

Е.А.Сторожук¹, И.С.Чернышенко², А.В.Яцура³

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЯ
В ПОДАТЛИВОЙ НА СДВИГ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ¹stevan@ukr.net,
²prikl@inmech.kiev.ua, ³andriy.yatsura.88@gmail.com*

Abstract. A statement is given and numerical technique for solving the static problems is developed for a composite cylindrical shell of an elliptical cross-section with a curved hole. A system of solving equations is obtained on the basis of relations of the Timoshenko refined theory of non-shallow shells and Hooke law for orthotropic materials. The proposed technique is based on application of the finite element method. For a shell loaded with axial tensile forces, an influence of physico-mechanical and geometric parameters on distribution of stresses, deformations, and displacements near the circular hole is studied.

Key words: cylindrical shell, elliptical cross section, hole, Timoshenko theory, deformation of transverse shear, finite element method, static load.

Введение.

Цилиндрические оболочки кругового и некругового сечения, изготовленные из композиционных материалов, для которых характерны слоистость, анизотропия механических свойств, неоднородность структуры, высокая податливость на сдвиг, находят широкое применение в качестве несущих элементов конструкций современной техники и сооружений. В большинстве случаев эти элементы по конструктивным или технологическим соображениям имеют отверстия различной формы. Широкое применение композитных оболочек с концентраторами напряжений, высокие требования к точности и достоверности результатов исследований требуют кроме учета действительных условий эксплуатации, также и учета особенностей их деформирования (деформаций поперечного сдвига).

В большинстве публикаций, посвященных некруговым цилиндрическим оболочкам, рассматриваются оболочки без концентраторов напряжений (отверстий, вырезов и т.п.). С помощью аналитических, численных и экспериментальных методов исследованы напряженно-деформированное состояние (НДС) [8, 16, 17, 19], колебания [13, 20] и устойчивость [18] овальных и эллиптических цилиндрических оболочек.

Отметим, что теоретические результаты по проблеме концентрации напряжений в цилиндрических оболочках с отверстиями при действии статических нагрузок получены, в основном, для случая кругового поперечного сечения. Значительная часть этих результатов относится к решению линейно-упругих задач и изложена в обобщающих монографиях и обзорных статьях [1, 3, 6, 11, 12]. Результаты решения данного класса задач с учетом нелинейных факторов (нелинейной упругости, пластических деформаций и конечных прогибов) получены для оболочек, изготовленных как из металлических [5, 14], так и композитных материалов [10].

Исследование НДС некруговых цилиндрических оболочек с отверстиями выполнено в отдельных работах и только для модели Кирхгофа – Лява. Так, в линейно-упругой постановке НДС эллиптической цилиндрической оболочки с прямоугольным

вырезом изучено в работе [2], а с круговым отверстием – в работе [11]. В физически нелинейной постановке численное исследование концентрации напряжений возле кругового отверстия на боковой поверхности цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения при действии внутреннего давления повышенной интенсивности выполнено авторами работы [15].

Из приведенного выше анализа литературных источников по данной проблеме следует, что теоретические исследования НДС податливых на поперечный сдвиг некруговых цилиндрических оболочек, ослабленных отверстием, в литературе на данное время отсутствуют.

В настоящей работе с использованием гипотезы прямой линии (учитываются деформации поперечного сдвига) дана постановка задач статики для эллиптических цилиндрических оболочек с криволинейным отверстием, приведены основные уравнения, изложена методика численного решения задач данного класса и представлены конкретные числовые результаты для оболочки, ослабленной круговым отверстием и нагруженной осевыми растягивающими усилиями.

§1. Постановка задачи и основные соотношения.

Цилиндрическую оболочку эллиптического поперечного сечения и толщины h , которая ослаблена криволинейным (круговым, эллиптическим) отверстием, отнесем к ортогональной системе координат (x, φ, γ) , где x, γ – длины образующей и нормали к срединной поверхности оболочки; φ – угол между нормалью к срединной поверхности и вертикальной осью (рис. 1). Примем, что оболочка изготовлена из композитного материала (КМ) и находится под действием поверхностной нагрузки $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$ и краевых усилий $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k, H_k\}^T$.

