

А. Ю. Глухов

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ
НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛАХ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ
ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ СЛОЕВ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ndrew.gl@gmail.com*

Abstract. Within the framework of linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, a statement and method of solving of problems on propagation of axisymmetric waves in the laminated composite incompressible material with initial stresses are considered. The case of wave propagation along the layers is considered. The dispersive equation for quasi-longitudinal waves and their long-wave approximation is obtained for the full contact of layers and the full sliding contact of layers. A numerical analysis is carried out for dispersive equations of elastic materials of Treloar type potential. An effect of initial stresses is studied for axisymmetric harmonic waves.

Key words: laminated composite incompressible material, elastic waves, initial stresses, dispersive equation, long-wave approximation, potential of Treloar.

Введение.

Для слоистых композитных материалов периодической структуры в рамках трехмерной линеаризованной теории распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями [4, 6] полученные результаты можно объединить в следующие три группы [11].

К *первой группе* относятся публикации [3, 5, 6 и др.], в которых рассмотрены вопросы приведения слоистых композитных материалов с начальными напряжениями к однородной среде.

К *второй группе* относятся публикации [5 – 8, 12, 14 – 17 и др.], в которых рассмотрены вопросы распространения плоских волн в слоистых композитных сжимаемых и несжимаемых материалах.

К *третьей группе* относятся публикации [1, 2, 5, 6, 9, 10, 13 и др.], где исследовано распространение осесимметричных волн и волн кручения в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями.

Отметим, что в полной форме результаты о распространении упругих волн в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями представлены в монографиях [5, 6]. В работах [3, 5, 6, 9 – 16] результаты получены для случая полного контакта слоев. В статьях [1, 2, 7, 8, 17] рассмотрен такой предельный случай контакта слоев, как полное проскальзывание. В работах [1 – 17] использован метод исследования, изложенный в [5, 6].

В данной работе в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена задача о распространении осесимметричных волн в слоистом несжимаемом композитном материале с начальными напряжениями. Проведено численное исследование дисперсионных уравнений для квазипоперечных волн, изучено влияние начальных напряжений на скорости их распространения.

§1. Постановка задач.

Рассмотрим слоистый композитный материал с начальными напряжениями, который состоит из чередующихся слоев двух типов, в каждом из которых материалы и начальные напряженно-деформированные состояния (НДС) являются одинаковыми для рассматриваемого типа слоев.

При исследовании будем применять лагранжевы координаты $y_n \equiv y^n$, которые в начальном НДС совпадают с декартовыми координатами, и лагранжевы координаты r', θ, y_3 , которые в начальном НДС совпадают с круговыми цилиндрическими координатами.

Декартову систему координат (y_1, y_2, y_3) в начальном НДС выбираем таким образом, чтобы ось Oy_3 была направлена по нормали к плоскостям раздела слоев.

Материалы слоев предполагаем гиперупругими изотропными с произвольной структурой упругих потенциалов; в случае трансверсально-изотропных гиперупругих материалов слоев принимаем, что ось изотропии направлена вдоль оси Oy_3 .

Пусть начальное напряженное состояние – однородное. Также примем, что для каждого из слоев имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)}; \\ \varepsilon_{11}^{0(j)} = \varepsilon_{22}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В (1.1) и ниже индексами в скобках ($j = 1, 2$) отмечены все величины, относящиеся к слоям различных типов: $\sigma_n^{0(j)}$, $S_n^{0(j)}$ и $\varepsilon_n^{0(j)}$ – составляющие тензора обобщенных напряжений, тензора обобщенных напряжений Лагранжа и тензора деформаций Грина, соответственно; $h^{(j)}$ – толщина j -го слоя в начальном НДС; $h^{(j)}$ – толщина j -го слоя в естественном состоянии; $\lambda_i^{(j)}$ – коэффициенты удлинения вдоль соответствующих осей.

Как и в [1], принимаем

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(j)} = u_{r'}^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad u_\theta^{(j)} \equiv 0; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)}(r', y_3, \tau); \\ u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = p^{(j)}(r', y_3, \tau). \end{aligned} \quad (1.2)$$

В этом случае в представлениях общих решений пространственных динамических линейризованных задач теории упругости (применительно к общему решению осесимметричной задачи в цилиндрических координатах) можно принять

$$\Psi^{(j)} \equiv 0; \quad X^{(j)} = X^{(j)}(r', y_3, \tau). \quad (1.3)$$

В рассматриваемом случае для определения перемещений $u^{(j)}$ и составляющих тензора напряжений $Q^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$ получаем выражения

