

А. П. Жук¹, Я. А. Жук^{1, 2}

О РАДИАЦИОННОЙ СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ
НА ТВЕРДЮЮ СФЕРИЧЕСКУЮ ЧАСТИЦУ
У СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

¹ Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. П. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;

² Киев. нац. ун-т им. Т.Г.Шевченко, просп. Глушкова, 4е, 01033, Киев, Украина;
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

Abstract. An action of radiation force on the rigid spherical particle placed in the liquid near the free plane surface is studied when the incident plane sound wave is perpendicular to the boundary. A standing sound wave of pressure with displacement node at the free surface occurs as a result of interference between incident and scattered waves. Dependencies of radiation force on frequency, radius of spherical particle and distance between the particle and free surface of the liquid are established. The nodes and antinodes of standing sound wave are the equilibrium positions of the spherical particle. The antinodes are the stable equilibrium positions while the nodes are unstable equilibrium positions. It is confirmed that particles demonstrate tendency to group at the antinodes in the sound field as a result radiation force action.

Key words: radiation force, spherical particle, plane boundary of the liquid, acoustic field parameters.

Введение.

В стационарных звуковых полях, как известно, кроме переменного звукового давления возникают постоянные, не изменяющиеся во времени силы, которые могут иметь различную природу [2, 5]. В данной статье рассмотрены силы, которые появляются в результате изменения в некотором объеме переносимого волной среднего во времени импульса, что и определяет возникновение постоянной во времени составляющей звукового давления [2]. В результате на объем будет действовать независимая от времени сила, которая называется радиационной (силой акустического излучения). Задача определения радиационного давления, действующего на препятствие в идеальной жидкости формулируется как в эйлеровой, так и в лагранжевой системе координат. В *первом случае* она определяется как свертка среднего по времени тензора плотности потока импульса с единичным вектором нормали к поверхности препятствия. Во *втором случае* радиационное давление определяется как среднее по времени значение звукового давления на поверхность препятствия. Поэтому при определении радиационного давления необходимо учитывать величины второго порядка малости, которые не обращаются в нуль при осреднении по времени.

При наличии препятствия в звуковом поле определение радиационной силы, действующей на препятствие, является сложной задачей. В этом случае радиационная сила создается не только падающей волной, но и рассеянной на препятствии, для определения которой необходимо решить задачу дифракции первичной волны на препятствии. Обычно задачи такого типа формулируются в лагранжевой системе координат. Такой подход возможен, если при определении звукового давления в жидкости учитываются квадратичные слагаемые, которые обусловлены тем, что изменение звукового давления в окрестности препятствия отличается от синусоидального закона [5]. Однако вычисление звукового давления в жидкости с учетом величин второго

порядка малости можно выполнить, используя потенциал поля скорости, определенный при решении линейной задачи дифракции первичной волны на препятствиях [2, 9].

Для решения задачи определения радиационных сил, действующих в звуковом поле на препятствия, применим подход, предложенный в работах [7, 8], разделяющий процедуру решения на *три основные этапы*. *Первый этап* – решение линейной задачи дифракции первичной волны на препятствиях (определение отраженных волн). При этом взаимодействие первичной и отраженных волн не учитывается, поскольку решается линейная задача дифракции. *Второй этап* – определение с точностью до величин второго порядка малости на основе результатов, полученных при решении задачи на первом этапе, гидродинамических сил, действующих на объекты (препятствия) в жидкости, и последующее их осреднение по времени (вычисление радиационных сил). *Третий этап* – исследование движения свободного объекта под действием радиационных сил.

В данной статье рассмотрен случай, когда твердая сферическая частица расположена у границы жидкости, представляющей собой свободную поверхность, контактирующую с воздухом, и перпендикулярно к которой в жидкости распространяется плоская звуковая волна. Случай сферической частицы у плоской твердой границы жидкости рассмотрен в работе [8].

§1. Постановка и решение задачи дифракции.