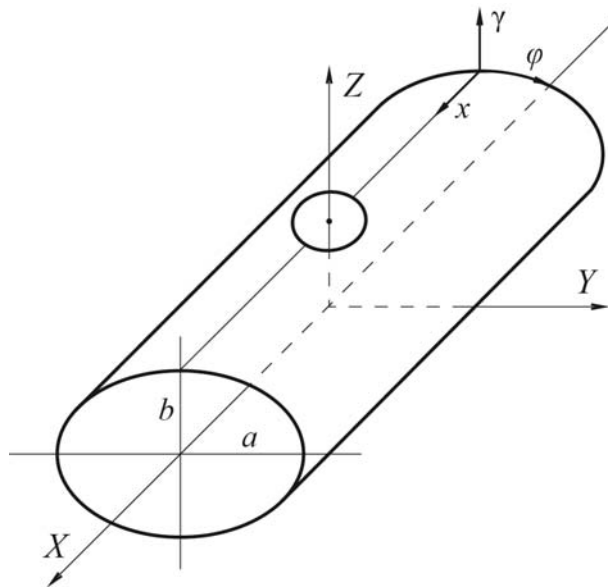


Рис. 1

Для описания геометрии срединной поверхности оболочки введем глобальную декартовую систему координат (X, Y, Z) , ось OX которой параллельна образующей, а ось OZ проходит через центр отверстия. В этом случае поперечное сечение оболочки лежит в плоскости координат (Y, Z) , а его параметрические уравнения представим в таком виде:

$$Y = \frac{a^2 \sin \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}; \quad Z = \frac{b^2 \cos \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_N), \quad (1.1)$$

где a, b – полуоси эллипса.

Для коэффициентов первой квадратичной формы и кривизн срединной поверхности оболочки имеем выражения:

$$A_1 = 1; \quad A_2 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = \frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}{a^2 b^2}. \quad (1.2)$$

Геометрические соотношения представим в векторной форме согласно уточненной теории оболочек (модели Тимошенко), которая базируется на гипотезе прямой линии [3, 7, 13].

Тогда перемещения оболочки изменяются вдоль нормали (координаты γ) по следующему закону

$$\vec{u}^{(\gamma)} = \vec{u} + \gamma \vec{\mathcal{G}}, \quad (1.3)$$

где $\vec{u} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{n} = u_1\vec{i}_1 + u_2\vec{i}_2 + u_3\vec{i}_3$ – вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ – орты системы координат (x, φ, γ) ; $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ – орты глобальной декартовой системы координат (X, Y, Z) ; $\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_x\vec{e}_1 + \mathcal{G}_\varphi\vec{e}_2 = \mathcal{G}_1\vec{i}_1 + \mathcal{G}_2\vec{i}_2 + \mathcal{G}_3\vec{i}_3$ – вектор углов поворота нормали.

Компоненты деформации оболочки определяем с помощью линейных соотношений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial x}; & \varepsilon_{22} &= \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \varphi}; & \varepsilon_{12} &= \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial x} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \varphi}; \\ \mu_{11} &= \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{G}}}{A_1 \partial x}; & \mu_{22} &= \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{G}}}{A_2 \partial \varphi}; & 2\mu_{12} &= \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{G}}}{A_1 \partial x} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{G}}}{A_2 \partial \varphi}; \\ \psi_{13} &= \mathcal{G}_x + \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial x}; & \psi_{23} &= \mathcal{G}_\varphi + \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Внутренние усилия (T_{ij}) и моменты (M_{ij}), вводимые в теории оболочек, связаны с компонентами деформации законом Гука [3, 7, 13]. Принимая, что направления ортотропии материала в каждой точке оболочки совпадают с направлениями осей координат (x, φ, γ) , физические соотношения записываем в виде:

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22}; & T_{22} &= C_{21}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22}; & T_{12} &= C_{33}\varepsilon_{12}; \\ M_{11} &= D_{11}\mu_{11} + D_{12}\mu_{22}; & M_{22} &= D_{21}\mu_{11} + D_{22}\mu_{22}; & M_{12} &= D_{33}2\mu_{12}; \\ Q_{13} &= K_1\psi_{13}; & Q_{23} &= K_2\psi_{23}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь C_{mn}, D_{mn}, K_l ($m, n, l = 1, 2; m = n = 3$) – жесткостные характеристики оболочки, значения которых вычисляются согласно формулам:

$$\begin{aligned} C_{mn} &= B_{mn}h; & D_{mn} &= B_{mn}h^3/12; & K_l &= G_{l3}h; \\ B_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & B_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & B_{12} &= B_{21} = \nu_{21}B_{11} = \nu_{12}B_{22}; & B_{33} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где E_{11}, E_{22} – модули упругости в направлениях образующей и направляющей, соответственно; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига; ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона.