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3} X^{(j)}; \quad u_3^{(j)} = \Delta_1' X^{(j)}; \quad \rho^{(j)} = \rho^{(j)}; \\ u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = \left[(\kappa_{1111}^{(j)} - \kappa_{1133}^{(j)} - \kappa_{1313}^{(j)}) \Delta_1' + \kappa_{3113}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \rho^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} X^{(j)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} Q_{33}^{(j)} = \left[(\kappa_{1111}^{(j)} + \kappa_{3333}^{(j)} - 2\kappa_{1133}^{(j)} - \kappa_{1313}^{(j)}) \Delta_1' + \kappa_{3113}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \rho^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} X^{(j)}; \\ Q_{3r'}^{(j)} = \left(\kappa_{1313}^{(j)} \Delta_1' - \kappa_{3113}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial}{\partial r'} X^{(j)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для определения функций $X^{(j)}$ при условии (1.3) имеем уравнение

$$\left[\left(\Delta'_1 + \xi_2^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta'_1 + \xi_3^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \frac{\rho^{(j)}}{\kappa_{1331}^{(j)}} \left(\Delta'_1 + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] X^{(j)} = 0. \quad (1.6)$$

Величины $\xi_2^{(j)}$ и $\xi_3^{(j)}$ (1.6) определяются так же, как и в [4], для материалов каждого из рассматриваемых слоев; $\rho^{(j)}$ – плотность материалов каждого из слоев.

Таким образом, в соответствии с изложенным, исследование закономерностей распространения осесимметричных упругих волн в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями сводится к построению решений уравнения (1.6) при удовлетворении граничных условий на плоскостях раздела слоев и условий периодичности, соответствующих теории Флоке.

§2. Метод исследований.

Рассмотрим распространение осесимметричной волны в радиальном направлении в слоистом композитном несжимаемом материале с начальными напряжениями. При этом будем рассматривать только случай волны, уходящей «на бесконечность». В этом случае по аналогии с [4] для определения «истинной» фазовой скорости распространения осесимметричных волн в слоистом композитном материале с начальными напряжениями примем

$$X^{(j)}(r', y_3, \tau) = X^{(j)(0)}(y_3) H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j = 1, 2. \quad (2.1)$$

В (2.1) k и ω – волновое число и круговая частота; C – «истинная» фазовая скорость осесимметричных волн; $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода, что обеспечивает распространение осесимметричных волн, уходящих «на бесконечность»; $X^{(j)(0)}(y_3)$ – амплитудная функция. В дальнейшем индексами (0) отмечены все амплитудные величины при представлениях типа (2.1).

Подставляя (2.1) в (1.4), для определения перемещений получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(j)} &= u_{r'}^{(j)(0)} \frac{d}{dr'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ u_4^{(j)} &\equiv p^{(j)} = p^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ u_{r'}^{(j)(0)} &= -\frac{d}{dy_3} X^{(j)(0)}(y_3); \quad u_3^{(j)(0)} = -k^2 X^{(j)(0)}(y_3); \\ p^{(j)(0)} &= \left[-k^2 \left(\kappa_{1111}^{(j)} - \kappa_{1133}^{(j)} - \kappa_{1313}^{(j)} \right) + \kappa_{3113}^{(j)} \frac{d^2}{dy_3^2} + \omega^2 \rho^{(j)} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} X^{(j)(0)}(y_3). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогичным образом, подставляя (2.1) в (1.5), для определения составляющих тензора напряжений $\tilde{Q}^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$ получаем

$$\begin{aligned} Q_{33}^{(j)} &= Q_{33}^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad Q_{3r'}^{(j)} = Q_{3r'}^{(j)(0)} \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ Q_{33}^{(j)(0)} &= \left[-k^2 \left(\kappa_{1111}^{(j)} + \kappa_{3333}^{(j)} - 2\kappa_{1133}^{(j)} - \kappa_{1313}^{(j)} \right) + \kappa_{3113}^{(j)} \frac{d^2}{dy_3^2} + \omega^2 \rho^{(j)} \right] \frac{d}{dy_3} X^{(j)(0)}(y_3); \\ Q_{3r'}^{(j)(0)} &= -\left(k^2 \kappa_{1313}^{(j)} + \kappa_{3113}^{(j)} \frac{d^2}{dy_3^2} \right) X^{(j)(0)}(y_3). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1) в (1.6), получаем уравнение для определения функций $X^{(j)(0)}(y_3)$ в следующей форме:

$$\left[\left(\xi_2^{r(j)} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \left(\xi_3^{r(j)} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) + \frac{\omega^2 \rho^{(j)}}{\kappa_{1331}^{r(j)}} \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \right] X^{(j)(0)}(y_3) = 0. \quad (2.4)$$

