigma_{y1} &= \frac{A_1 k_1 \cos k_1 y - B_1 k_1 \sin k_1 y}{s_{11}^E} - \frac{d_{31} E_{x1}}{s_{11}^E}, \\ \varepsilon_{y2} &= s_{11}^D \sigma_{y2}, & \sigma_{y2} &= \frac{A_2 k_2 \cos k_2 y - B_2 k_2 \sin k_2 y}{s_{11}^D}, \\ \varepsilon_{y3} &= s_{11}^D \sigma_{y3}, & \sigma_{y3} &= \frac{A_3 k_3 \cos k_3 y - B_3 k_3 \sin k_3 y}{s_{11}^D}. \end{aligned} \quad (8)$$

Коливання пластини вважаємо симетричними відносно її серединної площини ( $u_{yi}(-x) = -u_{yi}(x)$ ). На торцях механічні напруження відсутні, а на межі областей напруження й зміщення неперервні:

$$\begin{aligned} \sigma_{y3}|_{y=-l} = \sigma_{y2}|_{y=l} = 0, & \quad \sigma_{y1}(a) = \sigma_{y2}(a), & \quad \sigma_{y1}(-a) = \sigma_{y3}(-a), \\ U_{y1}(-a) = U_{y3}(-a) & \quad U_{y1}(0) = 0, & \quad U_{y1}(a) = U_{y2}(a). \end{aligned} \quad (9)$$

Зі співвідношень (8), (9) отримуємо

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1} \frac{\Delta_{1,2}}{\Delta} = A_3, & \quad B_1 &= 0, & \quad B_2 &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1} \frac{\Delta_3}{\Delta} = -B_3. \\ \Delta_1 &= \cos(\lambda\kappa - \lambda\gamma\kappa), & \quad \Delta_2 &= \sin(\lambda\kappa) \sin(\gamma\kappa), & \quad \Delta_3 &= \sin(\gamma\kappa) \cos(\lambda\kappa), \\ \Delta &= \lambda \cos(\gamma\kappa) \cos(\lambda\kappa - \lambda\gamma\kappa) - \sin(\gamma\kappa) \sin(\lambda\kappa - \lambda\gamma\kappa), & \quad \frac{k_2}{k_1} &= \sqrt{\frac{s_{11}^D}{s_{11}^E}}, \\ \kappa &= k_1 l, & \quad \gamma &= \frac{a}{l}, & \quad \lambda &= \frac{k_2}{k_1}, & \quad k_1 a = \gamma\kappa, & \quad k_2 l = \lambda\kappa, & \quad k_2 a = \gamma\lambda\kappa. \end{aligned} \quad (10)$$

Підставляючи перший вираз у (8) у рівняння (5) і враховуючи формули (10), отримуємо вираз для електростатичної індукції  $D_{x1}$  в електродованій ділянці:

$$D_{x1} = \varepsilon_{33}^T E_{x1} + \frac{d_{31} A_1 k_1 \cos k_1 y}{s_{11}^E} - \frac{d_{31}^2 E_{x1}}{s_{11}^E} = \varepsilon_{33}^T E_{x1} (1 - k_{31}^2) + \frac{d_{31} A_1 k_1 \cos k_1 y}{s_{11}^E}, \quad (11)$$

інтегрування якого по площі дає можливість визначити повний п'єзозаряд  $Q_1$ , струм  $I_1$  і адмітанс  $Y$  пластини:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_S D_{x1} dS = \varepsilon_{33}^T S_1 E_{x1} \left[ 1 - k_{31}^2 + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma\kappa}{\gamma\kappa} \frac{\Delta_1}{\Delta} \right], \\ I_1 &= j\omega Q_1 = -j\omega C_0^T V_0 \left[ 1 - k_{31}^2 + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma\kappa}{\gamma\kappa} \frac{\Delta_1}{\Delta} \right], \\ Y &= \frac{I_1}{V_0} = -j\omega C_0^T \left[ 1 - k_{31}^2 + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma\kappa}{\gamma\kappa} \frac{\Delta_1}{\Delta} \right] = -j\omega C_0^T \frac{\Delta_a}{\Delta_r}, \\ \Delta_r &= \Delta, & \quad \Delta_a &= (1 - k_{31}^2) \Delta + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma\kappa}{\gamma\kappa} \Delta_1, \\ C_0^T &= \frac{\varepsilon_{33}^T S_1}{\delta}, & \quad S_1 &= 8ab, & \quad \delta &= 2h, & \quad E_{x1} &= -\frac{V_0}{\delta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Всі електропружні константи у виразах (4)–(12) є комплексними.

Виходячи з цього, для розподілу зміщень і напружень уздовж пластини для  $0 \leq y \leq l$  запишемо

$$\begin{aligned} U_{y1} &= A_1 \sin k_1 y = \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1} \frac{\Delta_1}{\Delta} \sin k_1 y, \\ U_{y2} &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1} \frac{\Delta_2}{\Delta} \sin k_2 y + \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1} \frac{\Delta_3}{\Delta} \cos k_2 y, \\ \sigma_{y1} &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{s_{11}^E} \frac{\Delta_1}{\Delta} \cos k_1 y - \frac{d_{31} E_{x1}}{s_{11}^E}, \\ \sigma_{y2} &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1} \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{k_2 \cos k_2 y}{s_{11}^D} - \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1 s_{11}^D} \frac{\Delta_3}{\Delta} k_2 \sin k_2 y. \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.2. Коливання п'єзокерамічних стрижнів з трьома двосторонніми електродними ділянками

Розглянемо електродну систему зображеної на (Рис. 1б) другої схеми. Центральна ділянка I займає частину пластини —  $a \leq y \leq a$ , ділянка II (праворуч) і III (ліворуч) розміщені в межах  $a \leq y \leq l$  і  $-l \leq y \leq -a$  відповідно. Спершу будемо вважати, що всі три ділянки незалежні, причому на кожену з них діє електричне поле з напруженостями  $E_1$ ,  $E_2$  і  $E_3$ . Рівняння стану й руху для всіх трьох ділянок однакові — вони збігаються з виразами (5), — а зміщення й деформації описуються формулами (7). Граничні умови записуються аналогічно до співвідношень (9). Унаслідок симетричності поздовжніх зміщень  $B_1 = 0$ . Решта сталих інтегрування має такий вигляд:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{d_{31} E_2}{k \cos kl} + \frac{d_{31} (E_1 - E_2)}{k \cos kl} \cos(kl - ka), & B_2 &= \frac{d_{31} (E_1 - E_2)}{k \cos kl} \cos kl \sin ka, \\ A_2 &= \frac{d_{31} E_2}{k \cos kl} + \frac{d_{31} (E_1 - E_2)}{k \cos kl} \sin kl \sin ka, & A_3 &= A_2 + \frac{d_{31} (E_3 - E_2)}{k \cos(kl - ka)} \cos kl, \\ B_3 &= -A_3 \frac{\cos kl}{\sin kl} + \frac{d_{31} E_3}{k \sin kl}, & k^2 &= \rho \omega^2 s_{11}^E. \end{aligned} \quad (14)$$

Слід зауважити, що для протифазного електричного навантаження  $E_2 = E_3 = -E_1$  ці співвідношення збігаються з виразами (6) у статті [11].

Електростатична індукція в області I виражається формулою (11), звідки для наведених на електродах областей I та II п'єзозарядів і струмів отримуємо відповідно

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_S D_{x1} dS = \varepsilon_{33}^T S_1 E_1 \left[ 1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2}{\gamma \kappa} \frac{\Delta_1}{\Delta} \sin \gamma \kappa \right], \\ Q_2 &= \varepsilon_{33}^T S_2 E_1 \left[ (1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2}{\kappa - \gamma \kappa} \frac{\Delta_0}{\Delta} \right], \\ I_1 &= -j \omega C_1^T V_1 \left[ 1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2}{\gamma \kappa} \frac{\Delta_1}{\Delta} \sin \gamma \kappa \right], \\ I_2 &= -j \omega C_2^T V_1 \left[ (1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2}{\kappa - \gamma \kappa} \frac{\Delta_0}{\Delta} \right], \end{aligned} \quad (15)$$



де

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{E_2}{E_1}; & E_1 &= -\frac{V_1}{\delta}; & E_2 &= -\frac{V_2}{\delta}; & \delta &= 2h; & S_1 &= 8ab, & S_2 &= 2(l-a)b; \\ \Delta &= \cos \kappa; & \Delta_1 &= \mu_2 + (1 - \mu_2) \cos(\kappa - \gamma\kappa); & \Delta_2 &= \mu_2 + (1 - \mu_2) \sin \gamma\kappa \sin \kappa; \\ \Delta_3 &= (1 - \mu_2) \sin \gamma\kappa \cos \kappa; & \Delta_0 &= \Delta_2(\sin \kappa - \sin \gamma\kappa) + \Delta_3(\cos \kappa - \cos \gamma\kappa); \\ C_1^T &= \frac{\varepsilon_{33}^T S_1}{\delta}; & C_2^T &= \frac{\varepsilon_{33}^T S_2}{\delta}; & C_0^T &= \frac{\varepsilon_{33}^T 4lb}{\delta} = C_1^T + 2C_2^T. \end{aligned}$$

Відношення напруженостей електричного поля  $\mu_2$  може бути будь-яким, проте для практики має сенс розглядати три величини:  $\mu_2 = 0, 1$  і  $-1$ . Перша з них відповідає короткому замиканню другої і третьої ділянок, друга еквівалентна наявності суцільних електродів для всієї пластини, а третя відображає протифазне електричне навантаження [11]. Загальний струм  $I$ , який протікає через резонатор разом з адмітансом стрижня  $Y$  залежать від способу електричного навантаження його ділянок. Вважаючи ділянки II і III еквіпотенціальними, можна записати

$$\begin{aligned} I &= I_1 + 2I_2 = \\ &= -j\omega C_1^T V_1 \left[ 1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma\kappa \Delta} \sin \gamma\kappa \right] - j2\omega C_2^T V_1 \left[ (1 - k_{31}^2)\mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{\kappa - \gamma\kappa \Delta} \right] = \\ &= -j\omega C_0^T V_1 \left\{ \gamma \left[ 1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma\kappa \Delta} \sin \gamma\kappa \right] + (1 - \gamma) \left[ (1 - k_{31}^2)\mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{\kappa - \gamma\kappa \Delta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Максимуми струму в стрижні досягаються на резонансних частотах, які є коренями рівняння

$$\Delta\kappa = \cos \kappa = 0. \quad (17)$$

Для визначення антирезонансних частот, на яких струм досягає мінімальних величин, треба прирівняти до нуля вираз у фігурних дужках (він визначає адмітанс пластини) і знайти корені рівняння

$$(1 - k_{31}^2)\Delta\gamma_1 + \frac{k_{31}^2(\Delta_1 \sin \gamma\kappa + \Delta_0)}{\kappa} = 0, \quad \gamma_1 = \gamma + (1 - \gamma)\mu_2. \quad (18)$$

Згідно з цією формулою, величини антирезонансних частот визначаються статичним поперечним КЕМЗ  $k_{31}^2$ , положенням меж розділення електродів  $\gamma$ , а також відношенням напруженостей  $\mu_2$  електричного поля в ділянках I, II III.

