

И. В. Луцкая¹, В. А. Максимюк¹, И. С. Чернышенко²

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ
ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО
СЕЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ СМЕШАННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: ¹desc@inmech.kiev.ua, ²prikl@inmech.kiev.ua*

Abstract: The problems of statics of toroidal shells with elliptical cross sections, which are made from nonlinear elastic orthotropic materials, are considered. The study is carried out in accordance with a procedure based on the variational-difference method, the method of Lagrangian multipliers, and the use of mixed functionals. A calculation is carried out for the considerable ellipticity of cross section. An attention is focused on accuracy of the computational results. At that an integral criterion is chosen as coincidence between the values of internal and external forces in the transverse and longitudinal sections.

Key words: shell theory, Lagrange multipliers, composite toroidal shell, great ellipticity, locking effect.

Введение.

Классическим применением тороидальных оболочек, вследствие более компактного пространственного размещения по сравнению с цилиндрическими баллонами, являются сосуды высокого давления [5]. Стремление к дальнейшей оптимизации конструкций привело к тороидальным оболочкам некругового поперечного сечения [6, 20], в частности, эллиптического [4, 16, 17, 19], а также к оболочкам переменной толщины и с подкреплениями [17].

Замкнутые тонкие тороидальные оболочки представляют интерес как элементы космических конструкций. К ним [11, 12, 13, 18] относятся сверхлегкие надувные спутниковые компоненты, которые служат элементами антенн, поддерживающими конструкциями космических телескопов. Надувные тороидальные мембраны находят применение также в биомеханике, медицине и других областях [12]. Незамкнутые тонкие тороидальные оболочки [12] представляют отдельный интерес.

Тороидальные оболочки представляют также теоретический интерес с точки зрения тестирования методов расчета оболочек, поскольку при определенном соотношении их параметров они принимают форму таких конструкций, в некоторых частях которых напряженно-деформированное состояние (НДС) оказывается очевидным [4]. Кроме того, такие оболочки представляют методологический интерес как объект тестирования на так называемое мембранное [10] запираание (locking). Следует отметить, что подобные тесты являются преимущественно двумерными. Осесимметричное деформирование оболочек вращения двойкой кривизны вследствие, по-видимому, присущему им самоподкрепляющему эффекту, происходит, в основном, без мембранного запираания. Однако, в замкнутой тороидальной оболочке эллиптического поперечного сечения под действием внутреннего давления [4] мембранное запираание может иметь место. В этом случае поперечное сечение, подобно, как и в длинной цилиндрической оболочке [2, 14, 15], будет стремиться приобрести близкую к окружности форму, что приведет при небольших растяжениях к значительным изгибам возле большой и малой полуосей эллипса. Тогда при проведении расчетов с привлечением численных методов без применения целенаправленных подходов против запираания может наблюдаться замедленная сходимость [4].

Ускорение сходимости можно осуществить на основе смешанных функционалов, в которых дополнительно варьируются заведомо малые компоненты деформаций [4]. Этот подход является достаточно универсальным. Так, чтобы избежать мембранного запираания, можно построить смешанный функционал, в котором дополнительно варьируются мембранные деформации.

Ниже представлены результаты численного исследования вариационно-разностным методом (ВРМ) с применением смешанных функционалов осесимметричного НДС в тонких тороидальных оболочках эллиптического поперечного сечения с учетом ортотропии композитных материалов. Основные соотношения и разрешающие уравнения теории ортотропных непологих оболочек и методика решения краевых задач изложены в монографии [1] и обзоре [10]. Изучена сходимость метода в зависимости от количества варьируемых функций [4].

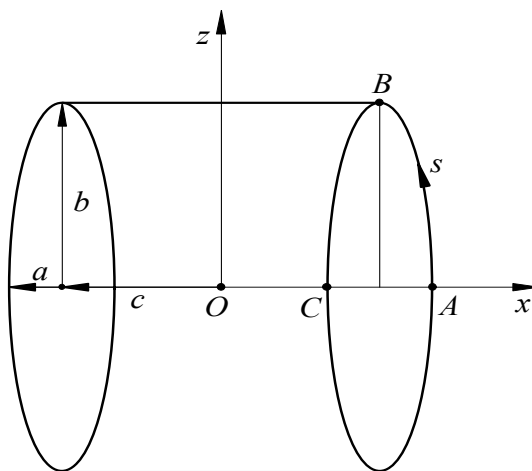
1. Постановка задач.