§2. Методика численного решения краевых задач для эллиптической цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием, с учетом деформаций поперечного сдвига.

Систему разрешающих уравнений получим из вариационного уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} & \iint_{(\Sigma)} (T_{11}\delta\varepsilon_{11} + T_{22}\delta\varepsilon_{22} + T_{12}\delta\varepsilon_{12} + M_{11}\delta\mu_{11} + M_{22}\delta\mu_{22} + 2M_{12}\delta\mu_{12} + Q_1\delta\psi_{13} + Q_2\delta\psi_{23})d\Sigma - \\ & - \int_{(\Gamma_k)} (T_k\delta u_m + S_k\delta u_\tau + Q_k\delta w + M_k\delta\vartheta_m + H_k\delta\vartheta_\tau)ds - \\ & - \iint_{(\Sigma_p)} (p_1\delta u + p_2\delta v + p_3\delta w)d\Sigma = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где u, v, w и $u_m, u_\tau, w, \vartheta_m, \vartheta_\tau$ – перемещения точек срединной поверхности и контура оболочки; (Σ_p) – часть срединной поверхности оболочки (Σ) , на которой заданы поверхностные силы, (Γ_k) – часть контура оболочки, на которой заданы краевые силы.

Сформулированную выше краевую задачу о НДС податливой на сдвиг композитной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения с криволинейным отверстием решаем методом конечных элементов (МКЭ). Разработан вариант МКЭ, который учитывает специфику деформирования некруговых цилиндрических оболочек, ослабленных отверстиями, при действии статических нагрузок. Предложенная модификация МКЭ имеет ряд особенностей.

1. Для компонент деформации оболочки используются соотношения в векторной форме (1.4).

2. При построении конечного элемента (КЭ) оболочки аппроксимируются вектора перемещений \vec{u} и углов поворота нормали $\vec{\vartheta}$, т.е. проекции этих векторов u_k и ϑ_k на оси глобальной декартовой системы координат (X, Y, Z) :

$$u_k = \sum_{i=1}^4 u_k^{(i)} L_i(\xi, \eta); \quad \vartheta_k = \sum_{i=1}^4 \vartheta_k^{(i)} L_i(\xi, \eta) \quad (k=1, 2, 3), \quad (2.2)$$

а не их компоненты (u, v, w) и $(\vartheta_x, \vartheta_\varphi)$ в системе координат (x, φ, γ) .

В соотношениях (2.2) введены обозначения: i – локальный номер узла КЭ; $L_i(\xi, \eta)$ – билинейные функции формы локальных координат $(-1 \leq \xi, \eta \leq 1)$.

3. С целью исключения отрицательного влияния явлений мембранного и сдвигового заперения на сходимость результатов численных расчетов применяется метод двойной аппроксимации [4, 9], т.е. компоненты деформации оболочки в локальных координатах (ξ, η) внутри КЭ определяются в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \varepsilon_{\xi\xi}^{(5)} \frac{1-\eta}{2} + \varepsilon_{\xi\xi}^{(7)} \frac{1+\eta}{2}; \quad \varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{\eta\eta}^{(8)} \frac{1-\xi}{2} + \varepsilon_{\eta\eta}^{(6)} \frac{1+\xi}{2}; \quad \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{\xi\eta}^{(0)}; \\ \mu_{\xi\xi} &= \mu_{\xi\xi}^{(5)} \frac{1-\eta}{2} + \mu_{\xi\xi}^{(7)} \frac{1+\eta}{2}; \quad \mu_{\eta\eta} = \mu_{\eta\eta}^{(8)} \frac{1-\xi}{2} + \mu_{\eta\eta}^{(6)} \frac{1+\xi}{2}; \quad \mu_{\xi\eta} = \mu_{\xi\eta}^{(0)}; \\ \psi_{\xi 3} &= \psi_{\xi 3}^{(5)} \frac{1-\eta}{2} + \psi_{\xi 3}^{(7)} \frac{1+\eta}{2}; \quad \psi_{\eta 3} = \psi_{\eta 3}^{(8)} \frac{1-\xi}{2} + \psi_{\eta 3}^{(6)} \frac{1+\xi}{2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\varepsilon_{\xi\xi}^{(i)}, \varepsilon_{\eta\eta}^{(i)}, \mu_{\xi\xi}^{(i)}, \dots, \psi_{\eta 3}^{(i)}$ – компоненты деформации в i -й точке (рис. 2), вычисленные по формулам:

$$\varepsilon_{\xi\xi}^{(5)} = \frac{\partial \vec{r}^{(5)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(5)}}{\partial \xi}; \quad \mu_{\xi\xi}^{(5)} = \frac{\partial \vec{r}^{(5)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{g}^{(5)}}{\partial \xi}; \quad \psi_{\xi 3}^{(5)} = \frac{\partial \vec{r}^{(5)}}{\partial \xi} \cdot \vec{g}^{(5)} + \vec{n}^{(5)} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(5)}}{\partial \xi} \quad (5 \rightarrow 7);$$

$$\varepsilon_{\eta\eta}^{(6)} = \frac{\partial \vec{r}^{(6)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(6)}}{\partial \eta}; \quad \mu_{\eta\eta}^{(6)} = \frac{\partial \vec{r}^{(6)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \vec{g}^{(6)}}{\partial \eta}; \quad \psi_{\eta 3}^{(6)} = \frac{\partial \vec{r}^{(6)}}{\partial \eta} \cdot \vec{g}^{(6)} + \vec{n}^{(6)} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(6)}}{\partial \eta} \quad (6 \rightarrow 8);$$

$$\varepsilon_{\xi\eta}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}^{(5)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(5)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{r}^{(7)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(7)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{r}^{(6)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(6)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{r}^{(8)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{(8)}}{\partial \eta} \right);$$

$$2\mu_{\xi\eta}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}^{(5)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \vec{g}^{(5)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{r}^{(7)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \vec{g}^{(7)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{r}^{(6)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{g}^{(6)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{r}^{(8)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{g}^{(8)}}{\partial \eta} \right).$$

Здесь \vec{r} – радиус-вектор точек срединной поверхности оболочки.

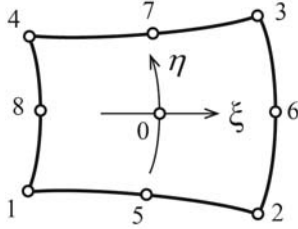


Рис. 2

Переход от компонент деформации (2.3) в локальной системе координат (ξ, η) к компонентам деформации (1.4) в сопряженной системе координат (x, φ) осуществляется согласно следующим соотношениям:

$$\{\varepsilon_x\} = [A]^{-1} [P]^{-1} \{\varepsilon_\xi\}; \quad \{\mu_x\} = [A]^{-1} [P]^{-1} \{\mu_\xi\};$$

$$\{\psi_x\} = [B]^{-1} [J]^{-1} \{\psi_\xi\}. \quad (2.4)$$

В формулах (2.4) введены обозначения:

$$\{\varepsilon_\xi\} = \{\varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\eta\eta}, \varepsilon_{\xi\eta}\}^T; \quad \{\varepsilon_x\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}^T; \quad \{\mu_\xi\} = \{\mu_{\xi\xi}, \mu_{\eta\eta}, 2\mu_{\xi\eta}\}^T;$$

$$\{\mu_x\} = \{\mu_{11}, \mu_{22}, 2\mu_{12}\}^T; \quad \{\psi_\xi\} = \{\psi_{\xi 3}, \psi_{\eta 3}\}^T; \quad \{\psi_x\} = \{\psi_{13}, \psi_{23}\}^T;$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \end{bmatrix}; \quad [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{bmatrix};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 A_2 \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Построенный таким образом криволинейный КЭ оболочки удовлетворяет условиям непрерывности векторов перемещений и углов поворота, точно описывает поступательную часть перемещения КЭ как жесткого целого и свободен от явлений мембранного и сдвигового запирааний.

Из условий стационарности дискретного аналога функционала Лагранжа получим систему разрешающих уравнений для нетонкой композитной цилиндрической оболочки эллиптического сечения с отверстием, которая в матричной форме имеет вид:

$$[K]\{q\} = \{P\}, \quad (2.5)$$

где $[K]$ – матрица жесткости оболочки; $\{q\}$ – вектор узловых степеней свободы; $\{P\}$ – вектор нагрузок.