### 2.3. Коливання п'єзокерамічних стрижнів з двома двосторонніми електродними ділянками

Якщо виконати двостороннє розділення електродного покриття і з'єднати обидві ділянки протифазно (див. Рис. 1в), то можна виділити «парні» поздовжні моди коливань  $L2, L6, L10$ , які не збуджуються при суцільних електродах і у розглянутому вище випадку



трьох областей. При короткому замиканні однієї з ділянок стрижень перетворюється на багаторезонансну систему, в якій можуть збуджуватись і непарні, й парні моди [12, 13].

Якщо вважати, що перша ділянка займає область  $-l_1 < y < 0$ , а друга  $-0 < y < l_2$ , то для внутрішніх механічних напружень і п'єзозарядів для них маємо вирази [12]

$$\begin{aligned}\sigma_{y1} &= \frac{d_{31}E_{x1}\Delta \cos ky - Ak \sin kl_1 \cos ky}{\Delta s_{11}^E \cos kl_1} - \frac{Ak \sin ky + d_{31}E_{x1}\Delta}{s_{11}^E \Delta}, \\ \sigma_{y2} &= \frac{d_{31}E_{x2}\Delta \cos ky + Ak \sin kl_2 \cos ky}{\Delta s_{11}^E \cos kl_2} - \frac{Ak \sin ky + d_{31}E_{x2}\Delta}{s_{11}^E \Delta},\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}Q_1 &= -C_{01}^T(1 - k_{31}^2)V_1 + \frac{2bd_{31}}{s_{11}^E}[A_1 \sin kl_1 + B(1 - \cos kl_1)], \\ Q_2 &= -C_{02}^T(1 - k_{31}^2)V_2 + \frac{2bd_{31}}{s_{11}^E}[A_2 \sin kl_2 + B(1 - \cos kl_2)].\end{aligned}\quad (20)$$

Тут

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{d_{31}E_{x1}}{k \cos kl_1} - B \operatorname{tg} kl_1; & A_2 &= \frac{d_{31}E_{x2}}{k \cos kl_2} + B \operatorname{tg} kl_2; \\ A &= s_{11}^E d_{31}[E_{x1} \cos kl_2(1 - \cos kl_1) - E_{x2} \cos kl_1(1 - \cos kl_2)]; & B &= \frac{A}{\Delta}; \\ \Delta &= s_{11}^E k[\cos kl_1 \sin kl_2 + \sin kl_1 \cos kl_2] = s_{11}^E k \sin k(l_1 + l_2);\end{aligned}\quad (21)$$

$$E_{x1} = -\frac{V_1}{2h}; \quad E_{x2} = -\frac{V_2}{2h}; \quad \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} = k_{31}^2; \quad \frac{2bl_1 \varepsilon_{33}^T}{2h} = C_{01}^T; \quad \frac{2bl_2 \varepsilon_{33}^T}{2h} = C_{02}^T.$$

Класичний п'єзотрансформатор, структура якого відповідає схемі (Рис. 1г), також має дві електродні ділянки. Нехай перша, вхідна, секція поляризована по товщині з електродними, розташованими на головних поверхнях при  $-l_1 < y < 0$ . Друга, вихідна або генераторна, секція займає область  $0 < y < l_2$  і має єдиний електрод на одному з торців пластини й поляризацію по довжині. Неоднорідність такої системи викликана значною різницею швидкостей звуку в її секціях, що безпосередньо впливає на енергетичні й частотні властивості перетворювача [39–41, 57, 59].

Механічні зміщення й напруження в описаній системі можна вирахувати за такими формулами [39, 59]:

$$\begin{aligned}U_{y1} &= \frac{(d_{31}E_{x1}\Delta - Ak_1 \sin k_1 l_1) \sin k_1 y + Ak_1 \cos k_1 l_1 \cos k_1 y}{k_1 \Delta \cos k_1 l_1}, \\ U_{y2} &= \frac{(g_{33}D_{y2}\Delta + Ak_2 \sin k_2 l_2) \sin k_2 y + Ak_2 \cos k_2 l_2 \cos k_2 y}{k_2 \Delta \cos k_2 l_2}, \\ \sigma_{y1} &= \frac{d_{31}E_{x1}\Delta \cos k_1 y - Ak_1 \sin k_1 l_1 \cos k_1 y}{\Delta s_{11}^E \cos k_1 l_1} - \frac{Ak_1 \sin k_1 y + d_{31}E_{x1}\Delta}{s_{11}^E \Delta}, \\ \sigma_{y2} &= \frac{g_{33}D_{y2}\Delta \cos k_2 y + Ak_2 \sin k_2 l_2 \cos k_2 y}{s_{33}^D \Delta \cos k_2 l_2} - \frac{Ak_2 \sin k_2 y + g_{33}D_{y2}\Delta}{s_{33}^D \Delta}.\end{aligned}\quad (22)$$

Як і в попередніх випадках, сталі інтегрування визначені з умов неперервності зміщень і напружень на межі секцій та відсутності поздовжніх напружень на торцях:

$$\begin{aligned}
 B_1 = B_2 = B = \frac{A}{\Delta}, \quad \Delta = s_{11}^E k_2 \cos k_1 l_1 \sin k_2 l_2 + s_{33}^D k_1 \sin k_1 l_1 \cos k_2 l_2, \\
 A = s_{33}^D d_{31} E_{x1} \cos k_2 l_2 (1 - \cos k_1 l_1) - s_{11}^E g_{33} D_{y2} \cos k_1 l_1 (1 - \cos k_2 l_2), \\
 A_1 = \frac{d_{31} E_{x1}}{k_1 \cos k_1 l_1} - B \operatorname{tg} k_1 l_1, \quad A_2 = \frac{g_{33} D_{y2}}{k_2 \cos k_2 l_2} + B \operatorname{tg} k_2 l_2, \\
 k_1^2 = \rho \omega^2 s_{11}^E, \quad k_2^2 = \rho \omega^2 s_{33}^D.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Через вхідну секцію проходить струм

$$\begin{aligned}
 I_1 = j\omega \int_{s1} D_{x1} ds = -j\omega C_{01}^T V_1 \left( 1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \operatorname{tg} k_1 l_1}{k_1 l_1} \right) + \\
 + j\omega \frac{C_{01}^T V_1 k_{31}^2 s_{33}^D \cos k_2 l_2}{l_1 \Delta \cos k_1 l_1} (1 - \cos k_1 l_1)^2 - j\omega \frac{2bd_{31}d_{33}D_{y2}}{\varepsilon_{33}^T \Delta} (1 - \cos k_1 l_1)(1 - \cos k_2 l_2),
 \end{aligned} \tag{24}$$

де

$$\begin{aligned}
 V_1 = -2E_{x1}h; \quad C_{01}^T = \frac{2bl_1\varepsilon_{33}^T}{2h}; \quad C_{01}^S = (1 - k_{31}^2)C_{01}^T; \quad g_{33} = \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T}; \quad \beta_{33}^T = \frac{1}{\varepsilon_{33}^T}; \\
 k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}; \quad k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \varepsilon_{33}^T}; \quad k_D^2 = \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D \beta_{33}^T}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

На виході генераторної секції виділяється різниця потенціалів [59]

$$V_2 = -\beta_{33}^T D_{y2} l_2 \left( 1 + k_D^2 - \frac{k_D^2 \operatorname{tg} \gamma \kappa}{\gamma \kappa} \right) + \frac{g_{33}^2 s_{11}^E D_{y2} \alpha_2^2 \cos \kappa}{s_{33}^D \Delta \cos \gamma \kappa} + \frac{g_{33} d_{31} V_1 \alpha_1 \alpha_2}{2h\Delta}, \tag{26}$$

де

$$\kappa = k_1 l_1; \quad \kappa_2 = k_2 l_2; \quad \frac{\kappa_2}{\kappa} = \gamma; \quad \alpha_1 = 1 - \cos \kappa; \quad \alpha_2 = 1 - \cos \gamma \kappa.$$

Вирази (22), (23) для напружень, зміщень і сталих інтегрування пластинкового поперечно-поздовжнього п'єзотрансформатора подібні до відповідних формул (19) і (21) для поперечно поляризованого стрижня з одним двостороннім розрізом електродного покриття. Проте ця схожість стосується лише форми запису, оскільки у п'єзотрансформаторі неможливо реалізувати ні режиму протифазного навантаження, ні режиму короткого замикання, ні режиму суцільних електродів. Якщо вираз (26) розділити на різницю потенціалів першої секції  $V_1$ , можна отримати формулу коефіцієнта трансформації [57, 60].

### 3. РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ СТРИЖНЕВИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ РЕЗОНАТОРІВ

Наведені вище аналітичні вирази були використані для розрахунків характеристичних резонансних і антирезонансних частот в залежності від співвідношення поздов-

Табл. 1. Частоти і динамічні КЕМЗ моди L1

$\gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	1.0
$x_{a1}$	1.7453	1.7453	1.7452	1.7448	1.7437	1.7415	1.7374	1.7344	1.7307	1.7209	1.7075
$x_{r1}$	1.7058	1.6704	1.6405	1.6165	1.5982	1.5853	1.5771	1.5745	1.5727	1.5710	1.5708
$k_{d1}^2$	0.0453	0.0858	0.1199	0.1471	0.1669	0.1794	0.1845	0.1844	0.1826	0.1742	0.1601
$x_{a2}$	1.6010	1.6313	1.6603	1.6862	1.7073	1.7219	1.7290	1.7295	1.7283	1.7206	1.7075
$x_{r2}$	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708
$k_{d2}^2$	0.0377	0.0741	0.1078	0.1369	0.1599	0.1755	0.1823	0.1835	0.1823	0.1741	0.1601

Табл. 2. Частоти і динамічні КЕМЗ моди L3

$\gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	1.0
$x_{a1}$	5.2359	5.2321	5.2105	5.1504	5.0488	4.9323	4.8360	4.8025	4.7801	4.7633	4.7617
$x_{r1}$	5.1276	5.0721	5.0615	5.0557	5.0141	4.9295	4.8318	4.7895	4.7558	4.7187	4.7124
$k_{d1}^2$	0.0414	0.0612	0.0572	0.0368	0.0137	0.0011	0.0017	0.0054	0.0102	0.0187	0.0207
$x_{a2}$	4.7990	4.8593	4.8671	4.8230	4.7616	4.7203	4.7141	4.7222	4.7342	4.7567	4.7617
$x_{r2}$	4.7124	4.7124	4.7124	4.7124	4.7124	4.7124	4.7124	4.7124	4.7124	4.7124	4.7124
$k_{d2}^2$	0.0361	0.0605	0.0636	0.0459	0.0207	0.0033	0.0007	0.0042	0.0092	0.0186	0.0207

жніх розмірів окремих ділянок перетворювачів. Частоти визначались чисельним способом як корені визначників  $\Delta_a$  і  $\Delta_r$ , заданих формулами (12). Табл. 1 і 2 ілюструють одержані результати для випадку, коли з попередньо поляризованої до насичення пластини-стрижня біля обох торців було видалено частину електродного покриття. Розрахунки робилися для гіпотетичного стрижня зі статичним поперечним КЕМЗ  $k_{31}^2 = 0.19$  при відповідному до нього відношенні хвильових чисел 0.9. Отримані частоти позначені в таблицях через  $x_{a1}$  і  $x_{r1}$ . Символами  $x_{a2}$  і  $x_{r2}$  позначені частоти, які відповідають відношенню хвильових чисел 1.0, як було прийнято в роботі [8], де не бралася до уваги різниця швидкостей звуку на електродованих і неелектродованих ділянках.