Поскольку в (2.1) – (2.4) все соотношения представлены через амплитудные величины, то условия на границе контакта слоев и условия периодичности также запишем для амплитудных величин. Для этого выделим два соседних слоя и примем, что слой, величины которого отмечены индексом 1, занимает по оси Oy_3 область $0 \leq y_3 \leq h^{(1)}$, а слой, все величины которого отмечены индексом 2, занимает по оси Oy_3 область $-h^{(2)} \leq y_3 \leq 0$. В случае полного контакта между слоями композитного материала (жесткий контакт) при $y_3 = 0$ должны выполняться условия непрерывности векторов напряжений и перемещений. Сформулированные для амплитудных величин условия непрерывности можно представить в форме

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(1)(0)}(0) &= u_{r'}^{(2)(0)}(0); \quad u_3^{(1)(0)}(0) = u_3^{(2)(0)}(0); \\ Q_{3r'}^{(1)(0)}(0) &= Q_{3r'}^{(2)(0)}(0); \quad Q_{33}^{(1)(0)}(0) = Q_{33}^{(2)(0)}(0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

При условии проскальзывания слоев (нежесткий контакт) при $y_3 = 0$ должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} u_3^{(1)(0)}(0) &= u_3^{(2)(0)}(0); \quad Q_{33}^{(1)(0)}(0) = Q_{33}^{(2)(0)}(0); \\ Q_{3r'}^{(1)(0)}(0) &= 0; \quad Q_{3r'}^{(2)(0)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В соответствии с теоремой Флоке в случае (2.5) также должны выполняться условия

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= u_{r'}^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \quad u_3^{(1)(0)}(h^{(1)}) = u_3^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \\ Q_{33}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= Q_{33}^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \quad Q_{3r'}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = Q_{3r'}^{(2)(0)}(-h^{(2)}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

а в случае (2.6) –

$$\begin{aligned} u_3^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= u_3^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \quad Q_{33}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = Q_{33}^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \\ Q_{3r'}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= 0; \quad Q_{3r'}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, для несжимаемого тела в случае полного контакта между слоями композитного материала задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (2.4), удовлетворяющего условиям (2.5) и (2.7) с учетом обозначений (2.2) и (2.3). При проскальзывании слоев необходимо получить решение уравнения (2.4) при условиях (2.6) и (2.8) с учетом обозначений (2.2) и (2.3).

§3. Волны вдоль несжимаемых слоев. Длинноволновое (низкочастотное) приближение.

По аналогии с результатами, изложенными в [4], решение уравнения (2.4) представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} X^{(1)(0)}(y_3) &= B_1^{(1)} e^{ik\alpha_1^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)} + B_2^{(1)} e^{-ik\alpha_1^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)} + B_3^{(1)} e^{ik\alpha_2^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)} + B_4^{(1)} e^{-ik\alpha_2^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)}; \\ X^{(2)(0)}(y_3) &= B_1^{(2)} e^{ik\alpha_1^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)} + B_2^{(2)} e^{-ik\alpha_1^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)} + B_3^{(2)} e^{ik\alpha_2^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)} + B_4^{(2)} e^{-ik\alpha_2^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) $\alpha_1^{(j)2}$ и $\alpha_2^{(j)2}$ – корни характеристического уравнения дифференциального уравнения (2.4), которое имеет вид

$$\kappa_{3113}^{(j)} \alpha^{(j)4} - \alpha^{(j)2} \left[C^2 \rho^{(j)} - \kappa_{3333}^{(j)} - \kappa_{1111}^{(j)} + 2(\kappa_{1133}^{(j)} + \kappa_{1313}^{(j)}) \right] - (C^2 \rho^{(j)} - \kappa_{1331}^{(j)}) = 0. \quad (3.2)$$

Применительно к несжимаемому слоистому композитному материалу с начальными напряжениями имеет смысл (по аналогии с результатами [4]) рассматривать квазипоперечную волну, которая распространяется вдоль оси Or' и поляризована в плоскости $r'Oy_3$. Для рассматриваемой волны $u_r^{(j)}$ будут антисимметричны и $u_3^{(j)}$ – симметричны относительно середины соответствующих слоев.

Для рассматриваемого случая в представлении решения в форме (3.1) для двух соседних слоев примем следующие зависимости:

$$B_1^{(j)} = B_2^{(j)}; B_3^{(j)} = B_4^{(j)}. \quad (3.3)$$

Учитывая обозначения (2.2) и (2.3) и подставляя (3.1) и (3.3) в условия (2.5) и (2.7) или (2.6) и (2.8), после ряда преобразований получаем однородную систему алгебраических уравнений, из условия существования нетривиальных решений которой следует дисперсионное уравнение в виде

$$\det \|\alpha_{nm}\| = 0; n, m = \overline{1, 4}. \quad (3.4)$$

Отметим, что дисперсионное уравнение (3.4) для случая полного контакта между слоями получено в работе [4].

