ОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

О. М. Литвин

Інтерполювання диференціальних операторів з частинними похідними

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Some basic statements of the theory of the approximation of differential operators with partial derivatives by other differential operators with partial derivatives are given. The approximated and approximating operators are equal on the given system of functions (functional knots). The example is given.

Постановка проблеми. У даній роботі теорія інтерполювання звичайних диференціальних операторів, запропонована у роботі [1], узагальнюється на випадок інтерполювання диференціальних операторів з частинними похідними. Для функцій двох і більше змінних поняття інтерполяції знайшло своє узагальнення у вигляді операторів інтерлінації та інтерфлетації, у яких інформація про наближувану функцію задається на системі ліній або поверхонь (якщо змінних більше двох) [2, 3].

Для диференціальних операторів з частинними похідними задачу інтерполювання сформулюємо таким чином. Деякий диференціальний оператор $A\colon U \to \Gamma$ з частинними похідними (взагалі кажучи, невідомий) задається інтерполяційними даними

$$Au_\beta(x,y) = \gamma_\beta(x,y), \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant n, \tag{1}$$

де функціональні вузли $u_\beta(x,y) \in U$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$, і функції $\gamma_\beta(x,y) \in \Gamma$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$, вважаються заданими елементами деяких функціональних просторів U, Γ відповідно. Треба побудувати за допомогою цієї інформації диференціальний оператор L_n з частинними похідними заданого вигляду (лінійний або нелінійний), який мав би ті ж інтерполяційні властивості.

Деякі важливі результати з побудови поліноміальних наближуючих операторів у вигляді операторних поліномів P_n степеня n, визначених на множині функцій $u \in X$ із значеннями у просторі Y (X та Y — деякі лінійні простори, наприклад гільбертові), наведені в працях [4–7]. Під P_n у цих працях розуміється оператор

$$P_n u = \sum_{k=0}^{n} L_k u^k,$$

де $L_0u^0 = L_0 \in Y$, L_ku^k, $k = \overline{1,n}$, — k-й операторний степінь, отриманий з полілінійного симетричного оператора $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k)\colon X^k \to Y$, при $v_1 = \cdots = v_k = u$, $v_i \in X$, $i = \overline{1,n}$. Розв'язувана у цитованих працях задача формулюється таким чином: для деякого оператора A треба знайти такий операторний поліном P_n, який задовольняє інтерполяційні умови

$$P_n(u_\beta(x)) = A(u_\beta(x)), \qquad 1 \leqslant \beta \leqslant m,$$

де $\{u_\beta(x)\}_{\beta=1}^m$ — задана система вузлів $u_\beta(x) \in X$. У роботах [4–7] найбільше уваги приділено випадку, коли операторний поліном є інтегральним оператором спеціального вигляду. Відмітимо також роботу [8], у якій класичні поліноми Лагранжа і Ерміта узагальнюються на випадок операторного інтерполювання. Тобто у цитованих роботах наближуючий оператор є операторним поліномом, а не диференціальним оператором, навіть якщо наближуваний оператор A є диференціальним оператором з частинними похідними.

У роботі автора [1] вперше досліджено важливий з практичної точки зору випадок, коли наближуваний і наближуючий оператори є звичайними диференціальними операторами. Автору невідомі аналогічні результати для випадку, коли наближуваний і наближуючий оператори є диференціальними операторами з частинними похідними. У той же час теорія наближення функцій однієї та багатьох змінних свідчить про те, що врахування класу наближуваних функцій дозволяє отримати більш точне наближення до них. Зокрема, теорія наближення в якій на множині наближуваних елементів знайдеться такий, що точно може бути наближений, повинна розглядатись як більш якісна теорія наближення порівняно з теорією, що не має цієї властивості. Яскравим прикладом цього є теорія інтерлінації та інтерфлетації функцій багатьох змінних [2, 3], у якій досягається висока точність наближення функцій багатьох змінних завдяки тому, що для побудови наближуючих операторів використовуються не тільки значення наближуваної функції в окремих точках, але її сліди на заданій системі ліній або поверхонь. Сказане повністю стосується наближення диференціальних операторів з частинними похідними. Крім того, існують практичні задачі, у яких наближуваний нелінійний диференціальний оператор доцільно замінити іншим диференціальним оператором більш простої конструкції (наприклад, лінійним чи поліноміальним).