Предположим, что сжимаемая идеальная жидкость плотности ρ_0 , в которой звук распространяется со скоростью a_0 , заполняет полупространство. На расстоянии l от свободной поверхности поместим в жидкость неподвижную твердую сферическую частицу радиуса R . Выберем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, центр O которой находится на поверхности жидкости, а ось Oz направлена перпендикулярно к поверхности в противоположную от сферической частицы сторону. С частицей, центр которой находится на оси Oz , свяжем прямоугольную декартовую

$O_1x_1y_1z_1$ и сферическую $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ системы координат (рис. 1).

Пусть в жидкости в положительном направлении оси Oz распространяется плоская звуковая волна, заданная потенциалом

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1.1)$$

где A – амплитуда; $k = \omega/a_0$ – волновое число; ω – угловая частота.

Волновое поле в жидкости формируется в результате интерференции первичной волны (1.1) и волн, отраженных от свободной поверхности жидкости и рассеянных на сферической частице. Поэтому с математической точки зрения определение потенциалов установившегося во времени волнового поля в жидкости сводится к решению многосвязной линейной задачи дифракции волны (1.1) на сферической частице и отражении волн от свободной поверхности жидкости, т.е. к определению решений линейного волнового уравнения

$$\Delta\Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2)$$

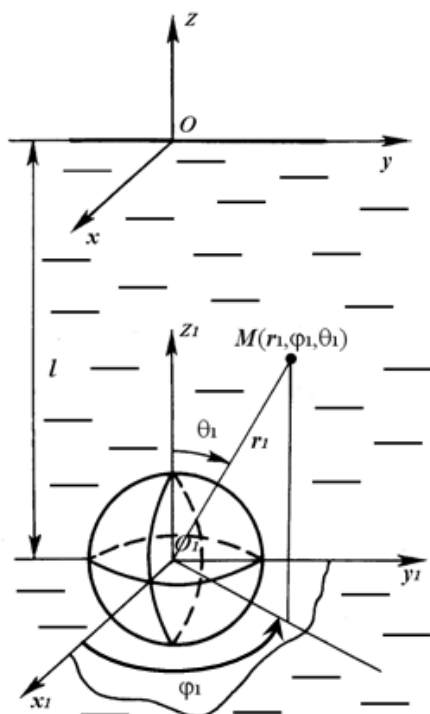


Рис. 1

удовлетворяющих граничным условиям на сферической частице и на свободной поверхности жидкости. В (1.2) Φ – потенциал поля скорости; a_0 – скорость звука в жидкости; Δ – дифференциальный оператор Лапласа.

При линейной постановке задачи скорости частиц жидкости и давление в ней определяются, соответственно, следующими формулами:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi; \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.3)$$

При формулировке граничных условий принимаем, что твердая частица неподвижна, а свободная плоская граница жидкости идеальная (абсолютно мягкая поверхность) [3]. В этом случае граничные условия на поверхности S твердой сферической частицы представим в виде

$$\mathbf{v}|_S = 0, \quad (1.4)$$

а на свободной поверхности жидкости принимаем равным нулю давление

$$p|_{z=0} = 0. \quad (1.5)$$

Укажем, что потенциал рассеянной на твердой сферической частице волны должен удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Заметим также, что условие (1.5) задано на неподвижной поверхности $z = 0$, а не на свободной поверхности, которая под действием волны колеблется. При таком задании граничного условия допускается ошибка, которая, однако, имеет тот же порядок, что и ошибка при линеаризации уравнения движения жидкости или уравнения непрерывности и поэтому такое задание граничного условия при решении линейной задачи дифракции допускается [3].

При падении звуковой волны (1.1) на свободную поверхность жидкости фаза давления при отражении изменяется на π . В результате на свободной поверхности жидкости общее давление равно нулю, а в жидкости образуются стоячие волны давления с узлом на граничной поверхности. Для волн колебательной скорости фаза не изменяется при отражении. Амплитуды падающей и отраженной волн находятся у свободной поверхности в одинаковой фазе и поэтому складываются, образуя у поверхности пучность колебательной скорости. Поэтому при падении волны (1.1) на граничную поверхность жидкости потенциал отраженной волны (решение уравнения (1.2)) можно записать в таком виде:

$$\Phi_s = -A \exp[-i(kz + \omega t)]. \quad (1.6)$$

В дальнейшем сформулированная задача определения потенциала звукового поля в жидкости фактически сводится к задаче определения потенциала Φ_d звуковой волны, отраженной от сферической частицы при падении на нее волн (1.1) и (1.6) и потенциала Φ_{ds} волны, отраженной от границы жидкости при падении на нее волны, определяемой потенциалом Φ_d . Для решения задачи воспользуемся методом, развитым в монографии [1] для задач дифракции упругих волн в многосвязных телах. При этом решение уравнения (1.2) построим методом разделения переменных в сферической $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ системе координат. Для этого потенциалы Φ_i и Φ_s представим в системе координат $O_1x_1y_1z_1$, связанной со сферической частицей, которые будут иметь соответственно такой вид:

$$\Phi_i^{(1)} = A \exp(-ikl) \exp[i(kz - \omega t)]; \quad (1.7)$$

$$\Phi_s^{(1)} = -A \exp(ikl) \exp[-i(kz_1 + \omega t)]. \quad (1.8)$$

Верхний индекс в (1.7) и (1.8) указывает, что потенциалы $\Phi_i^{(1)}$ и $\Phi_s^{(1)}$ отнесены к системе координат, связанной со сферической частицей. В системе координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ их можно записать так:

$$\Phi_i^{(1)} = A \exp(-ikl) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr_1) P_n(\cos \theta_1); \quad (1.9)$$

$$\Phi_s^{(1)} = -A \exp(ikl) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n j_n(kr_1) P_n(\cos \theta_1), \quad (1.10)$$

где $j_n(kr_1)$ – сферические функции Бесселя; $P_n(\cos \theta_1)$ – полиномы Лежандра.

Представим в сферической системе координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ обобщенным рядом Фурье по сферическим волновым функциям потенциал Φ_d отраженной от твердой сферической частицы волны (решение уравнения (1.2)), удовлетворяющей условиям Зоммерфельда на бесконечности

$$\Phi_d^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) P_n(\cos \theta_1). \quad (1.11)$$

В (1.11) $h_n^{(1)}(kr_1)$ – сферическая функция Ганкеля 1-го рода. В формулах (1.9) – (1.11) опущен множитель $\exp(-i\omega t)$.

При падении волны (1.11) на свободную поверхность жидкости граничное условие (1.5) обуславливает возникновение отраженной волны. При определении потенциала Φ_{ds} этой волны воспользуемся методом мнимых изображений [3]. Для этого мысленно заполним полупространство над свободной поверхностью жидкости такой же жидкостью и симметрично частице № 1 относительно плоскости $z = 0$ поместим в ней мнимую сферическую частицу, аналогичную действительной. Действительная и мнимая частицы под действием волн (1.1) и (1.6) создадут в неограниченной среде отраженное от них звуковое поле, симметричное относительно граничной плоскости $z = 0$. При этом суммарное звуковое давление (1.3) в точках плоскости, в соответствии с условием (1.5), должно равняться нулю. В результате потенциал Φ_{ds} будет равен потенциалу, который описывает волну, отраженную от мнимой частицы.

Введем сферическую систему координат $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$, которая связана с мнимой частицей. В этой системе координат волну, отраженную от мнимой сферической частиц, также представим обобщенным рядом Фурье

$$\Phi_{ds} = \Phi_d^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} h_n^{(1)}(kr_2) P_n(\cos \theta_2) \exp(-i\omega t). \quad (1.12)$$

Индекс 2 указывает на то, что величины, отмеченные им, заданы в системе координат $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$, связанной с мнимой частицей (частицей № 2).

Из граничного условия (1.5) на поверхности $z = 0$, принимая во внимание соотношения (1.3), (1.11) и (1.12), получим следующее соотношение для давления p :

$$p = p_1(r_1 = l, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0) + p_2(r_2 = l, \theta_2 = \pi, \varphi_2 = 0). \quad (1.13)$$

В формуле (1.13) p_1 – давление в жидкости, создаваемое волной с потенциалом (1.11), а давление p_2 – волной с потенциалом (1.12).