§3. Апробация численного подхода.

Эффективность разработанной методики проверена путем решения тестовых задач и сравнения полученных результатов с данными других авторов и аналитически-численного решения (АЧР) [16]. В качестве тестового примера рассмотрим краевую задачу о НДС замкнутой бесконечно длинной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения. Оболочка изготовлена из трансверсально-изотропного материала и нагружена парой диаметрально противоположных равномерно распределенных вдоль образующих перерезывающих сил интенсивности P ($P/h = \tilde{P}/h \cdot 10^5$ Па), приложенных в вершинах поперечного сечения (рис. 3).

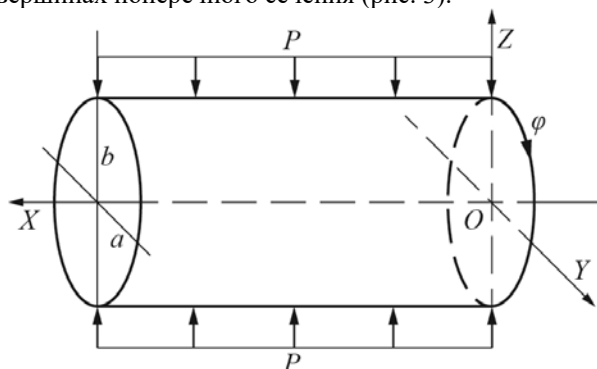


Рис. 3

Расчеты выполнены для оболочки постоянной толщины h с параметрами:

$$a/h = 100; \quad b/h = 50; \quad E = 38,4 \text{ ГПа}; \quad G_{\varphi\gamma} = 0,01E; \quad \nu = 0,3.$$

Ниже приведены значения относительных прогибов $\tilde{w} = w/h$ (табл. 1) в двух точках контура поперечного сечения $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ (в концах малой и большой полуосей), а также напряжений $\tilde{\sigma}_\varphi$ ($\sigma_\varphi = \tilde{\sigma}_\varphi \cdot 10^5$ Па) в этих же точках на внешней ($\tilde{\sigma}_\varphi^+$; табл. 2) и внутренней ($\tilde{\sigma}_\varphi^-$; табл. 3) поверхностях оболочки. Данные получены с использованием разработанной методики (МКЭ с двойной аппроксимацией) и варианта МКЭ без двойной аппроксимации для интенсивности действующей нагрузки $\tilde{P}/h = 1$. Там же представлены результаты АЧР и значения отклонений Δ численных решений от АЧР в зависимости от количества элементов N вдоль четверти контура поперечного сечения.

Таблица 1

| МКЭ с двойной аппроксимацией | | | | | МКЭ без двойной аппроксимации | | | | |
|--|----------------|--------------|--------------------|--------------|-------------------------------|----------------|--------------|--------------------|--------------|
| N | $\tilde{w}(0)$ | $\Delta, \%$ | $\tilde{w}(\pi/2)$ | $\Delta, \%$ | N | $\tilde{w}(0)$ | $\Delta, \%$ | $\tilde{w}(\pi/2)$ | $\Delta, \%$ |
| 10 | -1,562 | 5,7 | 0,676 | 3,7 | 100 | -1,175 | 29,0 | 0,499 | 28,9 |
| 20 | -1,632 | 1,4 | 0,696 | 0,9 | 200 | -1,502 | 9,3 | 0,637 | 9,3 |
| 40 | -1,650 | 0,4 | 0,701 | 0,1 | 400 | -1,615 | 2,5 | 0,685 | 2,4 |
| 80 | -1,655 | 0,1 | 0,702 | 0,0 | 800 | -1,646 | 0,6 | 0,698 | 0,6 |
| Аналитически-численное решение (АЧР): $\tilde{w}(0) = -1,656$; $\tilde{w}(\pi/2) = 0,702$ | | | | | | | | | |