Для случая полного контакта слоев в (3.4) введены следующие обозначения:

$$\alpha_{mq} = \beta_{mq}^{(1)}; \alpha_{m,2+q} = (-1)^{m+1} \beta_{mq}^{(2)}, \quad (3.5)$$

а для случая полного проскальзывания слоев имеют место формулы

$$\begin{aligned} \alpha_{1q} &= \beta_{4q}^{(1)}; \alpha_{2q} = \beta_{2q}^{(1)}; \alpha_{2,2+q} = -\beta_{2q}^{(2)}; \alpha_{3q} = \beta_{3q}^{(1)}; \\ \alpha_{3,2+q} &= \beta_{3q}^{(2)}; \alpha_{4,2+q} = \beta_{4q}^{(2)}; \alpha_{1,2+q} = \alpha_{4q} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В формулах (3.5) и (3.6) функции $\beta_{mq}^{(j)}$ определяются из выражений

$$\begin{aligned} \beta_{1q}^{(j)} &= k \alpha_q^{(j)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_q^{(j)} h^{(j)}; \beta_{2q}^{(j)} = k^2 \cos \frac{1}{2} k \alpha_q^{(j)} h^{(j)}; \\ \beta_{3q}^{(j)} &= k^3 \alpha_q^{(j)} (C^2 \rho^{(j)} - \kappa_{1111}^{(j)} - \kappa_{3333}^{(j)} + 2\kappa_{1133}^{(j)} + \kappa_{1313}^{(j)} - \alpha_q^{(j)2} \kappa_{3113}^{(j)}) \sin \frac{1}{2} k \alpha_q^{(j)} h^{(j)}; \\ \beta_{4q}^{(j)} &= k^2 (\kappa_{1313}^{(j)} - \alpha_q^{(j)2} \kappa_{3113}^{(j)}) \cos \frac{1}{2} k \alpha_q^{(j)} h^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для длинноволнового (низкочастотного) приближения, ограничиваясь одночленной аппроксимацией, в случае полного контакта между слоями композитного материала получим

$$C_{S_{y_3}}^2 = \frac{\kappa_{1331}^{(1)} \kappa_{3113}^{(2)} h^{(1)2} + \kappa_{3113}^{(1)} \kappa_{1331}^{(2)} h^{(2)2} + h^{(1)} h^{(2)} \left[\kappa_{1331}^{(2)} \kappa_{3113}^{(2)} + \kappa_{1331}^{(1)} \kappa_{3113}^{(1)} - (\kappa_{1313}^{(1)} - \kappa_{1313}^{(2)})^2 \right]}{\rho^{(1)} \kappa_{3113}^{(2)} h^{(1)2} + \rho^{(2)} \kappa_{3113}^{(1)} h^{(2)2} + h^{(1)} h^{(2)} (\rho^{(2)} \kappa_{3113}^{(2)} + \rho^{(1)} \kappa_{3113}^{(1)})}, \quad (3.8)$$

а в случае полного проскальзывания между слоями –

$$C_{S_{y_3}}^2 = \frac{\kappa_{3113}^{(2)} h^{(1)} (\kappa_{3113}^{(1)} \kappa_{1331}^{(1)} - \kappa_{1313}^{(1)2}) + \kappa_{3113}^{(1)} h^{(2)} (\kappa_{3113}^{(2)} \kappa_{1331}^{(2)} - \kappa_{1313}^{(2)2})}{\kappa_{3113}^{(1)} \kappa_{3113}^{(2)} (\rho^{(1)} h^{(1)} + \rho^{(2)} h^{(2)})}, \quad (3.9)$$

где $C_{S_{y_3}} = \omega k^{-1}$ – скорость квазипоперечной волны вдоль оси Or' , поляризованной в плоскости $r'Oy_3$.

Анализ уравнений (3.4), (3.8) и (3.9) свидетельствует, что для всех случаев контакта при распространении волн происходит взаимодействие между слоями композита.

§4. Числовые результаты и их анализ.

Дисперсионные уравнения (3.4) получены для упругого потенциала произвольной формы. Для проведения числового анализа конкретизируем вид упругого потенциала. Рассмотрим закономерности влияния начальных напряжений на скорость распространения квазипоперечных волн в композитном несжимаемом материале в рамках потенциала Трелоара [4]

$$w^{(j)} = 2c_{10}^{(j)} A_1^{(j)}, \quad (4.1)$$

где $c_{10}^{(j)}$ – упругая постоянная; $A_1^{(j)}$ – алгебраический инвариант.