Примем, что в декартовой системе координат (x, y, z) срединная поверхность замкнутой тороидальной оболочки (рисунок) образована вращением вокруг оси Oz эллипса, который описывается уравнением

$$F(x, z) = \left(\frac{x-c}{a} \right)^2 + \left(\frac{z}{b} \right)^2 - 1 = 0, \quad (1)$$

где a и b – его полуоси; c – удаление центра поперечного сечения от оси вращения [4].

Срединную поверхность отнесем к криволинейной системе координат (s, θ, γ) , в которой координата γ направлена по нормали к поверхности, а s – длина дуги эллипса, которая отсчитывается от точки $A(x = c + a, z = 0)$ до точки $C(x = c - a, z = 0)$ против часовой стрелки. Оси ортотропии материала совпадают с координатными линиями принятой системы координат.



Примем, что НДС рассматриваемых оболочек описывается линейными геометрическими уравнениями моментной теории тонких оболочек и физическими уравнениями теории упругости анизотропных сред [1]; разрешающие системы уравнений получены на основе ВРМ. Для упрощения реализации гипотез Кирхгофа – Лява использован смешанный функционал с введением неопределенных множителей Лагранжа [10], имеющих смысл перерезывающих усилий. Кроме того, дополнительно могут варьироваться некоторые компоненты деформаций.

Под действием равномерно распределенного внутреннего давления НДС оболочки является осесимметричным.

2. Методические особенности решения задачи.

С помощью оригинального алгоритма численной дискретизации плоской кривой [4] уравнение (1) можно представить в параметрическом виде

$$x = x(s); \quad z = z(s).$$

Тогда в выбранной системе координат коэффициенты первой квадратичной формы определяются формулами

$$A_s = 1; \quad A_\theta = r, \quad (2)$$

а кривизны будут вычисляться следующим образом [1]:

$$k_s = r'z'' - r''z'; \quad k_\theta = z'/r. \quad (3)$$

В равенствах (2), (3) r – радиус параллельного круга; символ «штрих» обозначает дифференцирование по координате s , которое выполняется численно по разностным формулам.

В исследованиях НДС тонких тороидальных оболочек [4, 8], в которых не принимались меры против записывания, применялся смешанный функционал вида

$$\Pi_1(u, w, \varphi_s, T_{s\gamma}^f) = \iint_{\Omega} A(u, w, \varphi_s) d\Omega - A_n - A_k + \iint_{\Omega} T_{s\gamma}^f \varepsilon_{s\gamma} d\Omega, \quad (4)$$

где u, w – компоненты вектора перемещений вдоль осей (s, γ) , соответственно; A – плотность энергии деформаций; A_n и A_k – работа внешних поверхностных и краевых сил. Геометрическая часть гипотез Кирхгофа – Лява в (4)

$$\varepsilon_{s\gamma} = 0 \quad (5)$$

реализована методом неопределенных множителей Лагранжа $T_{s\gamma}^f$, имеющих смысл перерезывающих усилий. Угол поворота нормали φ_s следует из (5) при варьировании (4).

В настоящем исследовании для ускорения сходимости был применен смешанный функционал, в котором дополнительно варьируется мембранная ε_s^f деформация. После исключения соответствующего множителя Лагранжа получаем функционал вида [10]

$$\Pi_2(u, w, \varphi_s, T_{s\gamma}^f, \varepsilon_s^f) = \Pi_1(u, w, \varphi_s, T_{s\gamma}^f) - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} G_s (\varepsilon_s - \varepsilon_s^f)^2 d\Omega, \quad (6)$$

где ε_s – формула для мембранной деформации ε_s^f ; $G_s = E_s / (1 - \nu_s \nu_\theta)$; E_s, ν_s, ν_θ – упругие постоянные композита.