Таблица 2

| МКЭ с двойной аппроксимацией | | | | | МКЭ без двойной аппроксимации | | | | |
|---|-----------------------------|--------------|---------------------------------|--------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------|---------------------------------|--------------|
| N | $\bar{\sigma}_\varphi^+(0)$ | $\Delta, \%$ | $\bar{\sigma}_\varphi^+(\pi/2)$ | $\Delta, \%$ | N | $\bar{\sigma}_\varphi^+(0)$ | $\Delta, \%$ | $\bar{\sigma}_\varphi^+(\pi/2)$ | $\Delta, \%$ |
| 10 | -183,2 | -7,2 | 129,9 | -1,0 | 100 | -129,6 | 24,2 | 93,4 | 27,4 |
| 20 | -173,8 | -1,7 | 128,9 | -0,2 | 200 | -157,9 | 7,6 | 117,3 | 8,8 |
| 40 | -171,1 | -0,1 | 128,6 | 0,0 | 400 | -167,4 | 2,0 | 125,5 | 2,4 |
| 80 | -170,9 | 0,0 | 128,6 | 0,0 | 800 | -170,1 | 0,5 | 127,8 | 0,6 |
| АЧР: $\bar{\sigma}_\varphi^+(0) = -170,9$; $\bar{\sigma}_\varphi^+(\pi/2) = 128,6$ | | | | | | | | | |

Таблица 3

| МКЭ с двойной аппроксимацией | | | | | МКЭ без двойной аппроксимации | | | | |
|---|-----------------------------|--------------|---------------------------------|--------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------|---------------------------------|--------------|
| N | $\bar{\sigma}_\varphi^-(0)$ | $\Delta, \%$ | $\bar{\sigma}_\varphi^-(\pi/2)$ | $\Delta, \%$ | N | $\bar{\sigma}_\varphi^-(0)$ | $\Delta, \%$ | $\bar{\sigma}_\varphi^-(\pi/2)$ | $\Delta, \%$ |
| 10 | 183,1 | -7,2 | -130,9 | -1,0 | 100 | 124,1 | 27,4 | -93,1 | 28,2 |
| 20 | 173,7 | -1,7 | -129,9 | -0,2 | 200 | 156,0 | 8,7 | -117,9 | 9,0 |
| 40 | 171,1 | -0,1 | -129,6 | 0,0 | 400 | 166,9 | 2,3 | -126,4 | 2,5 |
| 80 | 170,9 | 0,0 | -129,6 | 0,0 | 800 | 169,9 | 0,6 | -128,8 | 0,6 |
| АЧР: $\bar{\sigma}_\varphi^-(0) = 170,9$; $\bar{\sigma}_\varphi^-(\pi/2) = -129,6$ | | | | | | | | | |

Сравнение результатов, полученных МКЭ без двойной аппроксимации, с аналитически-численным (практически точным) решением свидетельствует о том, что при решении данной задачи указанным методом возникают явления так называемых мембранного и сдвигового запираций. Так, для того чтобы погрешность численного решения задачи в этом случае была менее 1% необходимо разбить четверть контура поперечного сечения на 800 элементов. В то же время для достижения указанной точности при использовании МКЭ с двойной аппроксимацией достаточно всего 40 элементов.

Разработанная численная методика решения краевых задач для некруговых цилиндрических оболочек полностью исключает отрицательное влияние запираения на сходимость результатов, что значительно повышает точность решения данных задач.

§4. Числовые результаты и их анализ.

Представим результаты исследования НДС цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения, ослабленной свободным круговым отверстием радиуса r_0 . Оболочка изготовлена из ортотропного органопластика и растягивается распределенными по ее торцам осевыми усилиями интенсивности T_k ($T_k/h = \tilde{T}_k/h \cdot 10^5$ Па).

Расчеты проведены для оболочки с такими геометрическими и физико-механическими параметрами:

$$(a+b)/2h = 16; \quad a/b = 0,5; 1,0; 2,0; \quad r_0/h = 4;$$

$$E_{11} = 38,4 \text{ ГПа}; \quad E_{22} = 25,3 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12} = 0,238;$$

$$G_{12} = 7,6 \text{ ГПа}; \quad G_{13} = 0,005E_{11}; \quad G_{23} = 0,005E_{22}.$$

Конкретные числовые результаты решения линейных краевых задач в классической (модель Кирхгофа – Лява) и уточненной (модель Тимошенко) постановках получены для равномерно распределенных осевых усилий интенсивности $\tilde{T}_k/h = 100$.

На рис. 4 показан характер изменения относительных прогибов ($\tilde{w} = w/h$) вдоль контура отверстия ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, где угол θ отсчитывается от образующей) для трех значений отношения полуосей (a/b) поперечного сечения оболочки. Здесь сплошные линии соответствуют решениям задач согласно модели Тимошенко, а пунктирные – модели Кирхгофа – Лява.