Квадрати динамічних КЕМЗ визначалися за відомою формулою Мезона [8, 12, 18, 56, 60–62]:

$$k_d^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2} \cong \frac{f_n^2 - f_m^2}{f_n^2} \cong \frac{2(f_n - f_m)}{f_n}. \quad (27)$$

Порівняння наведених у таблицях даних показує, що результати обох наближень сходяться в граничному випадку суцільних електродів ( $\gamma = 1$ ) і розходяться тим дужче, чим менша електродна ділянка. При урахуванні згаданої вище різниці швидкостей звуку максимум квадрату динамічного КЕМЗ, який перевищує його величину для стрижня з суцільними електродами в 1.152 рази, досягається на основному поздовжньому резонансі при  $\gamma = 0.7$ . При нехтуванні цією різницею максимум квадрату динамічного КЕМЗ спостерігається при  $\gamma = 0.75$  — зростання у 1.139 рази у порівнянні з повністю електродованим стрижнем. Аналогічний результат отримав А. Т. Улітко, застосувавши енергетичний спосіб визначення КЕМЗ [17, 18]. Максимум квадрату динамічного КЕМЗ на моді  $L3$  досягається при  $\gamma = 0.23$  урахуванням різниці швидкостей (спостерігаємо зростання проти суцільних електродів у 2.96 рази) і  $\gamma = 0.3$  — без нього (зростання в 3.07 рази).

Адмітанс стрижня з розмірами  $100 \times 10 \times 1$  мм, аналогічного до розглянутого в [11], розраховувався з використанням формул (1)–(4), (12) при заданих величинах  $\varepsilon_{33m} = 0.01$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\gamma = (0.1 \dots 0.999)$ ,  $s_{11m} = 0.01$ ,  $d_{31m} = 0.01$ ,  $a_{C0} = 1.31$  См/м,  $k_{31}^2 = 0.19$ . За результатами розрахунку для мод  $L1$  і  $L3$  побудовані графіки Рис. 2. Амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) адмітансу побудовано для випадку, коли електродна ділянка займає 0.33 площі пластини. Обидва графіки добре узгоджуються між собою — моди  $L1$  і  $L3$  при такій геометрії електродного покриття практично рівноцінні.

Адмітанс пластини-стрижня для випадку розділених з обох сторін на три ділянки електродів визначався за формулою

$$Y = \frac{I}{V_1} = -j\omega C_0^T \left\{ \gamma \left[ 1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2}{\gamma\kappa} \frac{\Delta_1}{\Delta} \sin \gamma\kappa \right] + (1 - \gamma) \left[ (1 - k_{31}^2)\mu_2 + \frac{k_{31}^2}{\kappa - \gamma\kappa} \frac{\Delta_0}{\Delta} \right] \right\}, \quad (28)$$

отриманою з виразу (16) для повного струму. На Рис. 3 показані АЧХ адмітансу вираховані для призми  $70.3 \times 8.1 \times 6.8/7.3$  мм із п'єзокераміки ЦТБС-3 з експериментально отриманими параметрами  $\varepsilon_{33m} = 0.0022$ ,  $s_{11m} = 0.0016$ ,  $d_{31m} = 0.003$ ,  $a_{C0} = 0.129$  См/м,  $k_{31}^2 = 0.074$ .

Випадок нерівномірного електричного навантаження, коли існує усього дві електродні ділянки, детально проаналізовано в публікаціях [12, 13]. Це дозволяє тому обмежитись лише порівнянням напруженого стану для кількох можливих режимів, знайденого

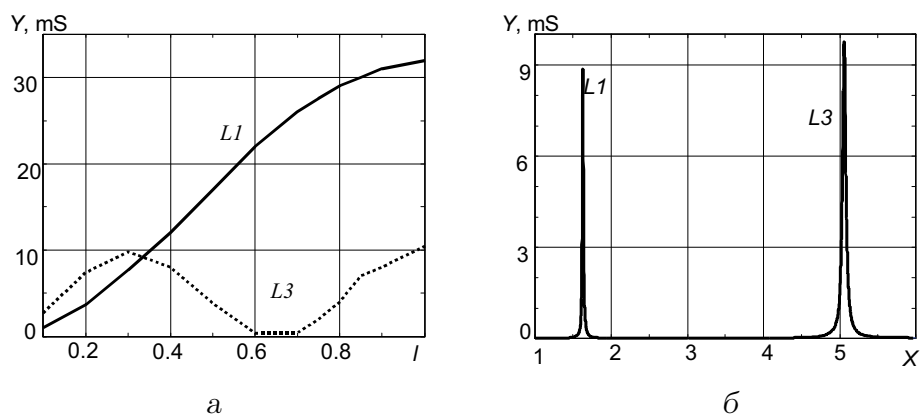


Рис. 2. Залежність адмітансу стрижня  $100 \times 10 \times 1$  мм:  
 а — від розміру електродної ділянки, б — від частоти

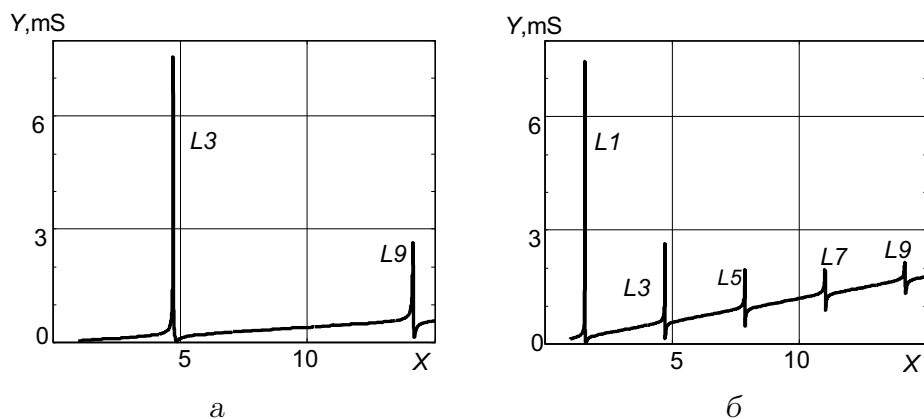


Рис. 3. Розраховані АЧХ протифазного стрижня-призми  $70.3 \times 8.1 \times 6.8/7.3$  мм з двома двобічними розрізами електродного покриття:  
 а — при  $\gamma = 0.333$ , б — при  $\gamma = 0.999$

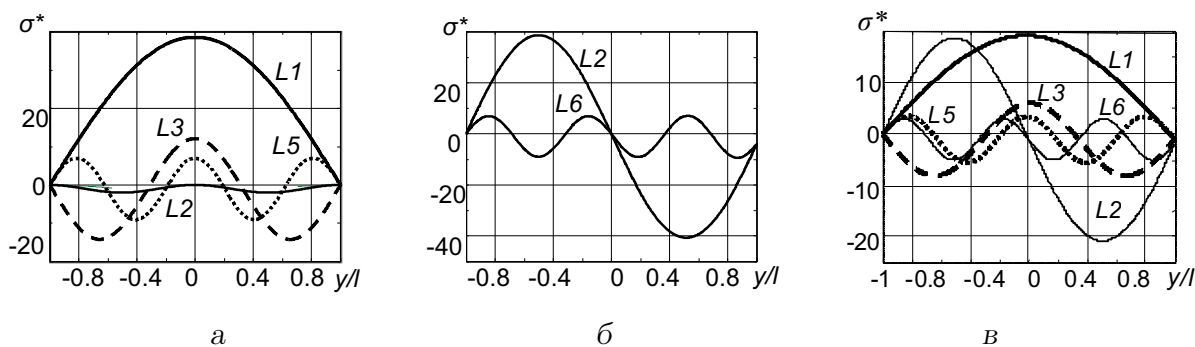


Рис. 4. Розраховані розподіли поздовжніх напружень у стрижні-призмі  $70.3 \times 8.1 \times 6.8/7.3$  мм з двостороннім розрізом електродного покриття:  
 а — для суцільних електродів, б — для протифазних електродів, в — для замкнених електродів

з використанням формул (19) і (21). При побудові графіків Рис. 4 спершу розраховувались АЧХ напружень в діапазоні безрозмірних частот (1...10), а потім на частотах максимумів відтворювались розподіли вздовж координати. По вертикалі відкладені амплітудні значення поздовжніх напружень  $\sigma^*$ , нормовані по  $d_{31}E_{x1}$ . Коли електродні ділянки з'єднані між собою як суцільні (див. Рис. 4а) найсильнішою є перша поздовжня мода  $L1$ . Водночас, мода  $L3$  змінює знак механічних напружень на лініях, які лежать на відстані  $1/3$  від обох торців. Для її виділення треба ділити електродне покриття на три рівні ділянки з обох боків і навантажувати їх протифазно. Саме до такого висновку прийшли автори статті [11] на основі енергетичного підходу.

Протифазне з'єднання сусідніх електродів супроводжується придушенням непарних мод  $L1$ ,  $L3$ ,  $L5$  тощо і виділенням першої парної моди  $L2$ , а також її обертонів  $L6$  і  $L10$ . Амплітуда напружень виділеної моди  $L2$  досягає того ж рівня, що й напруження моди  $L1$  для суцільних електродів (див. Рис. 4б). Коротке замикання половини електродного покриття вносить настільки сильну неоднорідність, що стає можливим збудження як непарних, так і деяких парних мод. При цьому амплітуди мод  $L1$ ,  $L2$  стають однаковими, але вдвічі меншими (див. Рис. 4в). Мода  $L4$  не збуджується і в цьому випадку. Щоб її отримати, треба розділити електродне покриття аж на чотири однакові ділянки і з'єднати їх протифазно. Зрозуміло, що на практиці виділяти вищі моди коливань шляхом розділення і протифазного живлення електродів можна лише для дуже тонких і вузьких стрижнів.

