А.А.Каминский[1], Л.А.Кипнис[2], Т.В.Полищук[2]

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ВБЛИЗИ МАЛОМАСШТАБНОЙ ТРЕЩИНЫ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

[1]*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,*
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua;
[2]*Уманский государственный педагогический университет им. П.Тычины,*
ул. Садовая, 2, 20300, Умань, Украина; e-mail: polischuk_t@ukr.net

Abstract. The stress of piece-homogeneous isotropic elastic body near the small-scale mode I crack at the corner point of the interface of media is investigated. An exact solution of the corresponding problem of theory of elasticity is constructed by the Wiener – Hopf method.

Keywords: isotropic elastic body, interface, corner point, small-scale crack, Wiener–Hopf method.

Введение.

Начало разрушения деформируемого твердого тела в первую очередь следует ожидать вблизи различных угловых точек, представляющих собой остроконечные концентраторы напряжений. В соответствующей задаче линейной теории упругости при приближении точки тела к угловой точке – остроконечному концентратору напряжения стремятся к бесконечности. Вследствие чрезвычайно высокой концентрации напряжений в угловой точке, возможны разрыв сплошности вблизи нее и зарождение исходящих из нее трещин, длины которых в значительной степени меньше размеров тела (маломасштабные трещины). Если равновесие зародившейся трещины окажется неустойчивым, то после достижения состояния предельного равновесия режим ее развития будет динамическим. Это может привести к непредвиденному катастрофическому разрушению тела. Поэтому информация о напряженном состоянии упругого тела вблизи трещин в угловых точках является особенно ценной при решении вопросов, связанных с разрушением конструкций.

Исследованию напряженного состояния вблизи трещин в угловых точках упругих тел посвящено большое число работ. В основном, исследованы задачи теории упругости о трещинах и других линиях разрыва смещения в вершине однородного клина [1, 5, 10, 14, 15, 17, 20, 24 – 27]. Для кусочно-однородного тела в указанном направлении изучены случаи, когда угловой точкой является конец трещины: рассмотрены задачи теории упругости о линиях разрыва смещения в концах межфазных трещин и трещин, выходящих на границу раздела сред [3, 4, 6, 8]. В [9] решена задача теории упругости о маломасштабных межфазных сдвиговых трещинах в угловой точке границы раздела сред.

Ниже проведено исследование напряженного состояния кусочно-однородного изотропного линейно-упругого тела вблизи маломасштабной трещины нормального разрыва в угловой точке границы раздела сред.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

В условиях плоской деформации в рамках статической симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное тело с границей раздела сред в форме сторон угла, составленное из изотропных упругих частей с модулями Юнга E_1, E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 (рис. 1).

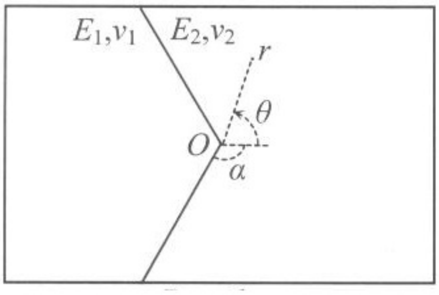

Рис. 1

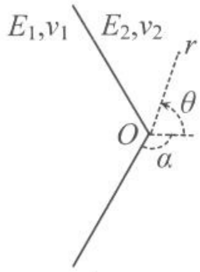

Рис. 2

В силу общих положений о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [13] угловая точка границы раздела сред O представляет собой концентратор напряжений со степенной особенностью. Главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды при $r \to 0$ являются решением соответствующей однородной задачи теории упругости (задача К, рис. 2) для кусочно-однородной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, порождаемым единственным на интервале $]-1;0[$ корнем λ_0 ее характеристического уравнения

$$\left[\sin 2(\lambda+1)\alpha + (\lambda+1)\sin 2\alpha\right][\text{æ}_1 \sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) + (\lambda+1)\sin 2\alpha] +$$

$$+\Big\{(1+\text{æ}_1)(1+\text{æ}_2)\sin^2 \lambda\pi - \left[\sin 2(\lambda+1)\alpha + (\lambda+1)\sin 2\alpha\right]\times$$

$$\times[\text{æ}_1 \sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) + (\lambda+1)\sin 2\alpha] \; - [\sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) - (\lambda+1)\sin 2\alpha]\times$$

$$\times\left[\text{æ}_2 \sin 2(\lambda+1)\alpha - (\lambda+1)\sin 2\alpha\right]\Big\} e +$$

$$+[\sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) - (\lambda+1)\sin 2\alpha]\left[\text{æ}_2 \sin 2(\lambda+1)\alpha - (\lambda+1)\sin 2\alpha\right] e^2 = 0;$$

$$e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} e_0; \;\; e_0 = \frac{E_1}{E_2}; \;\; \text{æ}_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}.$$

Широкие классы подобных однородных задач теории упругости для кусочно-однородных тел клиновидной конфигурации, которые могут быть решены методом разделения переменных, рассмотрены в [19, 28].

Имеет место формула

$$\sigma_\theta(r,0) = Cgr^{\lambda_0} + o\left(r^{\lambda_0}\right) \;\; (r \to 0); \;\; g = g_1 + (\lambda_0+2) g_2;$$

$$g_1 = (1+\text{æ}_2)\lambda_0^{\,2} \sin 2\alpha \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0 \alpha \cos(\lambda_0+2)\alpha -$$

$$-(1+\text{æ}_1)\lambda_0^2 \sin 2\alpha \sin \lambda_0\alpha \cos \lambda_0(\pi-\alpha) \cos\left[\lambda_0(\pi-\alpha) - 2\alpha\right] -$$

$$-(1+\text{æ}_1)(1-\text{æ}_2)\lambda_0 \sin \lambda_0\alpha \cos \lambda_0\alpha \sin(\lambda_0+2)\alpha \cos \lambda_0(\pi-\alpha) \cos\left[\lambda_0(\pi-\alpha) - 2\alpha\right] -$$

$$-(1-\text{æ}_1)(1+\text{æ}_2)\lambda_0 \sin \lambda_0\alpha \cos \lambda_0\alpha \cos(\lambda_0+2)\alpha \cos \lambda_0(\pi-\alpha) \sin\left[\lambda_0(\pi-\alpha) - 2\alpha\right] -$$