Відзначимо, що у виразі

$$A(x, y, D_x, D_y)u(x, y), \qquad D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad D_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

для наближення оператора $A(x, y, D_x, D_y)$ можна використовувати або не використовувати функцію $u(x, y)$. Перший випадок полягає у наближеному відновленні оператора $A(x, y, D_x, D_y)$ з умов (1). Другий випадок пов'язаний з наближенням формули $A(x, y, D_x, D_y)$ якою-небудь іншою формулою, яку можна розглядати як функцію змінних x, y, що залежить від параметрів D_x, D_y. Метою даної роботи є започаткування побудови теорії інтерполювання диференціальних операторів з частинними похідними $A(x, y, D_x, D_y)$ на основі умов (1), відмінної від теорії наближення операторів, дослідженої в [4–8]. Відмінність полягає в тому, що в запропонованій теорії наближуваний і наближуючий оператори є диференціальними операторами з частинними похідними від двох змінних.

Інтерполювання диференціальних операторів з частинними похідними (ДОЗЧП) за допомогою ДОЗЧП і з використанням функціональних вузлів. *Наближення лінійними диференціальними операторами.* Припустимо, що $n \in \mathbb{N}$,

$A(x, y, D_x, D_y)$ — деякий диференціальний оператор з частинними похідними, який діє на функції від двох змінних $u(x, y)$. Інформація про нього задана так ($N \in \mathbb{N}$ — задане натуральне число):

$$\begin{aligned} &A(x, y, D_x, D_y)u_\beta(x, y) = \gamma_\beta(x, y), \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant N; \\ &\sum_{\beta=0}^{n} |\gamma_\beta(x, y)| \neq 0, \qquad (x, y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Для практики інколи зручно використовувати два індекси при нумерації функцій $u_{\alpha,\beta}(x, y)$, $\gamma_{\alpha,\beta}(x, y)$. У цьому випадку треба побудувати лінійний диференціальний оператор L з частинними похідними $(D_x^\alpha D_y^\beta u(x, y) = (\partial^{\alpha+\beta} u(x, y))/(\partial x^\alpha \partial y^\beta))$; $G_1 = \{0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant n\}$ або $G_2 = \{0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n\}$, $\gamma = 1, 2$):

$$L_n(x, y, D_x, D_y)u(x, y) = \sum_{(\mu,\nu)\in G_\gamma} a_{\mu,\nu}(x, y) D_x^\mu D_y^\nu u(x, y), \tag{3}$$

невідомі коефіцієнти $a_{\mu,\nu}(x, y)$, μ, $\nu \in G_\gamma$, якого знаходяться з умов

$$L_n(x, y, D_x, D_y)u_{\alpha,\beta}(x, y) = \gamma_{\alpha,\beta}(x, y), \qquad (\alpha, \beta) \in G_\gamma. \tag{4}$$

При такій нумерації $N = (n + 1)(n + 2)/2$. Нижче сформулюємо умови, які повинна задовольняти система функцій (функціональних вузлів) $u_{\alpha,\beta}(x, y)$, $(\alpha, \beta) \in G_\gamma$ для того, щоб задача (4)–(3) мала єдиний розв'язок, і дамо два явних аналітичних вирази для такого оператора $L_n(x, y, D_x, D_y)u(x, y)$. Наведено також аналітичний вираз для інтерполяційних операторів $\overline{L}_n(x, y, D_x, D_y)u(x, y) = \sum\limits_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(x, y)(D_x^p D_y^q u(x, y))^\alpha$, а також інтегральне зображення залишку наближення операторів $A(x, y, D_x, D_y)$, що задовольняють умову $A(x, y, D_x, D_y)u(x, y) = A(x, D_x u(x, y), D_y u(x, y))$ за допомогою нелінійних диференціальних операторів першого порядку

$$\overline{L}_n(x, y, D_x, D_y)u(x, y) = \sum_{(\mu,\nu)\in G_\gamma}^{n} a_{\mu,\nu}(x, y)(D_x u(x, y))^\mu (D_y u(x, y))^\nu.$$

Теорема 1. *Для того щоб у деякій області $(x, y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$ задача (4)–(3) мала єдиний розв'язок $a_{i,j}(x, y)$, $(i, j) \in G_\gamma$, необхідно і достатньо, щоб система функцій $u_{\alpha,\beta}(x, y)$, $(\alpha, \beta) \in G_\gamma$ задовольняла умову*

$$\Delta = \det W(x, y) \neq 0, \qquad (x, y) \in G; \qquad W(x, y) = [D^{\mu,\nu} u_{\alpha,\beta}(x, y)]_{(\alpha,\beta)\in G_\gamma}^{(\mu,\nu)\in G_\gamma}. \tag{5}$$

Оператор $L_n(x, y, D_x, D_y)u(x, y)$ можна зобразити у вигляді ($\gamma = 1$)

$$\begin{aligned} &L_n(x, y, D_x, D_y)u(x, y) = \\ &\qquad = \Gamma(x, y) W(x, y)^{-1} [I D_x D_y \cdots D_x^n (D_x^{n-1} D_y^1) \cdots (D_x^1 D_y^{n-1}) D_y^n]^T u(x, y), \end{aligned} \tag{6}$$

де I — тотожний оператор, $\Gamma(x, y) = [\gamma_{\alpha,\beta}(x, y)]^{(\alpha,\beta)\in G_\gamma}$.