#### 4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ П'ЕЗОКЕРАМІЧНИХ РЕЗОНАТОРІВ

Для експериментального визначення компонентів повної провідності в діапазоні частот автором було запропоновано вдосконалену схему Мезона [51–54] з комутатором, яка дає можливість послідовно вимірювати спади напруг на дослідному п'єзоелементі  $U_{pe}$ , увімкненому послідовно з ним резисторі навантаження  $U_R$  і на вході схеми вимірювання  $U_{in}$ . Спад електричної напруги на резисторі навантаження  $U_R$  пропорційний до струму, який протікає через досліджуваний п'єзоелемент. Знаючи величини вимірних напруг разом з відповідними до них частотами  $f$  і номіналом резистора навантаження  $R$ , повну провідність  $Y_{pe}$ , її активну  $Y_{ac}$  й реактивну  $Y_{re}$  компоненти, миттєву потужність  $P_{pe}$ , вхідний імпеданс  $Z_{pe}$ , фазові зсуви між струмом і напругами вираховували за формулами

$$Y_{pe} = \frac{I_{pe}}{U_{pe}} = \frac{U_R}{RU_{pe}}, \quad Y_{ac} = Y_{pe} \cos \alpha, \quad Y_{re} = Y_{pe} \sin \alpha = Y_{pe} \sin(\arccos \alpha),$$

$$P_{pe} = U_{pe} I_{pe} = \frac{U_R U_{pe}}{R}, \quad Z_{pe} = \frac{1}{Y_{pe}}, \quad \cos \alpha = \frac{U_{pe}^2 + U_R^2 - U_{in}^2}{2U_{pe} U_R}.$$

Тут  $I_{pe}$  — електричний струм, який протікає через п'єзоелемент і його навантажувальний резистор  $R$ ;  $\alpha$  — кут між спадом напруги на п'єзоелементі  $U_{pe}$  і струмом у ньому  $I_{pe}$  (або, що те саме, між спадами напруг  $U_{pe}$  та  $U_R$ ). Величина опору резистора навантаження вибиралася згідно з рекомендаціями роботи [62] для класичної схеми Мезона.

Експериментальні дослідження проводились у такій послідовності. Дослідні зразки — стрижні з поперечною поляризацією — виготовлялися зі шматків тонких дисків

п'єзокерамік ЦТС-19 і ЦТБС-3 шляхом шліфування чи бралися готовими. До суцільних або розділених електродів припаювалися гнучкі багатожильні провідники завтовшки 0.5 мм при довжині до 50 мм. Спочатку мостом змінного струму Е 8-4 на частоті 1000 Гц вимірювалися статичні ємності  $C_0$  й тангенси діелектричних втрат  $\text{tg } \delta = \varepsilon_{33m}$ . Отримані результати використовувалися в розрахунках. До виходу генератора ГЗ-56/1, увімкненого на вихідний опір 50 Ом, приєднувався узгоджувальний подільник напруги з двох послідовно увімкнутих резисторів з номіналами 68 і 10 Ом. Послідовно з'єднані між собою досліджувані п'єзоелементи й резистори навантаження через комутатор приєднувалися паралельно до вихідного резистора узгоджувального подільника електричної напруги. Частота коливань вимірювалась електронним частотоміром ЧЗ-38, а спади напруг реєструвалися цифровим вольтметром В2-27А/1 або мілівольтметром ВЗ-38.

Дослідження велися в діапазоні частот (20...200) кГц на зразках із суцільними електродами, які потім розділялися на окремі ділянки вузькими двосторонніми розрізами за допомогою гострих твердосплавних інструментів. Отримані електродні ділянки певним чином з'єднувалися між собою ж або залишалися вільними. Напружений стан досліджувався методом п'єзотрансформаторного датчика, детально описаним у [57,59].

## 5. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Наведені нижче результати були отримані на зразках у вигляді вузьких призм з п'єзокераміки ЦТБС-3 завдовжки 70.3 мм і завширшки 8.1 мм з трапецієподібним перетином. Вужча сторона трапеції мала розмір 6.8 мм, а ширша — 7.3 мм. Площини  $70.3 \times 8.1$  мм були вкриті тонкими суцільними срібними електродами, зразки були поляризовані по товщині. Досліджувалися вимушені електромеханічні коливання трьох призм. Електродне покриття першої залишалось суцільним, у другій було зроблено двосторонній розріз посередині, а в третій — два двосторонні розрізи рівновіддалені один від одного і від країв.

Зауважимо, що, хоча розміри зразків і були однаковими, проте вони дещо відрізнялися своїми властивостями. Насамперед, це стосується статичних ємностей і тангенсів діелектричних втрат, які наведено в Табл. 3. Позначення у горішньому рядку 1.1; 2.1, 2.2 і 2.3; 3.1 і 3.2 означають: перша призма суцільні, електроди; друга призма суцільні, протифазні й закорочені електроди; третя призма суцільні й протифазні електроди відповідно.

З таблиці видно, що статичні ємності призм із суцільними електродами (схема 1.1) або при з'єднанні розділених електродів синфазно (схеми 2.1 і 3.1) відрізняються лише на 6%. Протифазне з'єднання з одним двостороннім розрізом (схема 2.2) призводить до зростання ємності на 11%, а з двома розрізами (схема 3.2) — на 28%. При короткому замиканні половини електродного покриття (схема 2.3) виміряна ємність не дорівнює половині ємності при суцільних електродах, як слід було чекати, а становить порядку

Табл. 3. Статичні ємності й діелектричні втрати дослідних зразків

Схема	1.1	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2
$C_0$ , пФ	1296	1300	1443	780	1228	1570
$\text{tg } \delta$	0.0022	0.0026	0.0029	0.0031	0.0022	0.003



0.6 від неї. Очевидно, пояснення цієї аномалії слід шукати в проявах «паразитних» ємностей, які виникають на межах розділення, оскільки ширина самих розрізів сягає лише сотих часток міліметра. На жаль, жодна теорія не може врахувати наявності «паразитних» ємностей, але про неї слід пам'ятати, щоб уникнути завищених оцінок при розрахунках статичної ємності.

Виміряні частоти максимумів та мінімумів адмітансу в кілогерцах, а також відповідні до них квадрати динамічних КЕМЗ для схем 1.1–3.2 подані в Табл. 4. Символами  $L2^*$  і  $L6^*$  позначені слабо збуджувані «моди-супутники», які спостерігаються при протифазних або закорочених електродах у схемах 2.2 і 2.3.

При зміні умов електричного навантаження змінюються також максимуми  $Y_m$  й мінімуми  $Y_n$  адмітансу, про що свідчать дані Табл. 5, побудованої аналогічно до Табл. 4. Порожні клітинки обох таблиць вказують на те, що відповідна мода в експерименті не реєструвалась. У таблицях також наведені відношення  $k^* = k_{di}^2/k_{d0}^2$  квадратів динамічних КЕМЗ кожного зареєстрованого резонансу до відповідного параметра моди  $L1$  при суцільних електродах.

Для призми з одним двостороннім розрізом електродного покриття вздовж її половини посередині було виділено 11 п'єзотрансформаторних датчиків діаметром 3 мм кожний, розміщених на відстанях 0; 3.2; 6.5; 9.5; 12.5; 15.5; 18.7; 21.5; 25; 28.2 і 32.2 мм від центру [12]. Середня ємність датчиків відносно основних електродів становила 135.2 пФ. Їхня наявність може бути однією з причин появи «супутників» праворуч від мод  $L2$  та  $L6$ .

Коефіцієнти передачі п'єзотрансформаторних датчиків пропорційні до механічних напружень під ними. Як видно з Рис. 5, їх розподіли вздовж половини поздовжньої координати, отримані в експериментах з призмою-стрижнем, повністю відповідають розрахунковим кривим Рис. 4. При аналізі кривих слід узяти до уваги, що вольтметр не реагує на полярність вимірюваних електричних напруг, тому на експериментальних графіках немає негативних величин, а переходам через нуль кривих на Рис. 4 відповідають мінімуми кривих на Рис. 5.

АЧХ адмітансу призми з двостороннім розрізом електродного покриття, показані на Рис. 6, також залежать від вибраної схеми навантаження. В діапазоні ультразвукових частот генератора (20...207) кГц у призмі з розмірами  $70.3 \times 8.1 \times 6.8/7.3$  мм при суцільних електродах спостерігаються поздовжні моди  $L1$ ,  $L3$ ,  $L5$  і  $L7$ . Також відзначимо кілька інтенсивних мод, про характер яких на базі отриманих даних говорити важко (див. Рис. 6а), і які маскують собою вищі обертони поздовжніх коливань. Входячи з цього, для стрижня вибраної геометрії доводиться обмежитись модою  $L7$ . У випадку протифазного навантаження (Рис. 6б) виділяються моди  $L2$  і  $L6$ , а праворуч від них з'являються слабенькі «супутники»  $L2^*$  і  $L6^*$ . При закорочуванні половини електродного покриття реєструються як «непарні», так і «парні» моди коливань. Відсутня лише «парна» мода  $L4$  — щоб її отримати, треба розділяти електродне покриття на чотири однакові по довжині ділянки й навантажувати електроди протифазно.

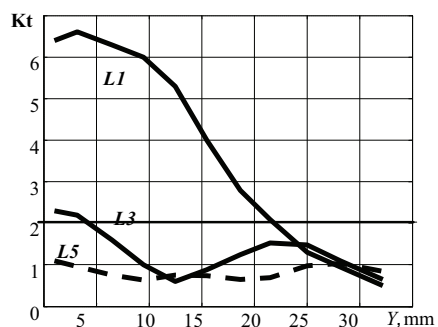
При двосторонньому розділенні електродного покриття призми на три однакові ділянки АЧХ спадів напруг знімалися для двох режимів електричного навантаження — синфазного і протифазного. Рис. 7 ілюструє отримані експериментальні й розрахункові результати для мод  $L1$  та  $L3$ . Останні було отримано з використанням формул [18–20, 30]. Оскільки моди  $L1$ ,  $L5$  при протифазному живленні не реєструвалися, то вимі-

Табл. 4. Зареєстровані моди коливань, характерні частоти й квадрати динамічних КЕМЗ п'єзокерамічних призм із двосторонніми розрізами електродного покриття

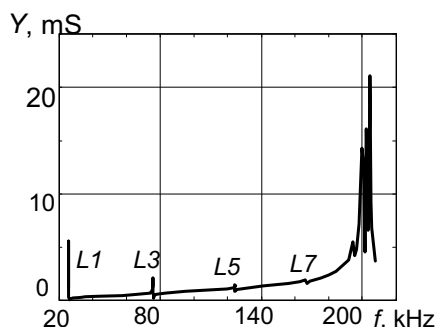
Схема	$f$	$L1$	$L2$	$L2^*$	$L3$	$L5$	$L6$	$L6^*$
2.1	$f_m$	25.744			76.022	124.432		
	$f_n$	26.363			76.242	124.668		
	$k_d^2$	0.047			0.0064	0.0026		
2.2	$f_m$	25.735	51.071	53.172			146.057	148.219
	$f_n$	25.795	52.092	53.244			146.910	148.811
	$k_d^2$	0.0047	0.0392	0.0027			0.0116	0.0021
2.3	$f_m$	25.741	51.047	53.029	75.941	124.119	146.150	
	$f_n$	26.033	51.686	53.275	76.312	124.606	148.836	
	$k_d^2$	0.0224	0.0246	0.0092	0.0097	0.0078	0.0093	
3.1	$f_m$	26.268			77.639	127.067		
	$f_n$	27.097			77.899	127.336		
	$k_d^2$	0.061			0.0067	0.0041		
3.2	$f_m$				77.459			
	$f_n$				79.439			
	$k_d^2$				0.051			
1.1	$f_m$	25.623			75.731	123.863		
	$f_n$	26.398			76.013	124.028		
	$k_d^2$	0.059			0.0074	0.0026		