$$-(1-e)(\lambda_0 + 1 - \text{æ}_2)\lambda_0^2 \sin^2 2\alpha \cos \lambda_0\alpha -$$

$$-\left(2e-1+æ_1\right)\lambda_0\left(\lambda_0+1-æ_2\right)\sin 2\alpha\cos\lambda_0\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\sin\left[\lambda_0\left(\pi-\alpha\right)-2\alpha\right]-$$

$$-\left[2-e(1-æ_2)\right]\lambda_0\left(\lambda_0+1-æ_2\right)\sin 2\alpha\cos^2\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha-$$

$$-2\left[(1-æ_2)e-1+æ_1\right]\left(\lambda_0+1-æ_2\right)\cos^2\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\sin\left[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha\right];$$

$$g_2=(1+æ_1)\lambda_0\sin 2\alpha\sin\left(\lambda_0+2\right)\alpha\cos\lambda_0\left(\pi-\alpha\right)\cos\left[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha\right]+$$

$$+(1+æ_1)(1-æ_2)\cos\lambda_0\alpha\sin^2(\lambda_0+2)\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\cos\left[\lambda_0\left(\pi-\alpha\right)-2\alpha\right]-$$

$$-(1+æ_2)\lambda_0\sin 2\alpha\cos\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos\left(\lambda_0+2\right)\alpha+$$

$$+(1-æ_1)(1+æ_2)\cos\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos\left(\lambda_0+2\right)\alpha\cos\lambda_0(\pi-\alpha)\sin\left[\lambda_0\left(\pi-\alpha\right)-2\alpha\right]+$$

$$+(1-e)\lambda_0^2\sin^2 2\alpha\cos\left(\lambda_0+2\right)\alpha+$$

$$+\left(2e-1+æ_1\right)\lambda_0\sin 2\alpha\cos\left(\lambda_0+2\right)\alpha\cos\lambda_0\left(\pi-\alpha\right)\sin\left[\lambda_0\left(\pi-\alpha\right)-2\alpha\right]+$$

$$+\left[2-e(1-æ_2)\right]\lambda_0\sin 2\alpha\cos\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\,\alpha\cos(\lambda_0+2)\alpha+$$

$$+2\left[(1-æ_2)e-1+æ_1\right]\cos\lambda_0\alpha\sin(\lambda_0+2)\alpha\cos\left(\lambda_0+2\right)\alpha\cos\lambda_0\left(\pi-\alpha\right)\sin\left[\lambda_0(\pi-\alpha)-2\alpha\right].$$

Постоянная C должна определяться из решения каждой конкретной задачи теории упругости, приведенной на рис. 1.

Результаты расчетов показывают, что $\lambda_0>-1/2$; $\lambda_0(0)=\lambda_0(\pi/2)=\lambda_0(\pi)=0$; $g(\alpha)<0$ при $\alpha\in\left]0;\pi/2\right[$; $g(\alpha)>0$ при $\alpha\in\left]\pi/2;\pi\right[$; $g(0)=g(\pi/2)=g(\pi)=0$. Если материалы одинаковы, то λ_0 и g равны нулю. Некоторые значения λ_0 приведены в табл. 1 ($\nu_1=\nu_2=0,3$), где значения α даны в градусах.

Таблица 1

α, град.	e_0			
	2	3	5	10
15	– 0,036	– 0,068	– 0,122	– 0,215
30	– 0,075	– 0,132	– 0,232	– 0,310
45	– 0,112	– 0,180	– 0,258	– 0,332
60	– 0,112	– 0,184	– 0,248	– 0,308
75	– 0,086	– 0,127	– 0,167	– 0,203
105	– 0,025	– 0,037	– 0,049	– 0,059
120	– 0,054	– 0,081	– 0,104	– 0,124
135	– 0,089	– 0,130	– 0,168	– 0,202
150	– 0,117	– 0,173	– 0,228	– 0,278
165	– 0,104	– 0,168	– 0,241	– 0,318

Предположим, что $Cg>0$. Из предыдущей формулы следует, что $\sigma_\theta(r,0)\to+\infty$ при $r\to 0$, а поэтому при $\theta=0$ вблизи угловой точки нормальные напряжения являются растягивающими. При этом согласно приведенной информации о функции g, если $C > 0$ ($C < 0$), то они будут растягивающими, когда $\alpha \in \left]\pi/2;\pi\right[$ ($\alpha \in \left]0;\pi/2\right[$). В такой ситуации вследствие чрезвычайно высокой концентрации напряжений в угловой точке, возможны разрыв сплошности вблизи нее при $\theta = 0$ и зарождение исходящей из нее трещины нормального разрыва, длина l которой в значительной степени меньше размеров тела (рис. 3).

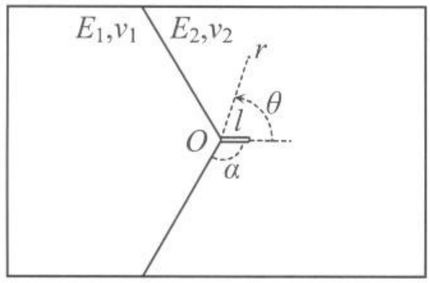

Рис. 3

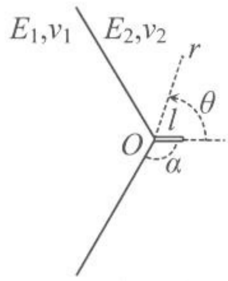

Рис. 4

Ставится задача: исследовать напряженное состояние вблизи конца зародившейся маломасштабной трещины, определить условие страгивания трещины, исследовать ее равновесие на устойчивость и проанализировать поведение напряжений вблизи угловой точки.

С учетом малости трещины приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей трещину в угловой точке (рис. 4). На бесконечности задана асимптотика поля напряжений, представляющая собой решение аналогичной задачи без трещины (решение задачи К, о котором упоминалось выше). Произвольная постоянная C, входящая в указанное решение, предполагается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения каждой конкретной внешней задачи (рис. 1).