Для составляющих тензора $\kappa^{(j)}$ для упругого потенциала (4.1) получим

$$\begin{aligned} \kappa_{1111}^{(j)} &= \lambda_1^{(j)2} (-2p_0^{(j)} \lambda_1^{(j)-2} + S_{11}^{0(j)}); \quad \kappa_{3113}^{(j)} = \lambda_3^{(j)2} (-p_0^{(j)} \lambda_3^{(j)-2} + S_{33}^{0(j)}); \\ \kappa_{3333}^{(j)} &= \lambda_3^{(j)2} (-2p_0^{(j)} \lambda_3^{(j)-2} + S_{33}^{0(j)}); \quad \kappa_{1313}^{(j)} = \lambda_1^{(j)} \lambda_3^{(j)} (-p_0^{(j)} \lambda_1^{(j)-1} \lambda_3^{(j)-1} + S_{33}^{0(j)}); \\ \kappa_{1331}^{(j)} &= \lambda_1^{(j)2} (-p_0^{(j)} \lambda_1^{(j)-2} + S_{11}^{0(j)}); \quad \kappa_{1133}^{(j)} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Исследования проведем при начальном состоянии

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq 0; \quad S_{33}^{0(j)} = 0; \quad \lambda^{(j)} = \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad \lambda_3^{(j)} = \lambda^{(j)-2}. \quad (4.3)$$

Преобразуем формулы (3.8) и (3.9) с учетом (4.2) и (4.3). Получим в случае полного контакта между слоями

$$\begin{aligned} C_{S_{y_3}}^2 &= (\rho^{(2)} h^{(2)} + h^{(1)} \rho^{(1)})^{-1} \times \\ &\times \left[\lambda_1^2 (S_{11}^{0(1)} h^{(1)} + S_{11}^{0(2)} h^{(2)}) - p_0^{(1)} p_0^{(2)} (h^{(1)} + h^{(2)})^2 (p_0^{(2)} h^{(1)} + p_0^{(1)} h^{(2)})^{-1} \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

а в случае полного проскальзывания между слоями –

$$C_{S_{y_3}}^2 = \lambda_1^2 (h^{(1)} S_{11}^{0(1)} + h^{(2)} S_{11}^{0(2)}) (\rho^{(1)} h^{(1)} + \rho^{(2)} h^{(2)})^{-1}. \quad (4.5)$$

При $h^{(1)} = h^{(2)}$ из соотношений (4.4) и (4.5), соответственно, получим

$$C_{S_{y_3}}^2 = (\rho^{(1)} + \rho^{(2)})^{-1} \left[\lambda_1^2 (S_{11}^{0(1)} + S_{11}^{0(2)}) - 4p_0^{(1)} p_0^{(2)} (p_0^{(1)} + p_0^{(2)})^{-1} \right]; \quad (4.6)$$

$$C_{S_{y_3}}^2 = \lambda_1^2 (S_{11}^{0(1)} + S_{11}^{0(2)}) (\rho^{(1)} + \rho^{(2)})^{-1}. \quad (4.7)$$

В формулах (3.8), (3.9), (4.4) – (4.7) даны в первом приближении значения истинной фазовой скорости квазипоперечных волн при условии, что

$$(h^{(1)} + h^{(2)}) / \Lambda \ll 1, \quad (4.8)$$

где Λ – длина волны ($\Lambda = 2\pi k^{-1}$).

Из формулы (4.5) следует, что фазовая скорость распространения квазипоперечных длинных волн (удовлетворяющих условию (4.8)) вдоль оси Or' , поляризованных в плоскости $r'Oy_3$, для композитных несжимаемых материалов с потенциалом неогукковского типа при полном проскальзывании, вычисленная относительно начального деформированного состояния, изменяется пропорционально удлинению вдоль оси Or' .

Из формул (4.6) и (4.7) следует, что при соответствующей длине волны (условие (4.8)) в несжимаемом композитном материале, состоящем из одинаковых по толщине слоев, фазовая скорость распространения квазипоперечной волны очень мало зависит от толщины слоев.

Исследуем уравнение (3.4) в рамках упругого потенциала (4.1). Приведенные ниже результаты справедливы для начального состояния (4.3) и для следующих соотношений механических характеристик слоев композита: $c_{10}^{(1)}/c_{10}^{(2)} = 5$; $\rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 0,7$.

Проведение исследований позволяет установить закономерности влияния начальных напряжений, условий сопряжения слоев композитного материала, параметра слоистости ($m = h^{(1)}/h^{(2)}$) на истинную фазовую скорость осесимметричных квазипоперечных волн, распространяющихся вдоль слоев композитного материала.

Ниже представлены числовые результаты. Для этого на рисунках введены следующие обозначения: $C/C_s^{(0(2))}$ – безразмерная скорость распространения волны в слоистом композитном материале; \bar{h} – приведенная частота ($\bar{h} = k_s^{(0(2))}h^{(2)}$); $k_s^{(0(2))}$ – волновое число; $C_s^{(0(2))}$ – скорость поперечных волн в изотропном материале второго слоя без начальных напряжений.

Результаты расчетов представлены в виде зависимости безразмерной скорости распространения волн $C/C_s^{(0(2))}$ от приведенной частоты \bar{h} для первых пяти мод (0 – 4).