Из уравнения (1.13), принимая во внимание выражение (1.3) для давления в звуковой волне, определим зависимость между коэффициентами $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ в потенциалах

отраженных волн от действительной $\Phi_d^{(1)}$ и мнимой $\Phi_d^{(2)}$ сферических частиц, которая выражается соотношением

$$A_n^{(2)} = (-1)^{n+1} A_n^{(1)}. \quad (1.14)$$

Условие (1.14) дает возможность потенциал (1.12) представить в следующем виде:

$$\Phi_d^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_2) P_n(\cos \theta_2) \exp(-i\omega t). \quad (1.15)$$

Таким образом, потенциал Φ звукового поля в жидкости, образованного интерференцией падающей и отраженных волн, определяется суммой потенциалов

$$\Phi = \Phi_i^{(1)} + \Phi_s^{(1)} + \Phi_d^{(1)} + \Phi_d^{(2)}. \quad (1.16)$$

Следовательно, определение потенциала Φ сводится к вычислению коэффициентов $A_n^{(1)}$ в разложениях потенциалов (1.11) и (1.15) в обобщенные ряды Фурье.

Определим их, используя граничное условие (1.4) для радиальной компоненты скорости частиц жидкости $\partial\Phi/\partial r_1$ на поверхности сферы №1, которое запишем в следующем виде:

$$v_r(r_1 = R, \theta_1, \varphi_1, t) = 0. \quad (1.17)$$

Поэтому выражение (1.15) для потенциала $\Phi_d^{(2)}$ необходимо записать в системе координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$, связанной с частицей № 1. Используя теоремы сложения для сферических волновых функций [1], запишем уравнение (1.15) в таком виде:

$$\Phi_d^{(2)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(2)} j_n(kr_1) P_n(\cos \theta_1) \exp(-i\omega t). \quad (1.18)$$

В выражении (1.18) введены следующие обозначения:

$$S_n^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} A_p^{(1)} Q_{0n0p}^{(1,2)}(2kl, \pi);$$

$$Q_{0p0n}^{(1,2)}(kR_{12}, \theta_{12}) = 2i^{p-n} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} i^\sigma b_\sigma^{(n0p0)} h_\sigma^{(1)}(kR_{12}) P_n(\cos \theta_1); \quad R_{12} = 2l, \theta_{12} = \pi;$$

$$b_\sigma^{(p0n0)} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2p+1)}{2(2\sigma+1)}} (pn00|\sigma0)^2;$$

$$(pn00|\sigma0) = (-1)^{\sigma+\frac{s}{2}} \frac{(s/2)!}{(s/2-n)!(s/2-p)!(s/2-\sigma)!} \times \\ \times \left[\frac{(2\sigma+s)!(s-2n)!(s-2p)!(s-2\sigma)!}{(s+1)!} \right],$$

если s четное; $(pn00|\sigma0) = 0$, если s нечетное; $s = n + p + \sigma$.

Потенциал Φ звукового поля в жидкости, определяемый суммой потенциалов (1.9), (1.10), (1.11) и (1.18), запишем в следующем виде:

$$\Phi(r_1, \theta_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1) A b_n j_n(kr_1) + A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) + S_n^{(2)} j_n(kr_1) \right] \times$$

$$\times P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t), \quad (1.19)$$

где $b_n = -2i \sin\left(kl - n\frac{\pi}{2}\right)$.

Из граничного условия (1.17), принимая во внимание (1.3) и (1.19), получаем бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_n^{(1)}$ в обобщенных рядах Фурье для потенциалов $\Phi_d^{(1)}$ и $\Phi_d^{(2)}$

$$A_n^{(1)} + \frac{j'_n(kR)}{h_n^{(1)'}(kR)} S_n^{(2)} = -A(2n+1)b_n \frac{j'_n(kR)}{h_n^{(1)'}(kR)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.20)$$

Отметим, что система уравнений (1.20) обладает вполне непрерывным оператором в гильбертовом координатном пространстве l^2 и его правые части удовлетворяют условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| A(2n+1) \frac{j'_n(kR)}{h_n^{(1)'}(kR)} \right| < \infty. \quad (1.21)$$