Граничные условия рассматриваемой задачи теории упругости (рис. 4) имеют следующий вид:

$$\theta = \alpha, \ \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \ \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \theta = \pi, \ \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0; \ \theta = 0, \ \tau_{r\theta} = 0; \\ \theta = 0, \ r < l, \ \ \sigma_\theta = 0; \ \ \theta = 0, \ \ r > l, \ u_\theta = 0; \end{gathered} \tag{2}$$

$$\theta = 0, \ r \to \infty, \ \sigma_\theta = Cgr^{\lambda_0} + o\left(\frac{1}{r}\right), \tag{3}$$

где $0 \le \theta \le \pi$; $\langle a \rangle$ – скачок a.

Решение сформулированной задачи теории упругости (рис. 4) представляет собой сумму решений следующих *двух задач*. *Первая (задача 1)* отличается от второй тем, что вместо первого из условий (2) имеем

$$\theta = 0, \ \ r < l, \ \ \sigma_\theta = -Cgr^{\lambda_0}, \tag{4}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствует первое слагаемое). *Вторая задача – задача К.* Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

В современной механике разрушения развиты эффективные методы решения соответствующих краевых задач [12, 18, 21 – 23]. В частности, для построения точных решений плоских статических задач теории упругости о трещинах в телах клиновидной конфигурации во многих случаях используется метод Винера – Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [11, 16]. Ниже этот метод применен для решения задачи 1.

2. Вывод функционального уравнения Винера–Хопфа.

Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для клина $0 \le \theta \le \alpha$.

Применяя преобразование Меллина

$$m^*(p) = \int_0^\infty m(r) r^p dr$$

с комплексным параметром p ($-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$, ε – достаточно малое положительное число) к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций и закону Гука, получаем следующие выражения для меллиновских трансформант:

$$\sigma_\theta^* = A_1 \sin(p+1)\theta + A_2 \sin(p-1)\theta + A_3 \cos(p+1)\theta + A_4 \cos(p-1)\theta;$$

$$\tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1}[A_1(p+1)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(p-1)\theta -$$

$$-A_3(p+1)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta];$$

$$\sigma_r^* = -\frac{1}{p-1}[A_1(p+3)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta +$$

$$+A_3(p+3)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta]; \qquad (5)$$

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^* = \frac{1+\nu_2}{E_2(p-1)}[A_1(p-æ_2)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(p-1)\theta -$$

$$-A_3(p-æ_2)\sin(p+1)\,\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta],$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^* = -\frac{1+\nu_2}{E_2(p-1)}[A_1(p+æ_2)\sin(p+1)\,\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta +$$

$$+A_3(p+æ_2)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta]$$

($A_j(p)$, $j = 1,2,3,4$ – неизвестные функции).

Исходя из граничных условий (1), с помощью (5) приходим к системе линейных уравнений

$$A_1 \sin(p+1)\alpha + A_2 \sin(p-1)\alpha + A_3 \cos(p+1)\alpha + A_4 \cos(p-1)\alpha = \sigma_\theta^*(p,\alpha);$$

$$A_1(p+1)\cos(p+1)\alpha + A_2(p-1)\cos(p-1)\alpha - A_3(p+1)\sin(p+1)\alpha -$$

$$-A_4(p-1)\sin(p-1)\alpha = (p-1)\tau_{r\theta}^*(p,\alpha); \quad A_3 + A_4 = \sigma_\theta^*(p,0);$$

$$A_1(p+1)+A_2(p-1)=0\,.$$

Решение этой системы имеет вид

$$A_1=(p-1)\delta_A^{-1}(p)[2(\sin p\alpha\cos\alpha+p\cos p\alpha\sin\alpha)\sigma_\theta^*(p,\alpha)-$$

$$-2(p-1)\sin p\alpha\sin\alpha\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)-(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)\sigma_\theta^*(p,0)];$$

$$A_2=-(p+1)\delta_A^{-1}(p)[2(\sin p\alpha\cos\alpha+p\cos p\alpha\sin\alpha)\sigma_\theta^*(p,\alpha)- \qquad (6)$$

$$-2(p-1)\sin p\alpha\sin\alpha\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)-(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)\sigma_\theta^*(p,0)]\,;$$

$$A_3=-2(p-1)\delta_A^{-1}(p)[(p+1)\sin p\alpha\sin\alpha\sigma_\theta^*(p,\alpha)-$$

$$-(\sin p\alpha\cos\alpha-p\cos p\alpha\sin\alpha)\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)-\left(\sin^2 p\alpha+p\sin^2\alpha\right)\sigma_\theta^*(p,0)]\,;$$

$$A_4=2\delta_A^{-1}(p)\left\{(p-1)\,[(p+1)\sin p\alpha\sin\alpha\sigma_\theta^*(p,\alpha)-\right.$$

$$\left.-(\sin p\alpha\cos\alpha-p\cos p\alpha\sin\alpha)\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)]-(p+1)\left(\sin^2 p\alpha-p\sin^2\alpha\right)\sigma_\theta^*(p,0)\right\}\,;$$

$$\delta_A(p)=-4\left(\sin^2 p\alpha-p^2\sin^2\alpha\right).$$

Подставив (6) в (5), определим

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*\Bigg|_{\theta=\alpha-0}=\frac{1+\nu_2}{E_2}\delta_A^{-1}(p)\left\{-(1+æ_2)(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)\sigma_\theta^*(p,\alpha)-\right.$$

$$-2\left[(1-æ_2)\sin^2 p\alpha-2p^2\sin^2\alpha+(1+æ_2)p\sin^2\alpha\right]\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)+$$

$$\left.+2(1+æ_2)(\sin p\alpha\cos\alpha+p\cos p\alpha\sin\alpha)\sigma_\theta^*(p,0)\right\}\,; \qquad (7)$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^*\Bigg|_{\theta=\alpha-0}=-\frac{1+\nu_2}{E_2}\delta_A^{-1}(p)\left\{-2[(1-æ_2)\sin^2 p\alpha-2p^2\sin^2\alpha-\right.$$

$$-(1+æ_2)p\sin^2\alpha]\sigma_\theta^*(p,\alpha)+(1+æ_2)(\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)-$$

$$\left.-2(1+æ_2)(p+1)\sin p\alpha\sin\alpha\sigma_\theta^*(p,0)\right\};$$

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*\Bigg|_{\theta=0}=\frac{1+\nu_2}{E_2}(1+æ_2)\delta_A^{-1}(p)[-2(\sin p\alpha\cos\alpha+p\cos p\alpha\sin\alpha)\sigma_\theta^*(p,\alpha)+ \qquad (8)$$

$$+2(p-1)\sin p\alpha\sin\alpha\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)+(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)\sigma_\theta^*(p,0)]$$