Нижче дамо також іншу формулу для операторів $L_n(x, y, D_x, D_y)u(x, y)$.

Теорема 2. *Оператор $L_n(x,y,D_x,D_y)u(x,y)$ можна зобразити також у вигляді (для $\gamma = 1$)*

$$L_n(x,y,D_x,D_y)u(x,y) =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} u_{0,0}D_xu_{0,0}D_yu_{0,0} & \ldots & D_x^n u_{0,0}(D_x^{n-1}D_y^1 u_{0,0})\ldots D_y^n u_{0,0} & \gamma_{0,0}(x,y) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n,0}D_xu_{n,0}D_yu_{n,0} & \ldots & D_x^n u_{n,0}(D_x^{n-1}D_y^1 u_{n,0})\ldots D_y^n u_{n,0} & \gamma_{n,0}(x,y) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{0,n}D_xu_{0,n}D_yu_{0,n} & \ldots & D_x^n u_{0,n}(D_x^{n-1}D_y^1 u_{0,n})\ldots D_y^n u_{0,n} & \gamma_{0,n}(x,y) \\ uD_xuD_yu & \ldots & D_x^n u(D_x^{n-1}D_y^1 u)\ldots D_y^n u & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}. \tag{7}$$

Інтерполювання диференціальних операторів спеціального виду. Теореми 1 і 2 повністю розв'язують задачу побудови шуканого лінійного диференціального оператора з частинними похідними з властивостями (4). Але задача операторного інтерполювання має неєдинний розв'язок. Нижче для операторів $A(x,y,D_x,D_y)u(x,y)$ з властивістю

$$A(x,y,D_x,D_y)u(x,y) = A(x,y,D_x^pD_x^qu(x,y)), \qquad p,q \in \mathbb{N} \tag{8}$$

дано аналітичний вираз нелінійного оператора порядку $p+q$

$$\overline{L}_n(x,y,D_x^pD_y^qu)u(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{n} w_\alpha(x,y)(D_x^pD_y^qu(x,y))^\alpha,$$

що задовольняє умови (4).

Теорема 3. *Оператор*

$$\overline{L}_n(x,y,D_x^pD_y^qu(x,y)) = \sum_{r+s=0}^{n} \gamma_{r,s}(x,y) \prod_{\substack{\mu+\nu=0,\\ \mu\neq\alpha,\ \mu\neq\beta}}^{n} \frac{D_x^pD_y^qu_{\mu,\nu}(x,y) - D_x^pD_y^qu(x,y)}{D_x^pD_y^qu_{\mu,\nu}(x,y) - D_x^pD_y^qu_{r,s}(x,y)}, \tag{9}$$

задовольняє інтерполяційні умови (4), якщо система функцій $u_{\alpha,\beta}(x,y)$, $0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant n$, задовольняє такі умови ($0 \leqslant \mu+\nu,\ r+s \leqslant n$):

$$D_x^pD_y^qu_{\mu,\nu}(x,y) - D_x^pD_y^qu_{r,s}(x,y) \neq 0 \qquad \forall (x,y)\in G, \qquad \mu\neq r, \qquad \nu\neq s. \tag{10}$$

У теоремі 4 наведено інтегральне зображення для залишку

$$\overline{R}_nAu(x,y) = (A(x,y,D_x^pD_y^q) - \overline{L}_n(x,y,D_x^pD_y^q))u(x,y). \tag{11}$$

Теорема 4. *Хай $1 \leqslant t \leqslant n+1$ і функція $A(x,y,z)$ змінної $z\in\mathbb{R}$ належить до класу $A(x,y,z)\in C^t(G\times\mathbb{R})$ і для оператора $A(x,y,D_x^pD_y^q)$ виконується умова (8). Тоді*

$$\overline{R}_{n,r}Au(x,y) = \sum_{r+s=0}^{n} \prod_{\substack{\mu=0,\ \nu=0,\\ \mu\neq r,\ \nu\neq s}}^{n} \frac{D_x^pD_y^qu_{\mu,\nu}(x,y) - D_x^pD_y^qu(x,y)}{D_x^pD_y^qu_{\mu,\nu}(x,y) - D_x^pD_y^qu_{r,s}(x,y)} \times$$

$$\times \int\limits_{D_x^pD_y^qu_{r,s}(x,y)}^{D_x^pD_y^qu(x,y)} \frac{\partial^t A(x,y,z)}{\partial z^t} \frac{(D_x^pD_y^qu_{r,s}(x,y) - z)^{t-1}}{(t-1)!}dz. \tag{12}$$