Следовательно, бесконечная система алгебраических уравнений (1.20) имеет единственное решение $\{A_n^{(1)}\} (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$, которое находим методом ее редукции [4]. Таким образом, определение потенциалов поля скорости (решение задачи дифракции) формально заканчивается приближенным вычислением коэффициентов $A_n^{(1)}$ из усеченной системы алгебраических уравнений (1.20). Заданная степень точности обеспечивается путем сравнения результатов вычислений для последовательно возрастающего числа уравнений (1.20).

§2. Определение радиационной силы, действующей на сферическую частицу.

Радиационная сила, действующая в звуковом поле на сферическую частицу, равна постоянной во времени составляющей гидродинамической силы, определяемой осреднением последней по времени. Так как поле скорости жидкости симметрично относительно оси O_1z_1 , гидродинамическая сила направлена вдоль этой оси и равна интегралу

$$F_z = -\iint_S p R^2 \sin \theta \cos \theta_1 d\theta_1 d\theta \quad (2.1)$$

по поверхности S сферической частицы от давления p , для определения которого используется соотношение [9]

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\text{grad} \Phi)^2 + \frac{\rho_0}{2a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (2.2)$$

Укажем, что при вычислении давления в жидкости по формуле (2.2) с точностью до величин второго порядка малости необходимо использовать действительную часть потенциала (1.19), которая имеет следующий вид:

$$\text{Re} \Phi(r_1, \theta_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [K_n \sin \omega t + L_n \cos \omega t] P_n(\cos \theta_1). \quad (2.3)$$

В соотношении (2.3) введены следующие обозначения:

$$K_n(kr_1) = B_n y_n(kr_1) + \left[C_n - 2(2n+1)A \sin\left(kl - n\frac{\pi}{2}\right) + E_n \right] j_n(kr_1);$$

$$L_n(kr_1) = (B_n + D_n)j_n(kr_1) - C_n y_n(kr_1); \quad (2.4)$$

$$B_n = \operatorname{Re} A_n^{(1)}, C_n = \operatorname{Im} A_n^{(1)}, D_n = \operatorname{Re} S_n^{(2)}, E_n = \operatorname{Im} S_n^{(2)}.$$

В дальнейшем при обозначении действительной части потенциала Φ символ Re будем опускать.

Заметим, что рассматривается неподвижная сферическая частица, поэтому первое слагаемое в правой части (2.2), которое синусоидально изменяется во времени, при осреднении гидродинамической силы (2.1) по периоду первичной волны вносит в радиационную силу вклад, равный нулю [9], поэтому при дальнейших вычислениях это слагаемое не учитываем. Во втором слагаемом в выражении для давления (2.2)

$$(\operatorname{grad}\Phi)^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r_1}\right)^2 + \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_1}\right)^2$$

первый член для точек поверхности неподвижной частицы также равен нулю, поэтому в рассматриваемом случае выражение (2.2) для давления на поверхности сферической частицы приобретает следующий вид:

$$p = -\frac{\rho_0}{2R^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_1}\right)^2 + \frac{\rho_0}{2a_0^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2. \quad (2.5)$$

Определим вклад каждого из слагаемых в выражении для давления (2.5) в величину силы (2.1). Вклад первого слагаемого в выражении (2.5) в величину силы F_z определяется интегралом

$$F_z^{[1]} = \pi\rho_0 \int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_1}\right)^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1. \quad (2.6)$$

Принимая во внимание выражение (2.3) для потенциала Φ после интегрирования (2.6) получим

$$F_z^{[1]} = 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \left[K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha)\sin^2(\omega t) + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)\cos^2(\omega t) \right], \quad (2.7)$$

где $\alpha = kR$. В выражении (2.7) опущены слагаемые, которые после осреднения по времени обращаются в нуль.