Смешанной задаче теории упругости для клина $\alpha\le\theta\le\pi$ соответствует система линейных уравнений

$$B_1 \sin(p+1)\alpha + B_2 \sin(p-1)\alpha + B_3 \cos(p+1)\alpha + B_4 \cos(p-1)\alpha = \sigma_\theta^*(p,\alpha);$$

$$B_1(p+1)\cos(p+1)\alpha + B_2(p-1)\cos(p-1)\alpha - B_3(p+1)\sin(p+1)\alpha -$$

$$-B_4(p-1)\sin(p-1)\alpha = (p-1)\tau_{r\theta}^*(p,\alpha);$$

$$B_1(p-æ_1)\cos p\pi + B_2(p-1)\cos p\pi - B_3(p-æ_1)\sin p\pi - B_4(p-1)\sin p\pi = 0;$$

$$B_1(p+1)\cos p\pi + B_2(p-1)\cos p\pi - B_3(p+1)\sin p\pi - B_4(p-1)\sin p\pi = 0$$

($B_j(p)$, $j = 1,2,3,4$ – неизвестные функции). Подставляя ее решение в (5), где $A_j(p)$ следует заменить на $B_j(p)$, получаем равенства:

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*\Bigg|_{\theta=\alpha+0} = \frac{1+\nu_1}{2E_1}\delta_B^{-1}(p)\left\{-(1+æ_1)\left[\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha\right]\sigma_\theta^*(p,\alpha) +\right.$$

$$\left.+\left[(1-æ_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - 2p\sin 2\alpha + (1+æ_1)\sin 2\alpha\right]\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)\right\}; \qquad (9)$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^*\Bigg|_{\theta=\alpha+0} = -\frac{1+\nu_1}{2E_1}\delta_B^{-1}(p)\{[(1-æ_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - 2p\sin 2\alpha -$$

$$-(1+æ_1)\sin 2\alpha\Big]\sigma_\theta^*(p,\alpha) + (1+æ_1)\left[\cos 2p(\pi-\alpha) + \cos 2\alpha\right]\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)\Big\};$$

$$\delta_B(p) = \sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha .$$

С помощью (1), (7), (9) получаем соотношения, связывающие трансформанты $\sigma_\theta^*(p,\alpha)$, $\tau_{r\theta}^*(p,\alpha)$, $\sigma_\theta^*(p,0)$:

$$A_{11}\sigma_\theta^*(p,\alpha) + A_{12}\tau_{r\theta}^*(p,\alpha) = b_1\sigma_\theta^*(p,0); \quad A_{21}\sigma_\theta^*(p,\alpha) + A_{22}\tau_{r\theta}^*(p,\alpha) = b_2\sigma_\theta^*(p,0);$$

$$A_{11} = \frac{1+\nu_2}{E_2}(1+æ_2)(\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)\delta_A^{-1}(p) -$$

$$-\frac{1+\nu_1}{2E_1}(1+æ_1)\left[\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha\right]\delta_B^{-1}(p);$$

$$A_{12} = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}\left[(1-æ_2)\sin^2 p\alpha - 2p^2\sin^2\alpha + (1+æ_2)p\sin^2\alpha\right]\delta_A^{-1}(p) +$$

$$+\frac{1+\nu_1}{2E_1}\left[(1-æ_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - 2p\sin 2\alpha + (1+æ_1)\sin 2\alpha\right]\delta_B^{-1}(p);$$

$$A_{21} = -\frac{2(1+\nu_2)}{E_2}\left[(1-æ_2)\sin^2 p\alpha - 2p^2\sin^2\alpha - (1+æ_2)p\sin^2\alpha\right]\delta_A^{-1}(p) -$$

$$-\frac{1+\nu_1}{2E_1}\left[(1-æ_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - 2p\sin 2\alpha - (1+æ_1)\sin 2\alpha\right]\delta_B^{-1}(p);$$

$$A_{22} = \frac{1+\nu_2}{E_2}(1+æ_2)(\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha)\delta_A^{-1}(p) -$$

$$-\frac{1+\nu_1}{2E_1}(1+æ_1)\left[\cos 2p(\pi-\alpha)+\cos 2\alpha\right]\delta_B^{-1}(p);$$

$$b_1 = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}(1+æ_2)(\sin p\alpha\cos\alpha + p\cos p\alpha\sin\alpha)\delta_A^{-1}(p);$$

$$b_2 = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}(1+æ_2)(p+1)\sin p\alpha\sin\alpha\delta_A^{-1}(p).$$

В результате решения этой системы имеем

$$\sigma_\theta^*(p,\alpha) = \frac{(1+æ_2)E_2}{1+\nu_2}\frac{N_1(p)}{D(p)}\sigma_\theta^*(p,0); \quad \tau_{r\theta}^*(p,\alpha) = \frac{(1+æ_2)E_2}{1+\nu_2}\frac{N_2(p)}{D(p)}\sigma_\theta^*(p,0);$$

$$N_1(p) = \frac{1+\nu_2}{E_2}\left[\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha\right]\left[(1+æ_2)\cos p\alpha\cos\alpha - (2p+1-æ_2)\sin p\alpha\sin\alpha\right] +$$

$$+\frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{(1+æ_1)(\sin p\alpha\cos\alpha + p\cos p\alpha\sin\alpha)\left[\cos 2p(\pi-\alpha)+\cos 2\alpha\right] +\right.$$

$$\left. +(p+1)\left[(1-æ_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - 2p\sin 2\alpha + (1+æ_1)\sin 2\alpha\right]\sin p\alpha\sin\alpha\right\}; \qquad (10)$$