Так, на рис. 1 – 5 представлены зависимости скорости распространения квазипоперечной волны $C/C_s^{(0(2))}$ от приведенной частоты \bar{h} при различных начальных напряжениях и условиях контакта слоев композитного материала. Рисунки с индексом «а» соответствуют жесткому контакту между слоями композитного материала, с индексом «б» – нежесткому контакту (контакту с полным проскальзыванием слоев). Начальное напряженное состояние задано следующим образом: первый слой (слой с индексом «1») находится в ненапряженном состоянии ($\lambda_1^{(1)} = 1$), а второй слой (слой с индексом «2») подвергается предварительному деформированию. Сплошные линии на рис. 1 – 5 соответствуют значению $\lambda_1^{(2)} = 1$, штриховые – значению $\lambda_1^{(2)} = 0,8$, штрих-пунктирные – значению $\lambda_1^{(2)} = 1,2$ (параметр слоистости $m = 1$).

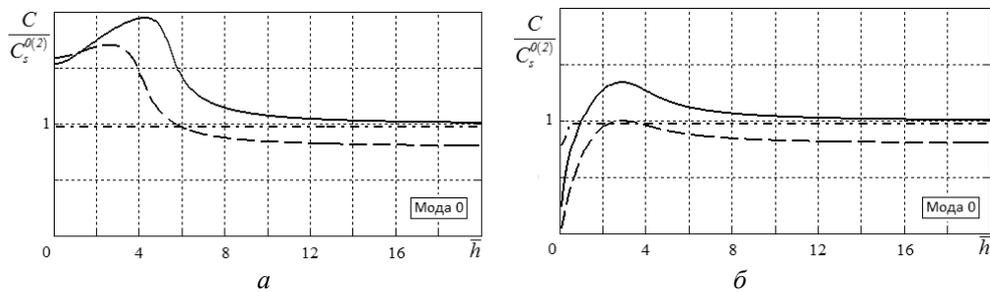


Рис. 1

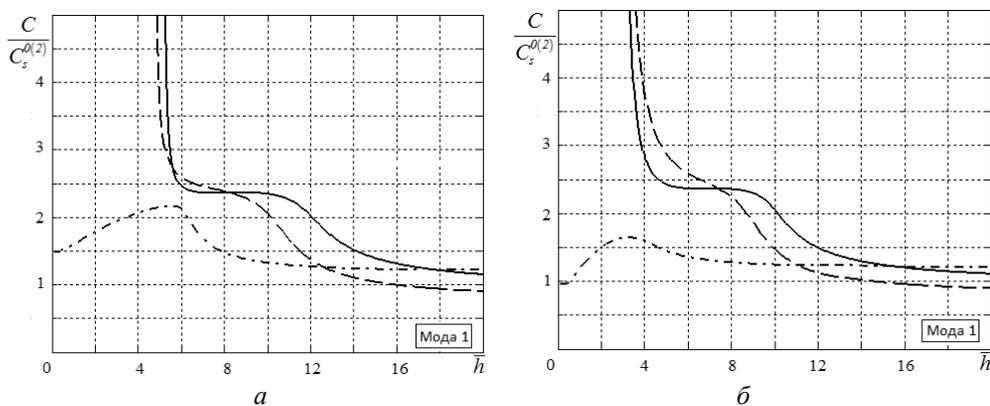


Рис. 2

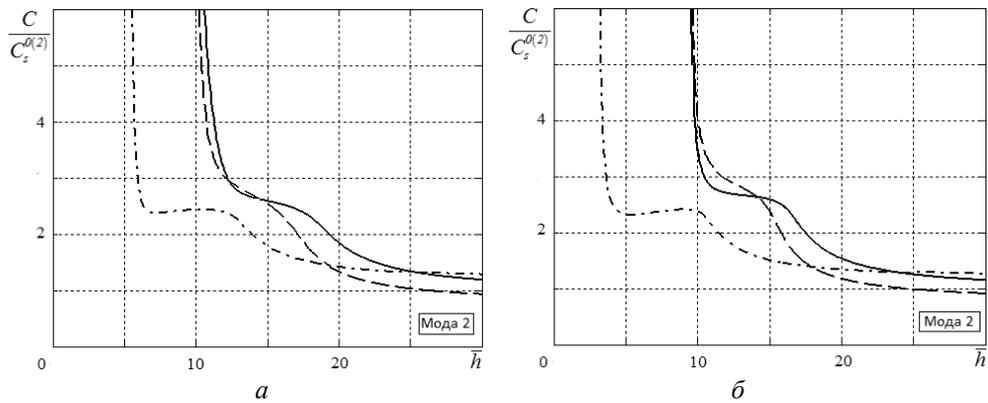


Рис. 3