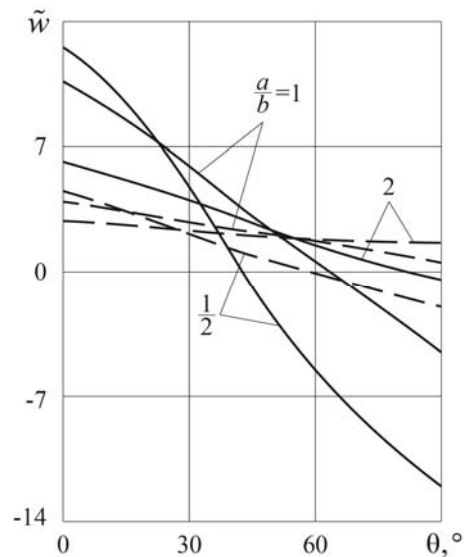


Рис. 4

В табл. 4 даны значения окружных деформаций e_θ и напряжений $\tilde{\sigma}_\theta$ ($\sigma_\theta = \tilde{\sigma}_\theta \cdot 10^5$ Па) в нескольких точках контура отверстия на внешней и внутренней поверхностях оболочки ($\tilde{\gamma} = \gamma/h = \pm 0,5$). Результаты приведены для двух эллиптических ($a = 2b$ и $b = 2a$) и одной круговой ($a = b$) цилиндрических оболочек как для модели Тимошенко, так и модели Кирхгофа – Лява.

Из представленных результатов решения краевых задач следует, что при действии осевых растягивающих усилий как для эллиптической, так и круговой цилиндрических оболочек наиболее опасными являются точки, которые расположены на контуре отверстия в сечении ($\theta = 90^\circ$) на внутренней поверхности оболочек, где имеют место наибольшие напряжения и деформации.

Таблица 4

| Решение | $\theta,^\circ$ | $\tilde{\gamma}$ | Модель Тимошенко | | | Модель Кирхгофа – Лява | | |
|-------------------------|-----------------|------------------|------------------|---------|----------|------------------------|---------|----------|
| | | | $b = 2a$ | $a = b$ | $a = 2b$ | $b = 2a$ | $a = b$ | $a = 2b$ |
| $e_\theta \cdot 10^3$ | 0 | 0,5 | -0,1093 | -0,2742 | -0,3290 | 0,0434 | -0,1723 | -0,2717 |
| | | -0,5 | -0,4600 | -0,5452 | -0,4958 | -0,7953 | -0,6667 | -0,5236 |
| | 45 | 0,5 | 0,1897 | 0,3151 | 0,3754 | 0,4288 | 0,4124 | 0,3875 |
| | | -0,5 | 0,0320 | 0,1204 | 0,2360 | 0,2625 | 0,2471 | 0,2830 |
| | 90 | 0,5 | 1,379 | 1,262 | 1,111 | 1,082 | 1,072 | 1,044 |
| | | -0,5 | 1,747 | 1,452 | 1,194 | 1,549 | 1,338 | 1,152 |
| $\tilde{\sigma}_\theta$ | 0 | 0,5 | -28 | -69 | -83 | 11 | -44 | -69 |
| | | -0,5 | -116 | -138 | -125 | -201 | -169 | -133 |
| | 45 | 0,5 | 40 | 68 | 82 | 98 | 92 | 85 |
| | | -0,5 | 6 | 26 | 51 | 52 | 51 | 60 |
| | 90 | 0,5 | 530 | 484 | 427 | 415 | 412 | 401 |
| | | -0,5 | 671 | 558 | 459 | 594 | 514 | 442 |

Учет деформаций поперечного сдвига материала оболочки (при уменьшении модулей сдвига G_{13} и G_{23}) приводит к увеличению максимальных прогибов, деформаций и напряжений по сравнению с результатами классического решения, соответственно, на 126,8; 12,8; 13,0(%) при $b = 2a$, на 163,3; 8,5; 8,6(%) при $a = b$ и на 196,1; 3,6; 3,8(%) при $a = 2b$.

Анализ приведенных результатов свидетельствует о том, что для цилиндрической оболочки со свободным круговым отверстием при данном виде нагружения наиболее рациональным является вытянутое вдоль горизонтальной оси OY (полуоси a) эллиптическое поперечное сечение, так как в этом случае (с увеличением отношения a/b) значения максимальных прогибов, деформаций и напряжений уменьшаются.