$$N_2(p) = \frac{1+\nu_2}{E_2}\left[\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha\right]\left[(1-æ_2)\sin p\alpha\cos\alpha + (2p+1+æ_2)\cos p\alpha\sin\alpha\right] +$$

$$+\frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{(1+æ_1)(p+1)\left[\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha\right]\sin p\alpha\sin\alpha -\right.$$

$$\left. -(\sin p\alpha\cos\alpha + p\cos p\alpha\sin\alpha)\left[(1-æ_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - 2p\sin 2\alpha - (1+æ_1)\sin 2\alpha\right]\right\};$$

$$D(p) = \left[\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha\right]\left[(1+æ_2)^2 - 4\left(æ_2\sin^2 p\alpha + p^2\sin^2\alpha\right)\right] +$$

$$+\left\{(1+æ_1)(1+æ_2)\sin 2p\pi + 4(\sin^2 p\alpha - p^2\sin^2\alpha)\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha) + p\sin 2\alpha\right] -\right.$$

$$\left. -[\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha]\left[(1+æ_1)(1+æ_2) - 4(æ_2\sin^2 p\alpha + p^2\sin^2\alpha)\right]\right\}\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\frac{E_2}{E_1} -$$

$$-4(\sin^2 p\alpha - p^2\sin^2\alpha)[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha) + p\sin 2\alpha]\left(\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\frac{E_2}{E_1}\right)^2.$$

Подставляя (10) в (8), получаем соотношение, связывающее трансформанты $\sigma_\theta^*(p,0)$ и $(\partial u_\theta/\partial r)^*\Big|_{\theta=0}$

$$\sigma_\theta^*(p,0) = \frac{\Delta(p)}{2\Delta_0(p)}\frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*\Bigg|_{\theta=0}; \qquad (11)$$

$$\Delta_0(p)=(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha\right]+$$

$$+\left\{(1+æ_1)(1+æ_2)\sin^2 p\pi-(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha\right](æ_2\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha)\right\}e+$$

$$+\left[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha\right](æ_2\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha)e^2;$$

$$\Delta(p)=-4(\sin^2 p\alpha-p^2\sin^2\alpha)\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha\right]+$$

$$+\left\{(1+æ_1)(1+æ_2)\sin 2p\pi+4(\sin^2 p\alpha-p^2\sin^2\alpha)\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha\right]-\right.$$

$$\left.-[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha]\left[(1+æ_1)(1+æ_2)-4(æ_2\sin^2 p\alpha+p^2\sin^2\alpha)\right]\right\}e+$$

$$+\left[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha\right]\left[(1+æ_2)^2-4(æ_2\sin^2 p\alpha+p^2\sin^2\alpha)\right]e^2.$$

Принимая во внимание второе из условий (2) и условие (4), получаем

$$\sigma_\theta^*(p,0)=l^{p+1}\left[\Phi^+(p)+\frac{s}{p+\lambda_0+1}\right];\quad \frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*\Bigg|_{\theta=0}=l^{p+1}\Phi^-(p); \tag{12}$$

$$\Phi^+(p)=\int_1^\infty\sigma_\theta(\rho l,0)\rho^p d\rho;\ \Phi^-(p)=\frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)}\int_0^1\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\Bigg|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=0}}\rho^p d\rho;\quad s=-Cgl^{\lambda_0}.$$

Функция $\Phi^+(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}p<\delta$ (δ – достаточно малое положительное число), а функция $\Phi^-(p)$ – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}p>-\varepsilon$.

Подставляя (12) в (11), приходим к следующему функциональному уравнению Винера–Хопфа относительно неизвестных функций $\Phi^+(p)$ и $\Phi^-(p)$:

$$\Phi^+(p)+\frac{s}{p+\lambda_0+1}=\frac{\Delta(p)}{2\Delta_0(p)}\Phi^-(p)\quad(-\varepsilon<\operatorname{Re}p<\delta). \tag{13}$$

3. Решение уравнения Винера – Хопфа.

Функциональное уравнение (13) представим так:

$$\Phi^+(p)+\frac{s}{p+\lambda_0+1}=\operatorname{ctg}p\pi\, G(p)\Phi^-(p); \tag{14}$$

$$G(p)=\frac{\Delta(p)\sin p\pi}{2\Delta_0(p)\cos p\pi}\quad(-\varepsilon<\operatorname{Re}p<\delta).$$

Функция $G(it)$ $(-\infty<t<\infty)$ представляет собой действительную положительную четную функцию t, стремящуюся к единице при $t\to\infty$. Следовательно, индекс функции $G(p)$ по мнимой оси равен нулю. Поскольку, кроме того, функция $G(p)$ на мнимой оси удовлетворяет условию Гёльдера, имеет место факторизация [2]

$$G(p)=\frac{G^{+}(p)}{G^{-}(p)}\quad(\operatorname{Re}p=0);\ \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G^{+}(p) & (\operatorname{Re}p<0);\\ G^{-}(p) & (\operatorname{Re}p>0).\end{cases}\qquad(15)$$

Функция $G^{+}(p)$ – аналитична, не имеет нулей и стремится к единице при $p\to\infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re}p<0$, а функция $G^{-}(p)$ – аналитична, не имеет нулей и стремится к единице при $p\to\infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re}p>0$.