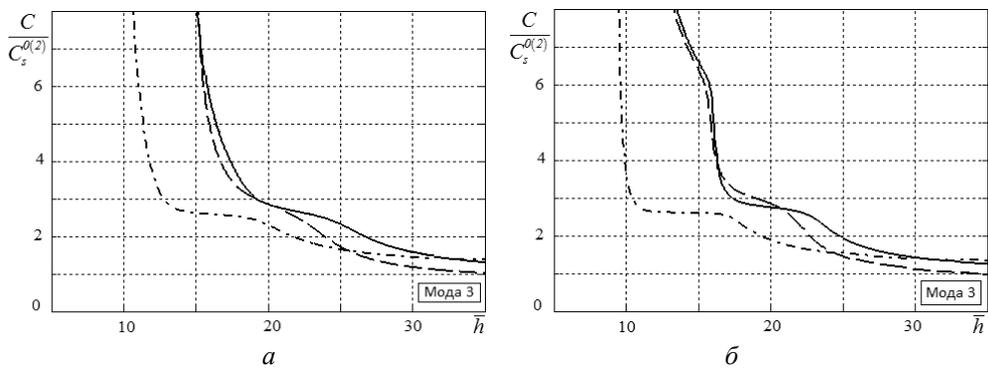


Рис. 4

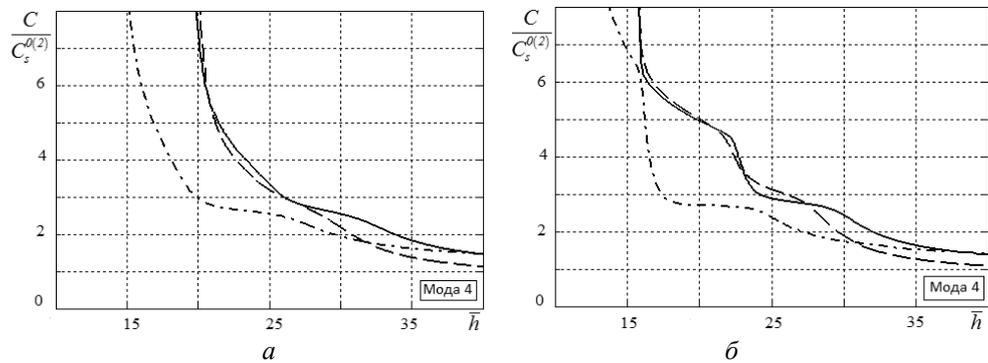


Рис. 5

На рис. 6 (а, б, в) показано сравнение соответствующих мод квазипоперечной волны, распространяющейся в слоистом композитном материале при полном контакте слоев и при контакте с проскальзыванием при различных начальных напряженных состояниях слоев.

Штриховая линия соответствует полному контакту, а сплошная – контакту с проскальзыванием. Рис. 6, а соответствует начальному напряженному состоянию при $\lambda_1^{(1)} = 1; \lambda_1^{(2)} = 0,8$; рис. 6, б – состоянию без начальных напряжений ($\lambda_1^{(1)} = 1; \lambda_1^{(2)} = 1$), рис. 6, в – начальному напряженному состоянию при $\lambda_1^{(1)} = 1; \lambda_1^{(2)} = 1,2$. Параметр слоистости принят равным единице ($m = 1$).

Из соображений физического характера следует, что дисперсионные кривые на рис. 6 определяют область решения дисперсионного уравнения при различных условиях контакта между слоями для указанных выше начальных напряженных состояний.