Табл. 5. Адмітанси й квадрати відносних динамічних КЕМЗ п'єзокерамічних призм із двосторонніми розрізами електродного покриття

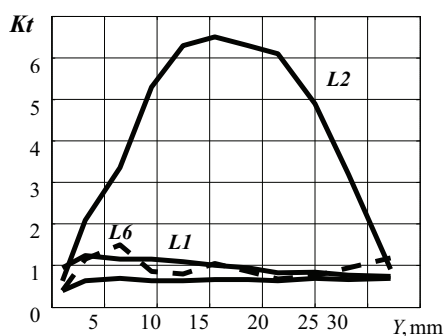
Схема	$Y, k^*$	$L1$	$L2$	$L2^*$	$L3$	$L5$	$L6$	$L6^*$
2.1	$Y_m$	5.49			2.11	1.434		
	$Y_n$	0.033			0.179	0.78		
	$k^*$	1.0			0.135	0.055		
2.2	$Y_m$	0.273	0.21	0.426			2.20	1.32
	$Y_n$	0.206	0.053	0.074			0.923	1.15
	$k^*$	0.1	0.834	0.057			0.246	0.172
2.3	$Y_m$	1.885	3.59	0.222	0.739	0.767	1.15	
	$Y_n$	0.035	0.039	0.156	0.251	0.571	0.59	
	$k^*$	0.476	0.523	0.196	0.206	0.166	0.197	
3.1	$Y_m$	7.81			3.32	1.86		
	$Y_n$	0.033			0.124	0.60		
	$k^*$	1.0			0.11	0.066		
3.2	$Y_m$				8.65			
	$Y_n$				0.067			
	$k^*$				0.82			
1.1	$Y_m$	10.64			3.42	2.12		
	$Y_n$	0.034			0.119	0.61		
	$k^*$	1.0			0.126	0.044		



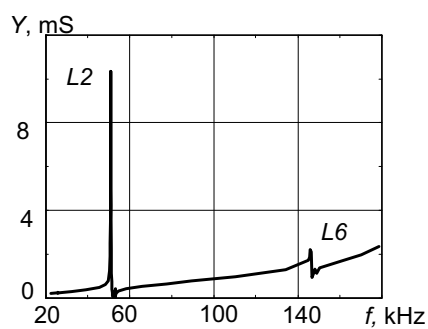
а



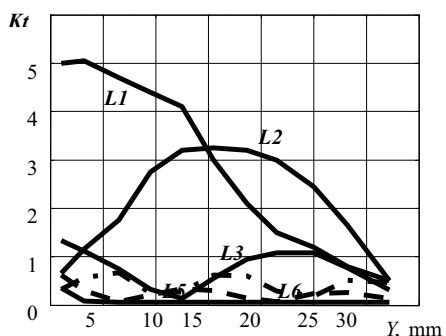
а



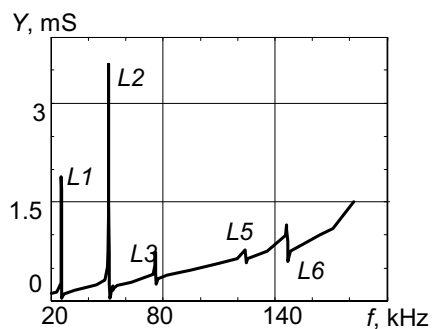
б



б



в



в

Рис. 5. Розподіли коефіцієнтів трансформації стрижня-призми  $70 \times 8 \times 7$  мм з двостороннім розрізом електродного покриття:

- а – при суцільних електродах,
- б – при протифазних електродах,
- в – при закорочених електродах

Рис. 6. АЧХ адмітансу призми з двостороннім розрізом електродного покриття:

- а – при суцільних електродах,
- б – при протифазних електродах,
- в – при закорочених електродах

рювання велися у звуженому частотному діапазоні (75...80) кГц. Відзначимо добре узгодження розрахункових і експериментальних кривих.

На Рис. 8 наведені графіки частотних залежностей вихідних потенціалів багатоелектродного п'єзотрансформатора на модах L1, L2 і L3. У відповідності зі схемою Рис. 1б,

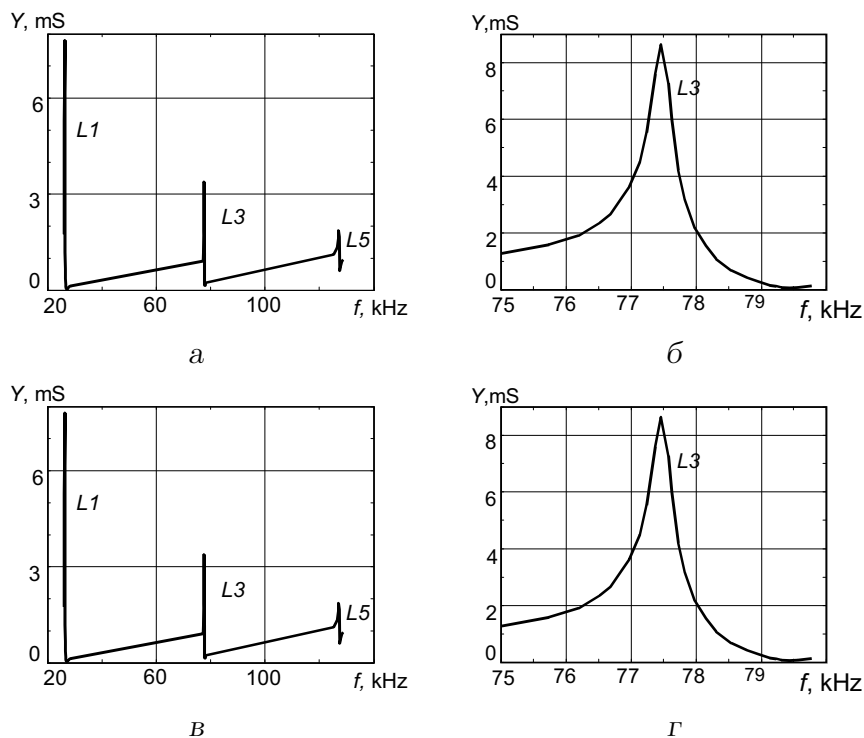


Рис. 7. АЧХ адмітансу призми з трьома однаковими по довжині електродами: **a** — експериментальні моди  $L1$ ,  $L3$ ,  $L5$  при синфазному живленні, **б** — експериментальна мода  $L3$  при протифазному живленні, **в** — розрахункова мода  $L1$  при синфазному живленні, **г** — розрахункова мода  $L3$  при протифазному живленні

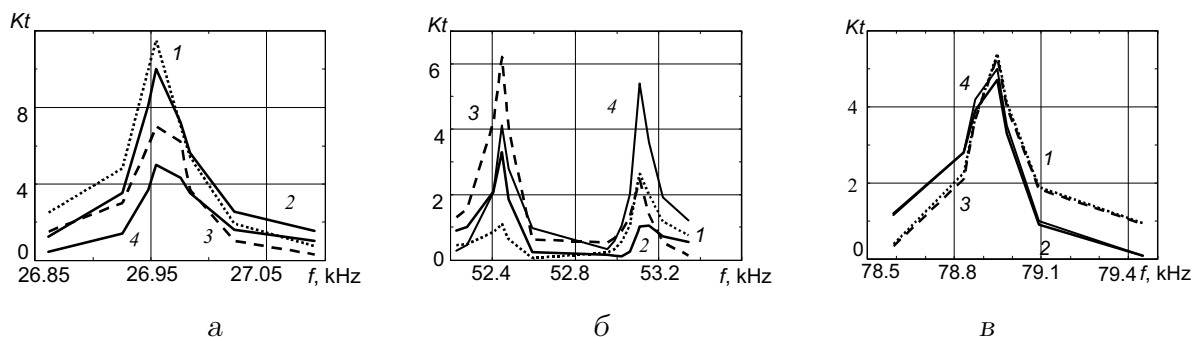


Рис. 8. АЧХ коефіцієнтів передачі багатоелектродного п'єзотрансформатора на модах: **a** —  $L1$ , **б** —  $L2$ , **в** —  $L3$

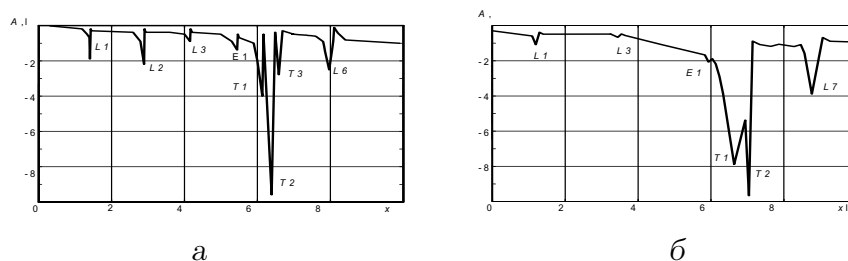


Рис. 9. Порівняння спектрів: **a** — п'єзотрансформатора з сторонами  $\sim b/l = 4.44$ , **б** — пластини з сторонами  $\sim b/l = 4.5$

призма мала три пари електродів — два центральних, два біля лівого краю пластини і два біля правого. До генератора приєднувалась ліва пара електродів. Як і слід було очікувати, коефіцієнт передачі залежав від місця розташування вихідного електрода й моди коливань. Поблизу першого поздовжнього резонансу  $L1$  більш високі вихідні напруги виникають на центральних електродах (див. криві 1 і 2 на Рис. 8а).

На моді  $L3$  спостерігається незначна залежність вихідного потенціалу від положення електрода (див. Рис. 8в). Водночас, мода  $L2$ , яка взагалі не збуджується при суцільних електродах, демонструє найбільшу залежність вихідної напруги від розташування електродів. Вона має два максимуми вихідної напруги на частотах 52.446 і 53.109 кГц (див. Рис. 8б). Причина «роздвоєння» резонансної частоти, ймовірно, полягає у значному впливі вихідних електродів на вхідні. Про це свідчить і помітне зростання частот максимумів коефіцієнтів передачі на модах  $L1$  (26.95 кГц) і  $L3$  (78.95 кГц) в режимі багатоелектродного п'єзотрансформатора порівняно з відповідними частотами максимумів адмітансу при наявності суцільних електродів — 26.268 і 77.639 кГц (див. Табл. 4).