Функцию $p\operatorname{ctg}p\pi$ можно факторизовать так [7]:

$$p\operatorname{ctg}p\pi=K^{+}(p)K^{-}(p);\ K^{\pm}(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1/2\mp p)}\qquad(16)$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функция). Функция $K^{+}(p)$ – аналитична и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re}p<1/2$, а функция $K^{-}(p)$ – аналитична и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re}p>-1/2$. Справедливы асимптотики

$$K^{+}(p)\sim\sqrt{-p},\quad K^{-}(p)\sim\sqrt{p}\ \ (p\to\infty).\qquad(17)$$

С помощью факторизаций (15), (16) уравнение (14) представим в виде

$$\frac{\Phi^{+}(p)}{K^{+}(p)G^{+}(p)}+\frac{s}{(p+\lambda_0+1)K^{+}(p)G^{+}(p)}=\frac{K^{-}(p)\Phi^{-}(p)}{pG^{-}(p)}\ \ (\operatorname{Re}p=0).\qquad(18)$$

Имеет место представление

$$\frac{s}{(p+\lambda_0+1)K^{+}(p)G^{+}(p)}=\frac{s}{p+\lambda_0+1}\left[\frac{1}{K^{+}(p)G^{+}(p)}-\right.\qquad(19)$$

$$\left.-\frac{1}{K^{+}(-\lambda_0-1)G^{+}(-\lambda_0-1)}\right]+\frac{s}{(p+\lambda_0+1)K^{+}(-\lambda_0-1)G^{+}(-\lambda_0-1)}\ (\operatorname{Re}p=0).$$

Подставляя (19) в (18), получаем

$$\frac{\Phi^{+}(p)}{K^{+}(p)G^{+}(p)}+\frac{s}{(p+\lambda_0+1)}\left[\frac{1}{K^{+}(p)G^{+}(p)}-\frac{1}{K^{+}(-\lambda_0-1)G^{+}(-\lambda_0-1)}\right]=\qquad(20)$$

$$=\frac{K^{-}(p)\Phi^{-}(p)}{pG^{-}(p)}-\frac{s}{(p+\lambda_0+1)K^{+}(-\lambda_0-1)G^{+}(-\lambda_0-1)}\ \ (\operatorname{Re}p=0).$$

Функция в левой части (20) – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}p<0$, а функция в правой части (20) – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}p>0$. В силу принципа аналитического продолжения эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p.

Исходя из известных асимптотик [12]

$$\theta=0,\ r\to l+0,\ \sigma_\theta\sim\frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-l)}};\ \ \theta=0,\ r\to l-0,\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\sim-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi(l-r)}}$$

(K_I – коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины), по теореме абелева типа [11] получим

$$\Phi^+(p) \sim \frac{K_I}{\sqrt{-2pl}},\ \Phi^-(p) \sim -\frac{K_I}{\sqrt{2pl}}\ (p \to \infty). \tag{21}$$

Из (15), (17), (21) следует, что функции в левой и правой частях (20) стремятся к нулю при $p \to \infty$ в полуплоскостях $\operatorname{Re} p < 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$, соответственно. В силу теоремы Лиувилля [7] единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей плоскости p.

Таким образом, решение уравнения Винера – Хопфа (14) имеет вид

$$\Phi^+(p) = \frac{sK^+(p)G^+(p)}{p+\lambda_0+1}\left[\frac{1}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)}\right]\ (\operatorname{Re} p < 0);$$
$$\Phi^-(p) = \frac{s\,pG^-(p)}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)(p+\lambda_0+1)K^-(p)}\quad (\operatorname{Re} p > 0). \tag{22}$$

4. Исследование напряженного состояния вблизи конца трещины.
С помощью (22) находим асимптотику

$$\Phi^-(p) \sim \frac{s}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)\sqrt{p}}\quad (p \to \infty). \tag{23}$$

Согласно (21), (23), получаем следующую формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце маломасштабной трещины нормального разрыва, зародившейся в угловой точке границы раздела сред:

$$K_I = K_I^0 |C| l^{\lambda_0+1/2};\quad K_I^0 = \frac{\sqrt{2}|g|\,\Gamma(\lambda_0+3/2)}{\Gamma(\lambda_0+2)G^+(-\lambda_0-1)}. \tag{24}$$

В случае $C > 0$ (когда угол α должен быть тупым) зависимости безразмерного коэффициента интенсивности напряжений K_I^0 от угла α (в градусах) для различных значений отношения модулей Юнга $e_0 = E_1/E_2$ изображены на рис. 5 ($\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$).

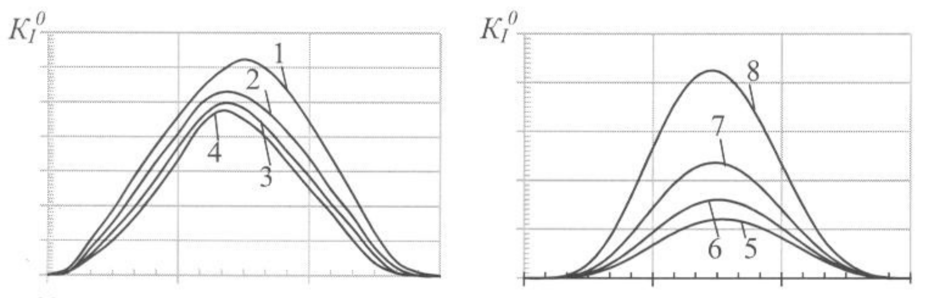

Рис. 5

Кривые *1* – *8* соответствуют значениям e_0, равным, соответственно, 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 2; 3; 5; 10. Если значения e_0 равны 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 2; 3; 5; 10, то значения $\alpha_{\max}$ (в градусах) угла α, при которых функция $K_I^0(\alpha)$ достигает своего набольшего значения, и соответствующие ее значения таковы: 138,2; 134,3; 130,1; 128,4; 139,2; 135,4; 134,1; 132,4 и 6,2271; 5,2894; 4,9612; 4,7523; 1,2025; 1,6012; 2,3644; 4,2363.

В случае $C<0$ (когда угол α должен быть острым) аналогичные зависимости изображены на рис. 6, а значения $\alpha_{\max}$ и $K_I^0(\alpha_{\max})$ – 44,3; 39,1; 36,1; 33,2; 42,4; 37,1; 35,3; 33,5 и 5,0454; 3,8021; 3,3715; 3,1442; 2,0224; 2,3371; 2,7663; 4,5121.