В сечении $z = 0$ задавались условия симметрии

$$u = 0; \quad \varphi_s = 0; \quad T_{s\gamma}^f = 0. \quad (7)$$

Отметим, что третье условие в (7), накладываемое на перерезывающее усилие, вытекает из способа построения функционалов (4) и (6), поскольку это усилие выступает в них равноценной независимой функцией наряду с перемещениями и углом поворота [8, 10]. Вместе с тем, функция ε_s^f в (6) таковой не является из-за исключения соответствующего множителя Лагранжа.

После варьирования (4) или (6) приходим к системе линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей ленточной структуры [10].

3. Числовые результаты и их анализ.

Выполнен расчет НДС оболочки с такими геометрическими параметрами [4]: $\tilde{a} = a/h = 100$; $\tilde{b} = b/h = 1000$; $\tilde{c} = c/h = 200$; $\tilde{s} = s/s_k = 2032$ – половина дуги эллипса, h – толщина оболочки, т.е. поперечное сечение сильно вытянуто вдоль оси симметрии, а протяженная часть тороидальной оболочки представляет собой две соединен-

ные по торцам коаксиальные цилиндрические оболочки с характерными величинами напряжений для них. Материал тороидальной оболочки – тканевый стеклопластик (композит) с характеристиками [1]: $E_s = 15$ ГПа; $E_\theta = 12$ ГПа; $\nu_s = 0,12$. Нагрузка – равномерно распределенное внутреннее давление интенсивности $q = 1$ МПа.

При проведении вычислений половина дуги эллипса разбивалась на ряд узловых точек ($K = 161 \dots 20481$) с равномерным шагом при помощи упомянутого алгоритма [4] численной дискретизации плоской кривой (1). Количество узловых точек последовательно удваивалось до совпадения максимальных компонент НДС с точностью до трех значащих цифр. Кроме того, применялись также два интегральных критерия точности, заключающиеся в равенстве величин внутренних (F) и внешних (P) сил в сечениях тора плоскостями Oxz и $z = 0$. В первом (вертикальном) сечении они вычисляются по формулам

$$F_\theta = h \int_0^{s_k} \sigma_\theta^0 ds; \quad P_\theta = \frac{1}{2} \pi abq; \quad (8)$$

а во втором (горизонтальном) – следующим образом:

$$F_s = 2\pi h [(c+a)\sigma_s^0(0) + (c-a)\sigma_s^0(s_k)]; \quad P_s = 4\pi acq. \quad (9)$$

В формулах (8) и (9) σ_θ^0 и σ_s^0 – соответственно, окружные и меридиональные напряжения в срединной поверхности оболочки.

Таблица 1

\tilde{s}	$\tilde{\gamma}$	σ_s , МПа	σ_θ , МПа
0	0,5	86,1	297,4
	-0,5	86,1	297,4
0,5	0,5	-184,5	107,6
	0	18,3	117,6
	-0,5	221,1	127,5
1,0	0,5	141,7	-98,6
	-0,5	141,7	-98,6

Ранее [4] для достижения указанной точности расчетов ВРМ на основе (4) функционала $\Pi_1(u, w, \varphi_s, T_{sy}^f)$, т.е. без применения целенаправленных подходов против запирания, потребовалось разбиение половины дуги эллипса на 20481 узловых точек. При этом наблюдалась замедленная, но устойчивая сходимость. Более быстрая сходимость имела место (рисунок) в точках $A (s = 0)$ и $C (s = s_k)$, где напряженное состоя-

ние ближе к безмоментному (табл. 1). В табл. 1 значения меридиональных (σ_s) и окружных (σ_θ) напряжений представлены для характерных точек эллиптического сечения ($\tilde{s} = s/s_k = 0; 0,5; 1,0$ соответствуют точкам A, B, C на рисунке) и в двух-трех точках по толщине оболочки ($\tilde{\gamma} = \gamma/h = 0, \pm 0,5$).