Зауважимо, що досліджені три призми різнилися не лише власними статичними ємностями, а й квадратами поперечних КЕМЗ  $k_{31}^2$  і механічними добротностями. Так, коефіцієнти, визначені за відомою формулою [61, 62]

$$\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} = \frac{\pi f_n}{2 f_m} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi f_n - f_m}{2 f_n} \right), \quad (29)$$

становили 0.072 (призма з суцільними електродами), 0.074 (призма з двома розрізами при синфазному живленні) і 0.058 (призма із одним розрізом при синфазному живленні). Механічні добротності  $Q_m$  визначалися за АЧХ адмітансу на рівні  $-3$  дБ [51] і при однакових умовах становили 962.5; 627 і 525.6 відповідно. Цілком можливо, що зниження добротності зразків відбувається саме є внаслідок розділення електродного покриття. Нагадаємо, що в призмі з одним двостороннім розрізом були наявні ще й 11 п'єзотрансформаторних датчиків, виділених на половині її поверхні.

У випадку класичного поперечно-поздовжнього п'єзотрансформатора вплив неоднорідності електричного навантаження виявляється настільки сильним, що моди  $L1$  та  $L2$  мають практично однакові коефіцієнти трансформації в режимі холостого ходу. Це ефект був описаний раніше в публікаціях [39–41, 57, 59], де було також показано, що спектр коливань п'єзотрансформатора набагато щільніший, ніж у прямокутної пластини з тими ж геометричними параметрами. Ці відмінності проілюстровані на Рис. 9.

Поведінка будь-якого п'єзоелектричного перетворювача істотно залежить також від способу електричного навантаження, тобто від того, що підтримується сталим за амплітудою в процесі вимірювань на різних частотах — струм, напруга, потужність чи коливна швидкість. Зокрема, в статті [63] показано, що в режимі заданого (сталого за амплітудою) спаду напруги на п'єзоелементі при наближенні до резонансу миттєва потужність зростає, а поблизу від антирезонансу — знижується. Навпаки, в режимі заданого (сталого за амплітудою) струму через п'єзоелемент при наближенні до резонансу миттєва потужність знижується, а поблизу від антирезонансу — збільшується. Саме ця обставина може бути причиною виявленої авторами робіт [64, 65] нелінійності повної провідності в умовах великої вхідної потужності, а також неможливості забезпечити режим сталого струму на антирезонансі.

## 6. ВИСНОВКИ

Використання неповністю електродованих п'єзоелектричних перетворювачів дозволяє підбирати бажану величину динамічного КЕМЗ і змінювати в широких межах адмітанс, що може бути необхідним для узгодження таких пристроїв з навантаженням. Впливати в такий спосіб можна лише на основний резонанс, оскільки при використанні часткових електродів обертона ослаблені.

Завдяки розділенню електродів на кілька ділянок з наступним неоднорідним їх навантаженням виникає можливість як «підсилувати» окремі обертони, так і «гасити» небажані резонанси, включаючи основну моду коливань. Це можна робити доти, поки вибраний для «підсилення» обертон не стане «маскуватися» більш інтенсивними поперечними і/або товщинними резонансами.

У високочастотних перетворювачах типу п'єзотрансформаторних датчиків наявність вузьких розрізів електродного покриття і вільних електродних ділянок може призвести не тільки до зниження механічної добротності та зростання втрат, але й до появи слабших чи сильніших «супутників», особливо помітних біля «парних» мод, які при наявності суцільних електродів взагалі неможливо збудити.

Використана у цьому дослідженні одновимірна стрижнева модель добре описує початковий інтервал частотного спектра коливань системи з суцільними і розділеними електродом навіть для таких конструктивних елементів як довгі п'єзокерамічні призми з трапецієподібним поперечним перерізом. Аналіз інтенсивних високочастотних резонансів таких перетворювачів вимагає додаткових теоретичних і експериментальних досліджень.

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. — М. : Иностранная литература, 1949. — 718 с.
- [2] Dye D. E. The piezoelectric quartz resonator and its equivalent circuit // Proceedings of the Physical Society of London. — 1926. — Vol. 38. — P. 399–453.
- [3] Electromechanical transducer : Patent 439992 USA / C. A. Rosen ; General Electric Co. ; — 29.06.1954.
- [4] Butterworth S. On electrically maintained vibrations // Proceedings of the Physical Society of London. — 1915. — Vol. 27. — P. 410–424.
- [5] Cady W. G. Piezo-electric standards of high frequency // Journal of the Optical Society of America. — 1925. — Vol. 10. — P. 475–489.
- [6] Cady W. G. Theory of longitudinal vibrations of viscous rods // Physical Review. — 1922. — Vol. 19, no. 1. — P. 1–6.
- [7] Erhart J. Parameters and design optimization of the ring piezoelectric ceramic transformer // Journal of Advanced Dielectrics. — 2015. — Vol. 5, no. 3. — P. 1550022(1–8).

- [8] Erhart J., Tutu S. Effective electromechanical coupling for the partially electroded ceramic resonators of different geometries // Annual DUNAREA DE JOS University of Galati Fascicle IX, Metallurgy and Material Science. — 2015. — no. 2. — P. 7–16.
- [9] Ivina N. F. Analysis of the natural vibrations with partial electrodes // Acoustical Physics. — 2001. — Vol. 47, no. 6. — P. 714–720.
- [10] Rogacheva N. N. The dependence of the electromechanical coupling coefficient of piezoelectric elements on the position and size of the electrodes // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2001. — Vol. 65, no. 2. — P. 317–326.
- [11] Експериментальне вивчення ефективності перетворення енергії на резонансних коливаннях п'єзокерамічного стержня з розрізними електродами при керованому електричному збудженні / В. О. Андрущенко, О. В. Борисейко, Д. С. Немченко, І. А. Улітко. — 2009. — С. 38–43.
- [12] Карлаш В. Л. Вынужденные электромеханические колебания прямоугольных электрических стержней с разделенными электродами // Прикладная механика. — 2013. — Т. 49, № 3. — С. 125–134.
- [13] van der Veen B. The equivalent network of a piezoelectric crystal with divided electrodes // Phillips Research Reports. — 1956. — Vol. 11. — P. 66–79.
- [14] Пьезоэлектрические преобразователи: Учебное пособие / В. М. Шараров, И. Г. Минаев, Ю. Ю. Бондаренко и др. ; Под ред. В. М. Шарарова. — Черкассы : ЧГТУ, 2004. — 435 с.
- [15] About the methods of a linearization of a peak-frequency characteristics of piezoceramic transducers / V. M. Sharapov, Yu. Yu. Bondarenko, M. P. Musiyenko, T. Yu. Kisil // Вісник ЧДТУ. — 2005. — № 3. — С. 51–53.
- [16] Sharapov V. M., Musiyenko M. P., Tuz V. V. The research of piezoelectric converters with two planimetric feedback with charge amplifiers // Вісник ЧДТУ. Спецвипуск. — 2006. — С. 281–283.
- [17] Улитко А. Ф. К теории электромеханического преобразователя энергии в неравномерно деформируемых пьезокерамических телах // Прикладная механика. — 1977. — Т. 13, № 10. — С. 115–123.
- [18] Улитко А. Ф. Об определении коэффициента электромеханической связи в задачах установившихся колебаний пьезокерамических тел // Математические методы и физико-механические поля. — 1978. — № 7. — С. 77–81.
- [19] Карлаш В. Л. Формы колебаний и эффективность преобразования энергии составными пьезокерамическими стержнями // Прикладная механика. — 1987. — Т. 23, № 2. — С. 72–78.
- [20] Munk E. C. The equivalent electrical circuit for radial modes of a piezoelectric ceramic disk with concentric electrodes // Phillips Research Reports. — 1965. — Vol. 20. — P. 170–189.



- [21] Okadzahi K., Umino M. Analysis of vibrations in thin piezoceramic resonators with annular electrodes // Nippon Onkyo Gakkaishi. — 1969. — Vol. 25, no. 6. — P. 325–334.
- [22] Вовкодав И. Ф. Радиальные колебания тонкой пьезокерамической пластинки с разрезными электродами // Тепловые напряжения в элементах конструкций. — 1975. — Т. 15. — С. 99–103.
- [23] Исследование коэффициента электромеханической связи в круглых пьезокерамических пластинах / В. А. Андрущенко, И. Ф. Вовкодав, В. Л. Карлаш, А. Ф. Улитко // Прикладная механика. — 1975. — Т. 11, № 4. — С. 42–48.
- [24] Исследование радиальных колебаний тонких пьезокерамических дисков при неравномерном электрическом нагружении / В. Л. Карлаш, В. А. Ключниченко, Ю. А. Крамаров, А. Ф. Улитко // Прикладная механика. — 1977. — Т. 13, № 8. — С. 56–62.
- [25] Карлаш В. Л. Исследование несимметричных колебаний поляризованных по толщине пьезокерамических колец // Прикладная механика. — 1978. — Т. 14, № 12. — С. 88–94.
- [26] Карлаш В. Л. К теории несимметричных колебаний пьезокерамических круглых пластин с разделенными электродами // Известия АН АрмССР. — 1981. — Т. 34, № 6. — С. 60–65.
- [27] Пятраускас А., Приалгаускас С., Мажонас А. Исследование колебаний составных круглых пьезопреобразователей // Ультразвук. Научные труды вузов ЛитССР. — 1987. — Т. 19. — С. 107–113.
- [28] Раманаускас Й. Экспериментальное исследование дисковых биморфных элементов на изгибных колебаниях // Ультразвук. Научные труды вузов ЛитССР. — 1990. — Т. 20. — С. 158–163.
- [29] Борисенко Л. В., Шульга Н. А. Электроупругие колебания радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра с частично электродированными боковыми поверхностями // Прикладная механика. — 1990. — Т. 26, № 6. — С. 115–118.
- [30] Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Электроупругие колебания секционированного пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией // Прикладная механика. — 1990. — Т. 26, № 2. — С. 126–130.
- [31] Карташев И. А., Марченко Н. В. Пьезоэлектрические трансформаторы тока. — К. : Техніка, 1978. — 176 с.
- [32] Лавриненко В. В. Пьезоэлектрические трансформаторы. — М. : Энергия, 1975. — 112 с.
- [33] Крамаров Ю. А., Ключниченко В. А. Неравномерно-поляризованный пьезопреобразователь // Акустические методы и средства исследования океана. — Т. 2. — Владивосток, 1974. — С. 3–6.