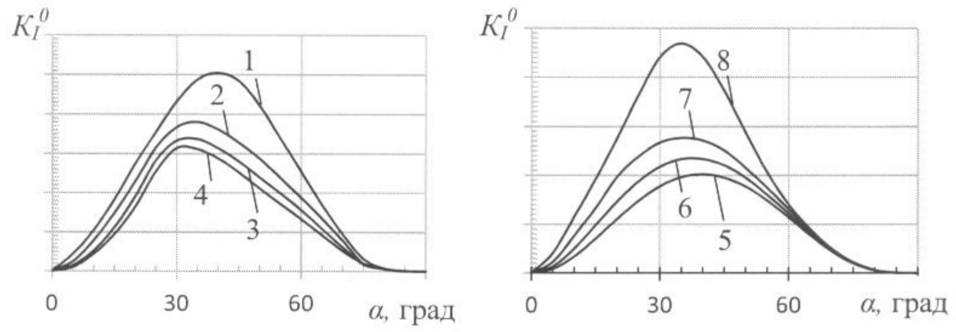

Рис. 6

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы: 1) с ростом угла α интенсивность напряжений вблизи конца трещины сначала увеличивается, а затем уменьшается; 2) чем меньше $e_0<1$ и чем больше $e_0>1$, тем больше интенсивность напряжений вблизи конца трещины; 3) с ростом $e_0<1$ и с ростом $e_0>1$ угол наибольшей интенсивности напряжений уменьшается.

Пользуясь силовым критерием разрушения [12], и приравнивая правую часть (24) к критическому значению коэффициента интенсивности напряжений K_{Ic}, которое является заданной постоянной материала, приходим к уравнению для определения разрушающей нагрузки

$$\left|C(\sigma)\right|=\frac{K_{Ic}}{K_I^0 l^{\lambda_0+1/2}} \tag{25}$$

(σ – параметр, характеризующий внешнюю нагрузку).

Таким образом, страгивание трещины произойдет тогда, когда внешняя нагрузка достигнет своего предельного значения, представляющего собой решение уравнения (25).

Поскольку $\lambda_0>-1/2$ и $Cg>0$, согласно (24) определяем

$$\frac{\partial K_I}{\partial l}=\frac{\sqrt{2}\left(\lambda_0+1/2\right)g\Gamma\left(\lambda_0+3/2\right)}{\Gamma\left(\lambda_0+2\right)G^+\left(-\lambda_0-1\right)}Cl^{\lambda_0-1/2}>0\,.$$

Следовательно, в силу критерия устойчивости равновесия трещин нормального разрыва [12], равновесие маломасштабной трещины, зародившейся в угловой точке границы раздела сред, неустойчиво. После достижения состояния предельного равновесия режим развития трещины будет динамическим.

5. Анализ поведения напряжений вблизи угловой точки.

Подставляя (22) в (12), используя (11) и применяя формулу обращения Меллина [16], получаем

$$\left.\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right|_{\theta=0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{-4\left(1-\nu_2^{\,2}\right)g\Delta_0(p)K^+(p)G^+(p)Cl^{p+\lambda_0+1}}{E_2K^+\left(-\lambda_0-1\right)G^+\left(-\lambda_0-1\right)\left(p+\lambda_0+1\right)\Delta(p)}r^{-p-1}dp$$

(γ – произвольная прямая, лежащая в полосе $-\varepsilon<\operatorname{Re}p<0$).

В силу теоремы о вычетах имеем

$$\left.\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right|_{\theta=0}=-\frac{4\left(1-\nu_2^2\right)}{E_2}f\left(\alpha,e_0,\nu_1,\nu_2\right)Cl^{\lambda_0-\lambda_1}r^{\lambda_1}+o\left(r^{\lambda_1}\right)\quad\left(r\to 0\right);$$

$$f\left(\alpha,e_0,\nu_1,\nu_2\right)=\frac{g\Delta_0\left(-\lambda_1-1\right)\Gamma\left(\lambda_0+3/2\right)\Gamma\left(\lambda_1+2\right)G^+\left(-\lambda_1-1\right)}{\left(\lambda_0-\lambda_1\right)\Delta'(-\lambda_1-1)\Gamma\left(\lambda_0+2\right)\Gamma\left(\lambda_1+3/2\right)G^+\left(-\lambda_0-1\right)};$$

$$\Delta'(p)=\frac{d\Delta\left(p\right)}{dp}.$$

Здесь $\lambda_1\in]-1;0[$ – ближайший к прямой $\operatorname{Re}\lambda=-1$ корень уравнения $\Delta(-\lambda-1)=0$ в полосе $-1<\operatorname{Re}\lambda<0$.

Зависимость корня λ_1 от угла α качественно показана на рис. 7. Некоторые значения λ_1 приведены в табл. 2 ($\nu_1=\nu_2=0,3$).

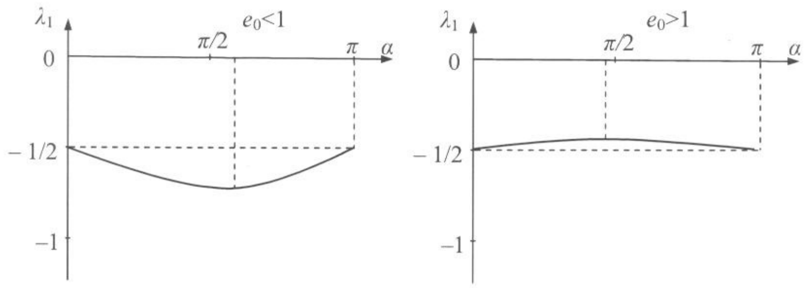

Рис. 7

Таблица 2

α, град	e_0							
	0,1	0,2	0,3	0,5	2	3	5	10
15	– 0,509	– 0,505	– 0,502	– 0,501	– 0,499	– 0,499	– 0,499	– 0,499
30	– 0,543	– 0,525	– 0,515	– 0,509	– 0,494	– 0,492	– 0,491	– 0,489
45	– 0,599	– 0,560	– 0,538	– 0,523	– 0,482	– 0,475	– 0,468	– 0,462
60	– 0,665	– 0,604	– 0,567	– 0,541	– 0,464	– 0,445	– 0,426	– 0,408
75	– 0,719	– 0,647	– 0,597	– 0,559	– 0,445	– 0,415	– 0,381	– 0,342
90	– 0,755	– 0,679	– 0,620	– 0,574	– 0,437	– 0,407	– 0,376	– 0,347
105	– 0,771	– 0,694	– 0,631	– 0,579	– 0,441	– 0,417	– 0,397	– 0,382
120	– 0,766	– 0,688	– 0,624	– 0,574	– 0,451	– 0,433	– 0,419	– 0,409
135	– 0,740	– 0,661	– 0,602	– 0,559	– 0,462	– 0,448	– 0,435	– 0,425
150	– 0,690	– 0,616	– 0,569	– 0,538	– 0,474	– 0,462	– 0,448	– 0,430
165	– 0,614	– 0,561	– 0,534	– 0,518	– 0,487	– 0,479	– 0,468	– 0,439

Из полученных результатов следуют такие выводы.