Замедленная сходимость (табл. 2) особенно проявилась возле большой полуоси эллипса (точка B , $\tilde{s} = 0,5$), где вследствие большого изгиба (разгиба) поперечного сечения имеют место значительные моментные напряжения. В табл. 2 в зависимости от разбиения K приведены: прогиб $w_A = w(0)/h$ в точке A ; прогиб $w_B = w(s_k)/h$, напряжения σ^+ и σ^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки в точке B ; безразмерные силы $\tilde{F}_\theta = F_\theta/qh^2$ и $\tilde{F}_s = F_s/qh^2$ в вертикальном и горизонтальном сечениях.

Видно, что с увеличением разбиения, рассчитанные внутренние силы сходятся к точным значениям внешних сил, которые при заданных геометрических параметрах равны $\tilde{P}_\theta = P_\theta/qh^2 = (\pi \cdot 10^5)/2 \approx 157079$ и $\tilde{P}_s = P_s/qh^2 = 8\pi \cdot 10^4 \approx 251327$. Причем сходимость с точностью до трех значащих цифр внутренних и внешних сил в вертикальном сечении достигается, как и сходимость прогибов w_A , уже при $K = 1281$, а в гори-

зонтальном – только при $K = 5121$. Сходимость компонентов НДС в точке B (w_B , σ^+ , σ^-) еще более медленная и достигается при $K > 20481$.

Таблица 2

K	w_A	w_B	σ^+ , МПа	σ^- , МПа	$\tilde{F}_\theta \cdot 10^{-5}$	$\tilde{F}_s \cdot 10^{-4}$
161	0,737	-0,121	70	158	1,5039	10,8630
321	0,740	-0,242	391	-66	1,5880	3,0812
641	0,715	0,325	-789	680	1,5806	33,8035
1281	0,722	0,199	-364	407	1,5769	25,9413
2561	0,722	0,209	-249	296	1,5736	25,2024
5121	0,724	0,222	-203	243	1,5719	25,1321
10241	0,723	0,227	-189	226	1,5712	25,1346
20481	0,723	0,228	-185	221	1,5710	25,1327

Таблица 3

K	w_A	w_B	σ^+ , МПа	σ^- , МПа	$\tilde{F}_\theta \cdot 10^{-5}$	$\tilde{F}_s \cdot 10^{-4}$
161	0,722	0,112	-140	167	1,6003	24,0319
321	0,723	0,131	-245	288	1,5825	33,5446
641	0,723	0,200	-215	254	1,5764	25,1566
1281	0,723	0,218	-199	237	1,5737	25,1415
2561	0,723	0,224	-191	228	1,5723	25,1327
5121	0,723	0,227	-186	223	1,5715	25,1327

Применение смешанного (6) функционала $\Pi_2(u, w, \varphi_s, T_{sy}^f, \varepsilon_s^f)$, в котором дополнительно варьируется меридиональная деформация ε_s^f , позволило несколько ускорить сходимость (табл. 3) и уменьшить разбиение до 5121 узловых точек. Хотя удовлетворительная точность по интегральным величинам и по некоторым компонентам НДС достигается уже при $K = 641$, а знаки прогиба и моментов в точке B являются правильными (в отличие от табл. 2) даже при $K = 161$.

Выводы.

Столь незначительный по сравнению с другими более показательными примерами [10] эффект ускорения сходимости от дополнительного варьирования мембранной деформации можно объяснить сложным характером НДС в такой сильно вытянутой тороидальной оболочке, в одних частях которой имеют место большие изгибы, а в других – растяжения. Отметим, что попытка дополнительного варьирования деформации κ_s^f , т.е. изменения кривизны поперечного сечения оболочки, дает незначительное ускорение сходимости по сравнению с варьированием ε_s^f . Варьирование окружных компонентов деформаций оказалось неэффективным. Для уменьшения моментов, очевидно, необходимо конструировать оболочки переменной толщины [7, 17]. Данная осесимметричная задача может пополнить коллекцию, так называемых, патологических тестов на мембранное запирание.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачі статичної торіодальних оболонок еліптичного перетину з пружних ортотропних композитних матеріалів. Дослідження проведено згідно з методикою, що ґрунтується на варіаційно-різницевому методі, методі множників Лагранжа, застосованні змішаних функціоналів. Розрахунки виконано за значної еліптичності поперечного перетину. Приділено увагу точності одержуваних результатів, при цьому за інтегральний критерій прийнято збіг значень внутрішніх і зовнішніх сил в поперечному та поздовжньому перетинах.