После осреднения (2.7) по периоду первичной волны получаем вклад в величину радиационной силы, определяемый первым слагаемым в выражении для давления (2.5), т.е.

$$\langle F_z^{[1]} \rangle = 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \left[K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha) + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha) \right]. \quad (2.8)$$

Вклад в величину гидродинамической силы (2.1), определяемый вторым слагаемым для давления звука в жидкости (2.5), равен интегралу

$$F_z^{[2]} = -\frac{\pi\rho_0 R^2}{a_0^2} \int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1, \quad (2.9)$$

после интегрирования которого получим

$$F_n^{[2]} = -2\pi\rho_0 \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \left[K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha)\cos^2(\omega t) + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)\sin^2(\omega t) \right]. \quad (2.10)$$

В выражении (2.10) опущены слагаемые, которые после осреднения по времени обращаются в нуль. После осреднения (2.10) по периоду первичной волны получаем вклад в величину радиационной силы, определяемый вторым слагаемым в выражении для давления (2.5), т.е.

$$\langle F_z^{[2]} \rangle = -2\pi\rho_0\alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} [K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha) + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)]. \quad (2.11)$$

Суммируя (2.8) и (2.11), получаем выражение для вычисления величины радиационной силы, действующей на твердую сферическую частицу у границы свободной поверхности жидкости при падении перпендикулярно к ней звуковой волны, описываемой потенциалом (1.1)

$$\langle F_z \rangle = \langle F_z^{[1]} \rangle + \langle F_z^{[2]} \rangle = 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} [K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha) + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)] [n(n+2) - \alpha^2]. \quad (2.12)$$

§3. Численное исследование радиационной силы. Анализ результатов.

Численное исследование действия радиационной силы в акустическом поле на твердую сферическую частицу у свободной поверхности жидкости для случая, соответствующего рис. 1, проведем, используя формулу (2.12). Определим зависимость величины и направления радиационной силы от безразмерного параметра $\alpha = kR$ для следующих значений отношения расстояния l сферической частицы от свободной поверхности жидкости к радиусу R частицы: $l/R = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$. В качестве жидкости принимаем воду, удельная плотность которой $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, а скорость звука в ней $a_0 = 1400 \text{ м/с}$. Амплитуду A акустической волны положим равной $0,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, что соответствует умеренной мощности излучения. Результаты расчетов зависимости радиационной силы $\langle F_z \rangle$, действующей на твердую сферическую частицу, от безразмерного параметра α представлены на рис. 2 и 3. На графиках цифры у кривых обозначают величину отношения l/R . Анализ полученных результатов указывает на то, что направление действия радиационной силы и ее величина зависят от параметра α , т.е. от частоты, радиуса частицы и от расстояния частицы до свободной поверхности жидкости.

На рис. 2 кривые $l/R = 3, 6, 9$ пересекают ось абсцисс в одной точке при значении параметра $\alpha = 0,523$, что соответствует при радиусе частицы $0,5 \text{ см}$ длине волны $\lambda = 6,0 \text{ см}$. Следовательно, на частицу, находящуюся в пучности ($l/R = 3; 9$) или в узле ($l/R = 6$) стоячей волны звукового давления (аналогично в узле или пучности

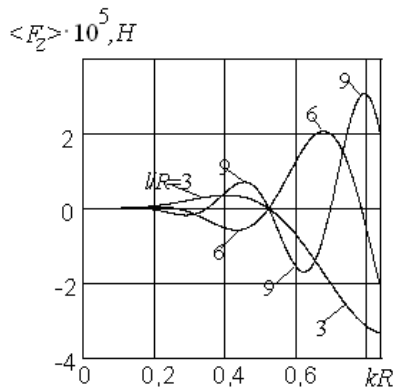


Рис. 2

стоячей волны скорости жидкости), определяемой потенциалами (1.1) и (1.6), радиационная сила не действует. Анализ кривых на рис. 2 показывает, что положение сферической частицы в пучности стоячей волны звукового давления (в узле стоячей волны скорости жидкости) устойчиво, а в узле стоячей волны давления (в пучности стоячей волны скорости жидкости) неустойчиво. В первом случае при отклонении сферической частицы в любую сторону от положения равновесия радиационная сила действует на частицу в направлении к положению равновесия, а во втором случае – в направлении от положения равновесия.