Припустимо, що оператор $A(x,y,D_x,D_y)$ має таку властивість:

$$A(x,y,D_x,D_y)u(x,y)=A(x,y,D_xu(x,y),D_yu(x,y)). \tag{13}$$

Крім того, припустимо, що $u_{\alpha,\beta}(x,y)=U_{1,\alpha}(x)U_{2,\beta}(y)$, $0\leqslant\alpha$, $\beta\leqslant n$. Будемо наближувати $A(x,y,D_x,D_y)$ за допомогою оператора

$$A_n(x,y,D_xu,D_yu)=\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{n}a_{\alpha,\beta}(x,y)(D_xu)^{\alpha}(D_yu)^{\beta}.$$

Теорема 5. *Хай* $u=u(x,y)$. *Оператор*

$$A_n(x,y,D_xu,D_yu)=$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{n}\gamma_{\alpha,\beta}(x,y)\prod_{\substack{\mu=0,\\ \mu\neq\alpha}}^{n}\frac{D_xu-D_xU_{1,\alpha}(x)}{D_xU_{1,\mu}(x)-D_xU_{1,\alpha}(x)}\prod_{\substack{\nu=0,\\ \nu\neq\beta}}^{n}\frac{D_yu-D_yU_{2,\beta}(y)}{D_yU_{2,\nu}(y)-D_yU_{2,\beta}(y)}$$

має такі інтерполяційні властивості:

$$A_n(x,y,D_x,D_y)U_{1,r}(x)U_{2,s}(y)=\gamma_{r,s}(x,y),\qquad 0\leqslant r,\qquad s\leqslant n.$$

П р и к л а д. Хай $A(x,y,D_x,D_y)=D_x^2D_y^2=\partial^4/(\partial x^2\partial y^2)$; $n=1$; $L_{1,1}(x,y,D_x,D_y)u=a_{0,0}u(x,y)+a_{1,0}(x,y)D_xu(x,y)+a_{0,1}(x,y)D_yu(x,y)+a_{1,1}(x,y)D_xD_yu(x,y)$. У випадку $u_{0,0}(x,y)=1$; $u_{1,0}(x,y)=x^2/2$, $u_{0,1}(x,y)=y^2/2$, $u_{1,1}(x,y)=x^2y^2/4$; $\gamma_{0,0}(x,y)=0$; $\gamma_{1,0}(x,y)=0$, $\gamma_{0,1}(x,y)=0$, $\gamma_{1,1}(x,y)=1$ система (4) має розв'язок $a_{0,0}(x,y)=0$; $a_{1,0}(x,y)=0$, $a_{0,1}(x,y)=0$, $a_{1,1}(x,y)=x^{-1}y^{-1}$. Тому $L_{1,1}(x,y,D_x,D_y)u=x^{-1}y^{-1}D_xD_yu(x,y)$. У цьому випадку оператор $\overline{L_1}u(x,y)=\overline{L_1}(x,y,D_x,D_y)u(x,y)$ має вигляд

$$\overline{L_1}u(x,y)=4x^{-3}y^{-3}(D_xu(x,y))(D_yu(x,y)).$$

Таким чином, у роботі викладено деякі основні твердження теорії інтерполювання диференціальних операторів з частинними похідними (ДОЗЧП) за допомогою лінійних або нелінійних ДОЗЧП поліноміального типу, коли для наближення використовуються результати дії наближуваного оператора на деяку систему функцій — функціональних вузлів. Наведені явні аналітичні вирази для запропонованих операторів, досліджено залишки наближення з їх допомогою деяких нелінійних операторів. Розглянуто приклад.

1. *Литвин О. М.* Інтерполювання звичайних диференціальних операторів // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 19–23.
2. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її узагальнення. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
3. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.
4. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, No 2. – P. 308–315.
5. *Howlett P. G., Torokhti A. P.* Weak interpolation and approximation of nonlinear operators on the space $C([0,1])$ // Numer. Func. Anal. and Optimiz. – 1998. – **19**, No 9, 10. – P. 1025–1043.
6. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2002. – 406 с.
8. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Appr. Theory. – 1971. – **4**, No 4. – P. 419–432.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
Надійшло до редакції 27.11.2006