1. *Концентрация напряжений* / Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др. – К.: «А.С.К.», 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 7).
2. *Abrosov Yu.Yu., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Influence of Cross-Sectional Ellipticity on the Deformation of a Long Cylindrical Shell // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 5. – P. 529 – 534.
3. *Bakusov P.A., Semenov A.A.* Stability of toroidal shell segments at variation of a deflection angle // *PNRPU Mechanics Bulletin.* – 2017. – N 3. – P. 17 – 36.
4. *Chernyshenko I.S., Maksimyuk V.A.* On the Stress-Strain State of Toroidal Shells of Elliptical Cross Section Formed from Nonlinear Elastic Orthotropic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 1. – P. 90 – 97.
5. *Fowler C.P., Orifici A.C., Wang C.H.* A review of toroidal composite pressure vessel optimisation and damage tolerant design for high pressure gaseous fuel storage // *Int. J. Hydrogen Energy.* – 2016. – **41**, N 47. – P. 22067-22089.
6. *Kisioglu Y.* Burst Pressure Determination of Vehicle Toroidal Oval Cross-Section LPG fuel Tanks // *J. Pressure Vessel Technol.* – 2011. – **133**, N 3. – P. 031202-1–031202-5.
7. *Lutskaya I.V., Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Nonlinear Elastic Deformation of Thin Composite Shells of Discretely Variable Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 6. – P. 616 – 623.
8. *Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Nonlinear Elastic State of Thin-Walled Toroidal Shells Made of Orthotropic Composites // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 12. – P. 1238 – 1245.
9. *Maksimyuk V.A.* Study of the Nonlinearly Elastic State of an Orthotropic Cylindrical Shell with a Hole, Using Mixed Functionals // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 12. – P. 1602 – 1606.
10. *Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (review) // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 6. – P. 613 – 687.
11. *Pazhooh M. D., Dokainish M. A., Ziada S.* Finite Element Modal Analysis of an Inflatable, Self-rigidizing Toroidal Satellite Component // *Exper. and Appl. Mech.* – 2011. – **6**, N 1. – P. 281 – 288.
12. *Roychowdhury S., DasGupta A.* Inflating a flat toroidal membrane // *Int. J. Solids Struct.* – 2015. – **67–68**. – P. 182 – 191.
13. *Ruggiero E.J., Jha A., Park G., Inman D.J.* A literature review of ultra-light and inflated toroidal satellite components // *The Shock and Vibration Digest.* – 2003. – **35**, N 3. – P. 171 – 181.
14. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 4. – P. 386 – 397.
15. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – P. 313 – 325.
16. *Sutcliffe W.J.* Stress analysis of toroidal shells of elliptical cross-section // *Int. J. Mech. Sci.* – 1971. – **13**, N 11. – P. 951–958.
17. *Vu V.T.* Minimum Weight Design for Toroidal Shells With Strengthening Component // *J. Pressure Vessel Technol.* – 2015. – **138**, N 2. – P. 21202-1–021202-7.
18. *Young A. C., Davids W. G., Whitney D. J., Clapp J. D., Goupee A. G.* Structural testing and analysis of a braided, inflatable fabric torus structure // *Acta Astronautica.* – 2017. – **139**. – P. 189 – 200.
19. *Zingoni A., Enoma N., Govender N.* Equatorial bending of an elliptic toroidal shell // *Thin-Walled Struct.* – 2015. – **96**. – P. 286 – 294.
20. *Zu L., Koussios S., Beukers A.* A novel design solution for improving the performance of composite toroidal hydrogen storage tanks // *Int. J. Hydrogen Energy.* – 2012. – **37**, N 19. – P. 14343 – 14350.

Поступила 26.09.2017

Утверждена в печать 22.05.2018