- [34] Планарные колебания пьезокерамической пластины с учетом деполяризации материала, вызванной температурой виброразогрева / В. Г. Карнаухов, В. И. Козлов, В. В. Михайленко, С. В. Михайленко // Прикладная механика. — 1994. — Т. 30, № 3. — С. 67–73.
- [35] Рудницкий С. И., Шарапов В. М., Шульга Н. А. Колебания дискового биморфного преобразователя типа металл-пьезокерамика // Прикладная механика. — 1990. — Т. 26, № 10. — С. 64–72.
- [36] Червінко О. П., Жук Я. О. Співвідношення зв'язаної динамічної задачі термов'язкопластичності для гнучких оболонок з п'єзоактивними шарами // Доповіді НАН України. — 2002. — № 1. — С. 68–74.
- [37] Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин / В. Т. Гринченко, В. Л. Карлаш, В. В. Мелешко, А. Ф. Улитко // Прикладная механика. — 1976. — Т. 12, № 5. — С. 71–78.
- [38] Mason W. P. Location of hysteresis phenomena in Rochelle salt // Physical Review. — 1940. — Vol. 58. — P. 744–756.
- [39] Карлаш В. Л. Коэффициент передачи и моды колебаний плоского поперечно-продольного пьезотрансформатора // Электричество. — 2002. — № 1. — С. 51–55.
- [40] Karlash V. L. Electroelastic vibrations and transformation ratio of a planar piezoceramic transformer // Journal of Sound and Vibration. — 2004. — Vol. 277. — P. 353–367.
- [41] Karlash V. Longitudinal and lateral vibrations of a planar piezoceramic transformer // Japanese Journal of Applied Physics. — 2005. — Vol. 44, no. 4A. — P. 1852–1856.
- [42] Study on the rectangular-bar shaped multilayer piezoelectric transformer using length extensional vibration mode / J. Hu, Fuda Y., M. Katsuno, T. A. Yoshida // Japanese Journal of Applied Physics. — 1999. — Vol. 38. — P. 3208–3212.
- [43] Erhart J. Bulk piezoelectric ceramic transformers // Advances in Applied Ceramics. — 2013. — Vol. 112, no. 2. — P. 91–96.
- [44] Xue H., Yang J., Hu Y. Analysis of Rosen piezoelectric transformers with a varying cross-section // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. — 2008. — Vol. 55, no. 7. — P. 1632–1639.
- [45] A bilayer piezoelectric transformer operating in a bending vibration mode / N. Y. Wong, Y. Zhang, H. L. W. Chan, C. L. Choy // Materials Science and Engineering: B. — 2003. — Vol. 99, no. 1–3. — P. 164–167.
- [46] Enhanced magnetoelectric effect in heterostructure of magnetostrictive alloy bars and piezoelectric single-crystal transformer / C. M. Leung, S. W. Or, F. Wang et al. // Review of Scientific Instruments. — 2011. — Vol. 82, no. 1. — P. 013903.
- [47] Sebastian T., Erhart J. Bar piezoelectric ceramic transformers working in longitudinal mode // Ferroelectrics. — 2015. — Vol. 486, no. 1. — P. 13–24.

- [48] Púlpán P., Erhart J. Experimental verification of an analytical model for the ring shaped piezoelectric transformer // Journal of Electrical and Electronics Engineering. — 2015. — Vol. 8, no. 2. — P. 23–28.
- [49] Nadal K., Pigache F., Erhart J. Modeling of a ring Rosen-type piezoelectric transformer by Hamilton's principle // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. — 2015. — Vol. 62, no. 4. — P. 709–720.
- [50] Dong S. Review on piezoelectric, ultrasonic and magnetoelectric actuators // Journal of Advanced Dielectrics. — 2012. — Vol. 2, no. 1. — P. 1230001(1–18).
- [51] Карлаш В. Л. Методи визначення коефіцієнтів зв'язку і втрат енергії при коливаннях резонаторів із п'єзокераміки // Акустичний вісник. — 2012. — Т. 15, № 4. — С. 24–38.
- [52] Шульга М. О., Карлаш В. Л. Амплітудно-фазові характеристики радіальних коливань тонкого п'єзокерамічного диска біля резонансів // Доповіді НАН України. — 2013. — № 9. — С. 80–86.
- [53] Karlash V. L. Energy losses in piezoceramic resonators and its influence on vibrations' characteristics // Electronics and Communication. — 2014. — Vol. 19, no. 2(79). — P. 82–94.
- [54] Karlash V. L. Modeling of energy-loss piezoceramic resonators by electric equivalent networks with passive elements // Mathematical Modeling and Computing. — 2014. — Vol. 1, no. 2. — P. 163–177.
- [55] Holland R. Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients // IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics. — 1967. — Vol. SU-14. — P. 18–20.
- [56] Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. — К. : Наукова думка, 1990. — 228 с.
- [57] Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. — К. : Наукова думка, 2008. — 272 с.
- [58] Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика. — М. : Мир, 1974. — 288 с.
- [59] Карлаш В. Л. Резонансные электромеханические колебания пьезоэлектрических пластин // Прикладная механика. — 2005. — Т. 41, № 7. — С. 3–46.
- [60] Магнитные и диэлектрические приборы. Часть I / Под ред. Г. В. Катца. — М.-Л. : Энергия, 1964. — 416 с.
- [61] IRE standards on piezoelectric crystals: Measurements of piezoelectric ceramics // Proceedings of IRE. — 1961. — Vol. 49. — P. 1161–1169.
- [62] Глозман И. А. Пьезокерамика. — М. : Энергия, 1972. — 288 с.

- [63] Безверхий О. И., Зінчук Л. П., Карлаш В. Л. Вплив електричного навантаження на вимушені коливання поперечно поляризованих п'єзокерамічних стержнів // *Electronics and Communication*. — 2015. — Т. 20, № 4(87). — С. 77–88.
- [64] Loss mechanisms and high power piezoelectrics / K. Uchino, J. H. Zheng, Y. H. Chen et al. // *Journal of Materials Science*. — 2006. — Vol. 41. — P. 217–228.
- [65] Uchino K., Zhuang Y., Ural S. O. Loss determination methodology for a piezoelectric ceramic: New phenomenological theory and experimental proposals // *Journal of Advanced Dielectrics*. — 2011. — Vol. 1, no. 1. — P. 17–31.

## REFERENCES

- [1] W. G. Cady, *Piezoelectricity: An introduction to the theory and applications of electromechanical phenomena in crystals*. New York: McGraw-Hill, 1946.
- [2] D. E. Dye, “The piezoelectric quartz resonator and its equivalent circuit,” *Proceedings of the Physical Society of London*, vol. 38, pp. 399–453, 1926.
- [3] C. A. Rosen, “Electromechanical transducer,” 1954. 29.06.1954.
- [4] S. Butterworth, “On electrically maintained vibrations,” *Proceedings of the Physical Society of London*, vol. 27, pp. 410–424, 1914.
- [5] W. G. Cady, “Piezo-electric standards of high frequency,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 10, pp. 475–489, 1925.
- [6] W. G. Cady, “Theory of longitudinal vibrations of viscous rods,” *Physical Review*, vol. 19, no. 1, pp. 1–6, 1922.
- [7] J. Erhart, “Parameters and design optimization of the ring piezoelectric ceramic transformer,” *Journal of Advanced Dielectrics*, vol. 5, no. 3, pp. 1550022(1–8), 2015.
- [8] J. Erhart and T. Sebastian, “Effective electromechanical coupling for the partially electroded ceramic resonators of different geometries,” *Annual DUNAREA DE JOS University of Galati Fascicle IX, Metallurgy and Material Science*, no. 2, pp. 7–16, 2015.
- [9] N. F. Ivina, “Analysis of the natural vibrations with partial electrodes,” *Acoustical Physics*, vol. 47, no. 6, pp. 714–720, 2001.
- [10] N. N. Rogacheva, “The dependence of the electromechanical coupling coefficient of piezoelectric elements on the position and size of the electrodes,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 65, no. 2, pp. 317–326, 2001.
- [11] V. O. Andrushchenko, O. V. Boriseiko, D. S. Nemchenko, and I. A. Ulitko, “An experimental study of energy conversion efficiency at resonant vibration of a piezoceramic rod with split electrodes under the controlled electric excitation,” pp. 38–43, 2009.

- [12] V. L. Karlash, “Forced electromechanical vibrations of rectangular piezoceramic bars with sectionalized electrodes,” *International Applied Mechanics*, vol. 49, no. 3, pp. 360–368, 2013.
- [13] B. van der Veen, “The equivalent network of a piezoelectric crystal with divided electrodes,” *Phillips Research Reports*, vol. 11, pp. 66–79, 1956.
- [14] V. M. Sharapov, I. G. Minaev, Y. Y. Bondarenko, T. Y. Kisil, M. P. Musienko, S. V. Rotte, and I. B. Chudaeva, *Piezoelectric transducers: A tutorial*. Cherkassy: Cherkassy State University of Technology, 2004.
- [15] V. M. Sharapov, Y. Y. Bondarenko, M. P. Musiyenko, and T. Y. Kisil, “About the methods of a linearization of a peak-frequency characteristics of piezoceramic transducers,” *Vіsник Čherkas’kogo Deržavnogo Tehnologičnogo Unіversitetu*, no. 3, pp. 51–53, 2005.
- [16] V. M. Sharapov, M. P. Musiyenko, and V. V. Tuz, “The research .of piezoelectric converters with two planimetric feedback with charge amplifiers,” *Vіsник Čherkas’kogo Deržavnogo Tehnologičnogo Unіversitetu. (Special Issue)*, pp. 281–283, 2006.
- [17] A. F. Ulitko, “Theory of electromechanical energy conversion in nonuniformly deformable piezoceramics,” *Soviet Applied Mechanics*, vol. 13, no. 10, pp. 1055–1062, 1977.
- [18] A. F. Ulitko, “On determination of the electromechanical coupling coefficient in the problems of steady oscillations of piezoceramic bodies,” *Matematičeskie Metody i Fiziko-Mehaničeskie Polâ*, no. 7, pp. 77–81, 1978.
- [19] V. L. Karlash, “Vibrational modes and efficiency of energy conversion in composite piezoelectric rods,” *Soviet Applied Mechanics*, vol. 23, no. 2, pp. 170–174, 1987.
- [20] E. C. Munk, “The equivalent electrical circuit for radial modes of a piezoelectric ceramic disk with concentric electrodes,” *Phillips Research Reports*, vol. 20, pp. 170–189, 1965.
- [21] K. Okadzahi and M. Umino, “Analysis of vibrations in thin piezoceramic resonators with annular electrodes,” *Nippon Onkyo Gakkaishi*, vol. 25, no. 6, pp. 325–334, 1969.
- [22] I. F. Vovkodav, “The radial vibrations of thin piezoceramic plate with the split electrodes,” *Thermal Stress in Structural Elements*, vol. 15, pp. 99–103, 1975.
- [23] V. A. Andrushchenko, I. F. Vovkodav, V. L. Karlash, and A. F. Ulitko, “Coefficient of electromechanical coupling in piezoceramic disks,” *Soviet Applied Mechanics*, vol. 11, no. 4, pp. 377–382, 1975.
- [24] V. L. Karlash, V. A. Klyushnichenko, Y. A. Kramarov, and A. F. Ulitko, “Radial vibrations of thin piezoceramic disks under a nonuniform electric load,” *Soviet Applied Mechanics*, vol. 13, no. 8, pp. 784–789, 1977.
- [25] V. L. Karlash, “Nonsymmetric vibrations of piezoelectric ceramic rings polarized along the thickness,” *Soviet Applied Mechanics*, vol. 14, no. 12, pp. 1303–1308, 1978.