На рис. 3 наблюдается аналогичная картина для значения $\alpha = 0,398$ (кривые $l/R = 4$ и 8) и для значения $\alpha = 0,785$ (кривые $l/R = 2, 4, 6, 8, 10$), при которых радиационная сила не действует на сферическую частицу. Так, для $\alpha = 0,785$ и радиуса сферической частицы $0,5$ см длина стоячей волны звукового давления $\lambda = 4,0$ см. Для этого случая в устойчивом положении равновесия будет частица, находящаяся в пучности стоячей волны звукового давления (график зависимости радиационной силы от параметра α описывается для этой частицы кривыми $l/R = 2, 6, 10$) и в неустойчивом положении равновесия, если сферическая частица находится в узле стоячей волны звукового давления (график зависимости величины радиационной силы от параметра α для этой частицы описывается кривыми $l/R = 4, 8$).

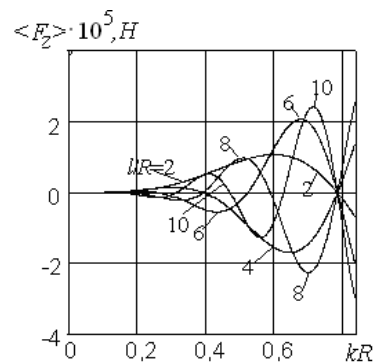


Рис. 3

Следовательно, частицы, находящиеся в жидкости, будут группироваться в пучностях стоячей волны звукового давления, образованной интерференцией падающей на свободную поверхность жидкости волны и отраженной от нее. Данное явление, обусловленное радиационными силами, может иметь большое значение при разработке технологических процессов, использующих акустические волны, например, при коагуляции и осаждении аэрозолей [6].

Заключение.

В рамках принятого в данной работе приближения можно сделать заключение, что радиационная сила не является монотонной функцией безразмерного параметра $\alpha = kR$. Характер действия радиационной силы на сферическую частицу зависит от частоты падающей волны, радиуса сферической частицы и от расстояния частицы до поверхности жидкости. Падающая перпендикулярно к свободной поверхности жидкости волна и отраженная от нее волна в результате интерференции образуют стоячую волну звукового давления, узел которой находится на свободной поверхности жидкости. Радиационная сила, действующая на частицу, находящуюся в узле или пучности стоячей волны звукового давления, равна нулю. При этом положение равновесия сферической частицы устойчиво, если она находится в пучности волны, и неустойчиво, если она находится в узле. Следовательно, в звуковом поле под действием радиационных сил частицы имеют тенденцию группироваться в пучностях.

РЕЗЮМЕ. Досліджено дію радіаційної сили на тверду сферичну частинку в околі вільної плоскої межі рідини при падінні перпендикулярно до межі плоскої звукової хвилі. В результаті інтерференції падаючої і відбитої хвиль утворюється стояча хвиля звукового тиску з вузлом на вільній поверхні. Встановлено залежність сили від частоти, радіусу сферичної частинки та її відстані від межі рідини. Вузли і пучності стоячої звукової хвилі є положеннями рівноваги сферичної частинки. При цьому пучності – положення стійкої рівноваги, а вузли – положення нестійкої рівноваги. Отже, в звуковому полі під дією радіаційних сил частинки мають тенденцію групуватися в пучностях.

1. Гузь А.Н., Головачев В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – К.: Наук. думка, 1972. – 254 с.
2. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 520 с.
3. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973. – 496 с.
4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.–Л.: ГИИТЛ, 1949. – 695 с.
5. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
6. Медников Е.П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 263 с.
7. Guz, A.N., Zhuk A.P. Motion of Solid Particles in a Liquid under the Action of an Acoustic Field: the Mechanism of Radiation Pressure // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 3. – P. 246 – 265.
8. Zhuk A.P. Dynamics of a Spherical Particle near a Flat Liquid Boundary under Acoustic Radiation Forces // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 11. – P. 1223 – 1232.
9. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Sphere // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1934. – 147, N 861. – P. 246 – 265.