Угловая точка *O* (рис. 4) является концентратором напряжений со степенной особенностью. Показатель степени сингулярности напряжений λ_1 зависит от угла, отношения модулей Юнга и от коэффициентов Пуассона. Этот показатель представляет собой корень определенного трансцендентного уравнения.

Пусть отношение модулей Юнга $e_0 = E_1 / E_2 < 1$. С ростом угла α интенсивность напряжений вблизи угловой точки сначала увеличивается, а затем уменьшается. Угол наибольшей интенсивности напряжений – тупой. С ростом e_0 интенсивность напряжений и угол наибольшей интенсивности напряжений уменьшаются. Значениям e_0, равным 0,1; 0,2; 0,3; 0,5, соответствуют значения угла (в градусах) наибольшей интенсивности напряжений, равные 109,1; 108,4; 106,4; 103,3 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

Пусть $e_0 > 1$. С ростом угла α интенсивность напряжений вблизи угловой точки сначала уменьшается, а затем увеличивается. Угол наименьшей интенсивности напряжений – острый. С ростом e_0 интенсивность напряжений и угол наименьшей интенсивности напряжений уменьшаются. Значениям e_0, равным 2; 3; 5; 10, соответствуют значения угла (в градусах) наименьшей интенсивности напряжений, равные 87,2; 85,1; 83,2; 82,4.

Заключение.

В данной работе построено точное решение симметричной задачи теории упругости для кусочно-однородной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, трещиной в вершине и учитывающим внешнее поле условием на бесконечности. Установлен характер изменения уровня интенсивности напряжений вблизи конца маломасштабной трещины нормального разрыва в угловой точке границы раздела изотропных линейно-упругих сред в зависимости от угла и упругих постоянных. Определено условие страгивания трещины и показано, что ее равновесие неустойчиво. Дан анализ поведения напряжений вблизи угловой точки.

Р Е З Ю М Е . Досліджено напружений стан кусково-однорідного ізотропного пружного тіла біля маломасштабної тріщини нормального розриву у кутовій точці межі поділу середовищ. Точний розв’язок відповідної задачі теорії пружності побудовано методом Вінера – Хопфа.

1. *Банцури Р. Д.* Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез // Докл. АН СССР. – 1966. – **167**, № 6. – С. 1256 – 1259.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнис Л.А.* О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 10. – С. 28 – 41.
4. *Каминский А.А., Кипнис Л.А., Колмакова В.А.* О модели зоны предразрушения в конце трещины, выходящей на негладкую границу раздела упругих сред // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 10. – С. 13 – 22.
5. *Каминский А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А.* Расчет пластической зоны в угловой точке в рамках модели “трезубец” // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 5. – С. 110 – 116.
6. *Кулиев В.Д., Работнов Ю.Н., Черепанов Г.П.* Торможение трещины на границе раздела различных упругих сред // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 120 – 128.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
8. *Лобода В.В., Шевелева А.Е.* Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 5. – С. 76 – 82.
9. *Назаренко В.М., Кипнис Л.Л.* Об интенсивности напряжений в концах межфазных сдвиговых трещин в угловой точке границы раздела сред // Доп. НАН України. – 2015. – № 8. – С. 58 – 63.
10. *Некислых Е.М., Острик В.И.* Задачи об упругом равновесии клина с трещинами на оси симметрии // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 5. – С. 111 – 129.
11. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М. : Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
12. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. – К.: Наукова думка, 1988. – 488 с.
13. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

14. *Сметанин Б.И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 2. – С. 115 – 122.
15. *Сметанин Б.И.* Об одной смешанной задаче теории упругости для клина // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, № 4. – С. 708 – 714.
16. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
17. *Храпков А.А.* Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешимые в замкнутой форме // Прикл. математика и механика. – 1971. – **35**, № 6. – С. 1062 – 1069.
18. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Spatial Problems of the Fracture of Materials Loaded Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 489 – 560.
19. *Dempsey J.P., Sinclair G.B.* On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge // J. Elast. – 1981. – **11**, N 3. – P. 317 – 327.
20. *Doran H.E.* The wedge with a symmetric crack at the vertex in plane elastostatics // J. Inst. Math. and Appl. – 1969. – **5**, N 4. – P. 363 – 372.
21. *Guz A.N., Dekret V.A.* Finite-Fiber Model in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 1 – 48.
22. *Kaloerov S.A., Samodurov A.A.* Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 623 – 639.
23. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Influence of Tension Along a Mode I Crack in an Elastic Body on the Formation of a Nonlinear Zone // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 130 – 148.
24. *Keer L.M., Mendelsohn D.A., Achenbach J.D.* Crack at the apex of a loaded notch // Int. J. Solids and Struct. – 1977. – **13**, N 7. – P. 615 – 623.
25. *Ouchterlony F.* Symmetric cracking of a wedge by concentrated loads // Int. J. Eng. Sci. – 1977. – **15**, N 2. – P. 109 – 116.
26. *Srivastav R.P., Narain P.* Certain two–dimensional problems of stress distribution in wedge shaped elastic solids under discontinuous loads // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1965. – **61**, N 4. – P. 945 – 954.
27. *Stone S.F., Westmann R.A.* Stress intensity factors for cracked wedges // Int. J. Solids and Struct. – 1981. – **17**, N 3. – P. 345 – 358.
28. *Theocaris P.S., Gdoutos E.E.* Stress singularities in cracked composite full–planes // Int. J. Fract. – 1977. – **13**, N 6. – P. 763 – 773.

Поступила 02.07.2017 Утверждена в печать 22.05.2018