- [26] V. L. Karlash, “On the theory of non-symmetric vibration of piezoceramic round plates with split electrodes,” *Transactions of AS of Armenian SSR*, vol. 34, no. 6, pp. 60–65, 1981.
- [27] A. Pyatrauskas, S. Prilagauskas, and A. Mazhons, “Studying the vibration of composite round piezotransducers,” *Ultrasound. Research Proceedings of Universities of Lithuanian SSR*, vol. 19, pp. 107–113, 1987.
- [28] J. Ramanauskas, “An experimental study of the disk bimorphic elements under bending vibration,” *Ultrasound. Research Proceedings of Universities of Lithuanian SSR*, vol. 20, pp. 158–163, 1990.
- [29] L. V. Borisenko and N. A. Shul’ga, “Electroelastic vibrations of a radially polarized piezoceramic cylinder with partially electrodeposited side surfaces,” *Prikladnaâ Mehanika*, vol. 26, no. 6, pp. 115–118, 1990.
- [30] N. A. Shul’ga and L. V. Borisenko, “Electroelastic vibrations of a sectioned piezoceramic cylinder with axial polarization,” *Prikladnaâ Mehanika*, vol. 26, no. 2, pp. 126–130, 1990.
- [31] I. A. Kartashev and N. V. Marchenko, *Piezoelectric current transformers*. Kiev: Tehnika, 1978.
- [32] V. V. Lavrinenko, *Piezoelectric transformers*. Moscow: Energiya, 1975.
- [33] Y. A. Kramarov and V. A. Klyushnichenko, “Non-uniformly polarized piezoelectric transducer,” in *Acoustic Methods and Means of Ocean Research*, vol. 2, (Vladivostok), pp. 3–6, 1974.
- [34] V. G. Karnaukhov, V. I. Kozlov, V. V. Mikhailenko, and S. V. Mikhailenko, “Planar vibrations of piezoceramic plates with account for material depolarization caused by vibratory heating,” *International Applied Mechanics*, vol. 30, no. 3, pp. 222–227, 1994.
- [35] S. I. Rudnitskii, V. M. Sharapov, and N. A. Shul’ga, “Vibrations of a bimorphic disk transducer of the metal-piezoceramic type,” *Soviet Applied Mechanics*, vol. 26, no. 10, pp. 973–980, 1990.
- [36] O. P. Chervinko and Y. O. Zhuk, “Relationships of a coupled dynamic problem of thermoplasticity for flexible shells with piezo-active layers,” *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, no. 1, pp. 68–74, 2002.
- [37] V. T. Grinchenko, V. L. Karlash, V. V. Meleshko, and A. F. Ulitko, “Investigation of planar vibrations of rectangular piezoceramic plates,” *Soviet Applied Mechanics*, vol. 12, no. 5, pp. 483–488, 1976.
- [38] W. P. Mason, “Location of hysteresis phenomena in Rochelle salt,” *Physical Review*, vol. 58, pp. 744–756, 1940.
- [39] V. L. Karlash, “The transmission coefficient and oscillation modes of a plane transversely-longitudinal piezotransformer,” *Elektrichestvo*, no. 1, pp. 51–55, 2002.



- [40] V. L. Karlash, “Electroelastic vibrations and transformation ratio of a planar piezoceramic transformer,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 277, pp. 353–367, 2004.
- [41] V. Karlash, “Longitudinal and lateral vibrations of a planar piezoceramic transformer,” *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 44, no. 4A, pp. 1852–1856, 2005.
- [42] J. Hu, Y. Fuda, M. Katsuno, and T. A. Yoshiba, “Study on the rectangular-bar shaped multilayer piezoelectric transformer using length extensional vibration mode,” *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 38, pp. 3208–3212, 1999.
- [43] J. Erhart, “Bulk piezoelectric ceramic transformers,” *Advances in Applied Ceramics*, vol. 112, no. 2, pp. 91–96, 2013.
- [44] H. Xue, J. Yang, and Y. Hu, “Analysis of Rosen piezoelectric transformers with a varying cross-section,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 55, no. 7, pp. 1632–1639, 2008.
- [45] N. Y. Wong, Y. Zhang, H. L. W. Chan, and C. L. Choy, “A bilayer piezoelectric transformer operating in a bending vibration mode,” *Materials Science and Engineering: B*, vol. 99, no. 1–3, pp. 164–167, 2003.
- [46] C. M. Leung, S. W. Or, F. Wang, S. L. Ho, and H. Luo, “Enhanced magnetoelectric effect in heterostructure of magnetostrictive alloy bars and piezoelectric single-crystal transformer,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 82, no. 1, p. 013903, 2011.
- [47] T. Sebastian and J. Erhart, “Bar piezoelectric ceramic transformers working in longitudinal mode,” *Ferroelectrics*, vol. 486, no. 1, pp. 13–24, 2015.
- [48] P. Pûlpán and J. Erhart, “Experimental verification of an analytical model for the ring shaped piezoelectric transformer,” *Journal of Electrical and Electronics Engineering*, vol. 8, no. 2, pp. 23–28, 2015.
- [49] K. Nadal, F. Pigache, and J. Erhart, “Modeling of a ring Rosen-type piezoelectric transformer by Hamilton’s principle,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 62, no. 4, pp. 709–720, 2015.
- [50] S. Dong, “Review on piezoelectric, ultrasonic and magnetoelectric actuators,” *Journal of Advanced Dielectrics*, vol. 2, no. 1, pp. 1230001(1–18), 2012.
- [51] V. L. Karlash, “Methods for determining of the coupling and energy loss coefficients at vibration of piezoceramic resonators,” *Acoustic Bulletin*, vol. 15, no. 4, pp. 24–38, 2012.
- [52] M. O. Shul’ga and V. L. Karlash, “Amplitude-phase characteristics of radial vibrations of a thin piezoceramic disk near resonances,” *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, no. 9, pp. 80–86, 2013.
- [53] V. L. Karlash, “Energy losses in piezoceramic resonators and its influence on vibrations’ characteristics,” *Electronics and Communication*, vol. 19, no. 2(79), pp. 82–94, 2014.



- [54] V. L. Karlash, “Modeling of energy-loss piezoceramic resonators by electric equivalent networks with passive elements,” *Mathematical Modeling and Computing*, vol. 1, no. 2, pp. 163–177, 2014.
- [55] R. Holland, “Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients,” *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, vol. SU-14, pp. 18–20, 1967.
- [56] N. A. Shul’ga and A. M. Bolkisev, *Vibration of piezoceramic bodies*. Kiev: Naukova Dumka, 1990.
- [57] M. O. Shul’ga and V. L. Karlash, *Resonant electromechanic vibration of piezoceramic plates*. Kyiv: Naukova Dumka, 2008.
- [58] B. Jaffe, W. R. Cook, and H. Jaffe, *Piezoelectric ceramics*. New York: Academic Press, 1971.
- [59] V. L. Karlash, “Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates,” *International Applied Mechanics*, vol. 41, no. 7, pp. 709–747, 2005.
- [60] G. V. Katz, ed., *Magnetic and dielectric devices. Part I*. Moscow: Energiya, 1964.
- [61] “IRE standards on piezoelectric crystals: Measurements of piezoelectric ceramics,” *Proceedings of IRE*, vol. 49, pp. 1161–1169, 1961.
- [62] I. A. Glozman, *Piezoceramics*. Moscow: Energiya, 1972.
- [63] O. I. Bezverkhyi, L. P. Zinchuk, and V. L. Karlash, “Effect of the electrical loading on forced vibrations of transversely polarized piezoceramic bars,” *Electronics and Communication*, vol. 20, no. 4(87), pp. 77–88, 2015.
- [64] K. Uchino, J. H. Zheng, Y. H. Chen, X. H. Du, J. Ryu, Y. Gao, S. Ural, S. Priya, and S. Hirose, “Loss mechanisms and high power piezoelectrics,” *Journal of Materials Science*, vol. 41, pp. 217–228, 2006.
- [65] K. Uchino, Y. Zhuang, and S. O. Ural, “Loss determination methodology for a piezoelectric ceramic: New phenomenological theory and experimental proposals,” *Journal of Advanced Dielectrics*, vol. 1, no. 1, pp. 17–31, 2011.

### **В. Л. Карлаш**

#### **Анализ вынужденных колебаний пьезоэлектрических преобразователей при неравномерном электрическом нагружении**

На примерах задач о вынужденных колебаниях узких пьезокерамических пластин-стержней с частично электродированными поверхностями или с разрезами электродного покрытия в статье рассмотрено влияние неравномерного электрического нагружения на адмиттанс и динамический коэффициент электромеханической связи (КЭМС) преобразователей энергии данного типа. На основе анализа отечественных и зарубежных библиографических источников дана широкая ретроспектива исследований в этом направлении за последние сто лет. В последующих разделах

приведены основные соотношения линейной теории электроупругости и сформулированы краевые задачи для случаев установившихся вынужденных колебаний тонкостенных пьезоэлектрических резонаторов с поперечной поляризацией. Даны выражения для вычисления энергетических характеристик процесса, в частности, динамического КЭМС. Рассмотрен ряд конкретных математических постановок для разных конфигураций поверхностных электродов. Показано, что противофазное возбуждение колебаний может быть эффективным средством для выделения обертонов, соответствующих высшим модам, и повышения таким образом рабочих частот резонаторов. Наличие безэлектродных участков может привести к некоторому (хотя и незначительному) повышению КЭМС основного резонанса. Следствием закорачивания части электродов становится возбуждение как нечетных, так и четных продольных мод, которые не возбуждаются при сплошном электродировании. Расчеты напряженного состояния и адмиттанса хорошо согласуются с экспериментальными данными об амплитудно-частотных характеристиках вынужденных колебаний пьезоэлектрических пластин с поверхностями, покрытыми секционированными электродами.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** пьезокерамические преобразователи, коэффициент электромеханической связи, вынужденные колебания, адмиттанс, активная и реактивная компоненты, напряженное состояние

**V. L. Karlash**

#### **Analysis of forced vibration of piezoceramic transducers at a non-uniform electric loading**

The influence of a non-uniform electric loading on the admittance and dynamic electromechanical coupling factor (EMCF) for transducers of mentioned type is studied considering the examples of the problems describing the forced vibration of narrow piezoceramic plates-bars with partially-electroded surfaces or divided electrodes. A wide retrospective of the researches in this area for recent century is represented on the basis of analysis of the domestic and foreign bibliographic sources. The basic relations of the linear theory of electroelasticity are presented in the following sections and boundary problems for the cases of steady forced vibration of the thin-walled piezoelectric resonators with transversal polarization are formulated. The expressions for calculation of energy characteristics of the process (in particular, the dynamic EMCF) are offered. The mathematical statements corresponding to various configurations of the surface electrodes are considered. The anti-phase vibration excitation is shown to be an effective instrument for selecting the overtones corresponding to high modes and, consequently, for increasing the operating frequency. The presence of the electrodeless areas may lead to a certain (still, insignificant) EMCF increase of the fundamental resonance. Partial short-circuiting of the electrodes is resulted in occurrence of both odd and even longitudinal modes, which cannot be excited with full electrodes. The calculations made for stress state and admittance are in good agreement with the experimental data on amplitude-frequency characteristics of the forced vibration of piezoelectric plates the surfaces of which are covered with the sectional electrodes.

**KEY WORDS:** piezoceramic transducers, electromechanical coupling factor, forced vibration, admittance, active and reactive components, stress state