Заключение.

Таким образом, в работе дана постановка и изложена методика численного решения двумерных краевых задач для податливых на поперечный сдвиг цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения, ослабленных отверстием, которая базируется на применении метода конечных элементов с двойной аппроксимацией деформаций. С помощью разработанной методики исследовано напряженно-деформированное состояние ортотропной эллиптической цилиндрической оболочки с круговым отверстием при действии осевых растягивающих усилий. Числовые результаты представлены в виде таблиц и графиков для нескольких значений отношения полуосей поперечного сечения оболочки. В дальнейшем представляет интерес решение нелинейных краевых задач для нетонких цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения, ослабленных криволинейными отверстиями, с учетом деформаций поперечного сдвига.

РЕЗЮМЕ. Дано постановку і розроблено чисельну методику розв'язання задач статки для композитної циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з криволинійним отвором. Система розв'язувальних рівнянь отримана на основі співвідношень уточненої теорії непологих оболонок Тимошенка і закону Гука для ортотропних матеріалів. Запропонована методика базується на застосуванні методу скінченних елементів. Для оболонки, навантаженої осьовими розтягуючими зусиллями, досліджено вплив фізико-механічних і геометричних параметрів на розподіл напружень, деформацій і переміщень в області кругового отвору.

1. *Концентрация напряжений* / А.Н. Гузь, А.С. Космодамианский, В.П. Шевченко и др. – К.: «А.С.К.», 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 7).
2. *Кузнецов Ю.М.* НДС некруговой цилиндрической оболочки с вырезом под воздействием неравномерно распределенного вдоль направляющей давления // Исследования по теории пластин и оболочек: тр. семинара КФТИ КФ АН СССР. – Казань: Изд-во КГУ, 1992. – Вып. 24. – С. 35 – 39.
3. *Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями* / А.Н.Гузь, И.С.Чернышенко, В.Н.Чехов и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.1).
4. *Bathe K.-J., Dvorkin E.N.* A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1985. – **21**, N 2. – P. 367 – 383.
5. *Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A.* Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with a Curvilinear Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 12. – P. 1414 – 1420.
6. *Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Nonlinear Two-Dimensional Static Problems for Thin Shells with Reinforced Curvilinear Holes // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 12. – P. 1269 – 1300.
7. *Karpov V., Semenov A.* Strength and Stability of Orthotropic Shells // *World Appl. Sci. J.* – 2014. – **30**, N 5. – P. 617 – 623.
8. *Kiseleva T. A., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P.* Comparison of scalar and vector FEM forms in the case of an elliptic cylinder // *J. Comput. Math. Math. Phys.* – 2015. – **55**, N 3. – P. 422 – 431.
9. *Lee P.S., Bathe K.-J.* Development of MITC isotropic triangular shell finite elements // *Comput. Struct.* – 2004. – **82**, N 11. – P. 945 – 962.
10. *Maksymyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Stress State around Holes in Orthotropic Cylindrical Shells with Allowance for Nonlinearly Elastic Material Properties // *Int. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 10. – P. 991 – 995.
11. *Oterkus E., Madenci E., Nemeth M.* Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cutout // *Journal of Mechanics of Materials and Structures.* – 2007. – **2**, N 4. – P. 695 – 727.
12. *Pilkey W.D., Pilkey D.D.* Peterson's Stress Concentration Factors. – New York: John Wiley & Sons, 2008. – 560 p.
13. *Soldatos K. P.* Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999. – **52**, N 8. – P. 237 – 274.
14. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Stress Distribution in Physically and Geometrically Nonlinear Thin Cylindrical Shells with Two Holes // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1280 – 1287.
15. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Pigol O.V.* Elastoplastic State of an Elliptical Cylindrical Shell with a Circular Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 6. – P. 647 – 654.
16. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – P. 313 – 325.
17. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 4. – P. 386 – 397.
18. *Tennyson R.C., Booton M., Caswell R.D.* Buckling of imperfect elliptical cylindrical shells under axial compression // *AIAA J.* – 1971. – **9**, N 2. – P. 250 – 255.
19. *Timoshenko S.* Strength of materials. Part II, Advanced theory and problems. – 2nd ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
20. *Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R.* Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // *Thin Walled Struct.* – 2015. – **97**. – P. 114 – 129.

Поступила 20.12.2016

Утверждена в печать 22.05.2018