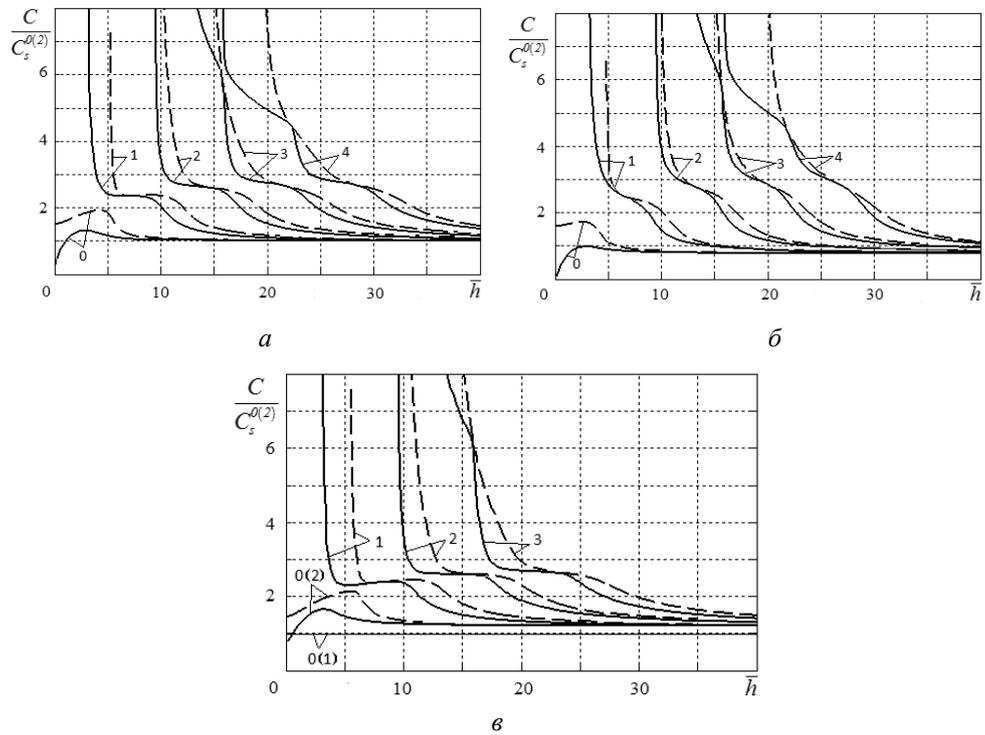


Рис. 6

Отметим, что при растяжении для рассматриваемых условий контакта между слоями композитного несжимаемого материала и начального напряженного состояния существуют две нулевых моды (рис. 6, в).

На рис. 7 – 9 показаны зависимости фазовой скорости квазипоперечной волны от приведенной частоты при различных условиях контакта между слоями и различных значениях параметра слоистости.

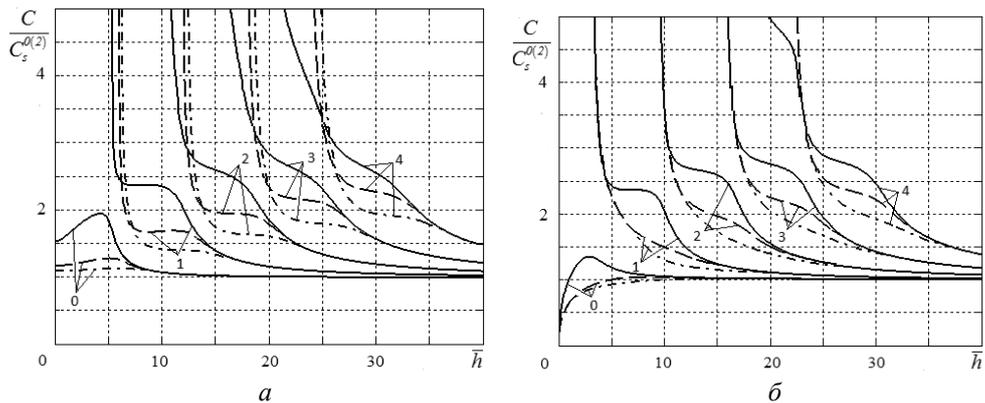


Рис. 7

Рис. 7, а – 9, а соответствуют полному контакту между слоями композитного материала (2.5), а рис. 7, б – 9, б – контакту с проскальзыванием (2.6). Рис. 7 соответствует начальному напряженному состоянию при $\lambda_1^{(1)} = 1$; $\lambda_1^{(2)} = 0,8$; рис. 8 – состоянию без начальных напряжений ($\lambda_1^{(1)} = 1$; $\lambda_1^{(2)} = 1$); рис. 9 – начальному напряженному со-

стоянию при $\lambda_1^{(1)} = 1; \lambda_1^{(2)} = 1, 2$. Сплошные линии на рис. 7 – 9 соответствуют значению $m = 1$, штриховые линии – значению $m = 0,25$, а штрих-пунктирные линии – значению $m = 0,125$.

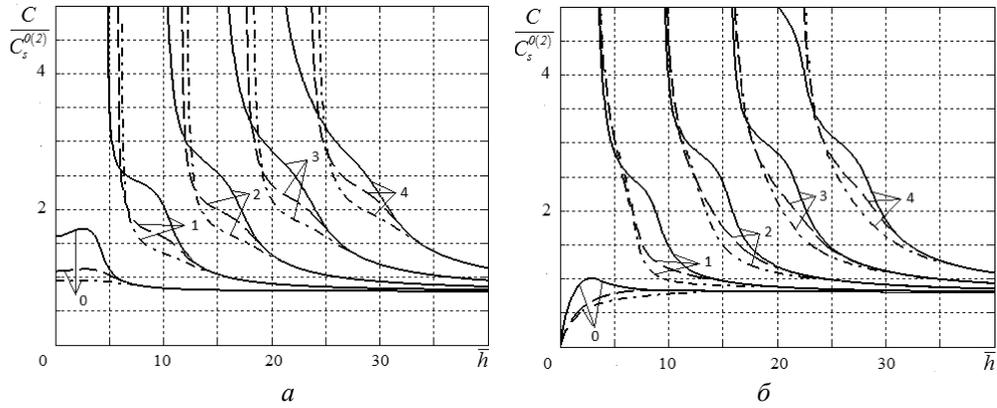


Рис. 8

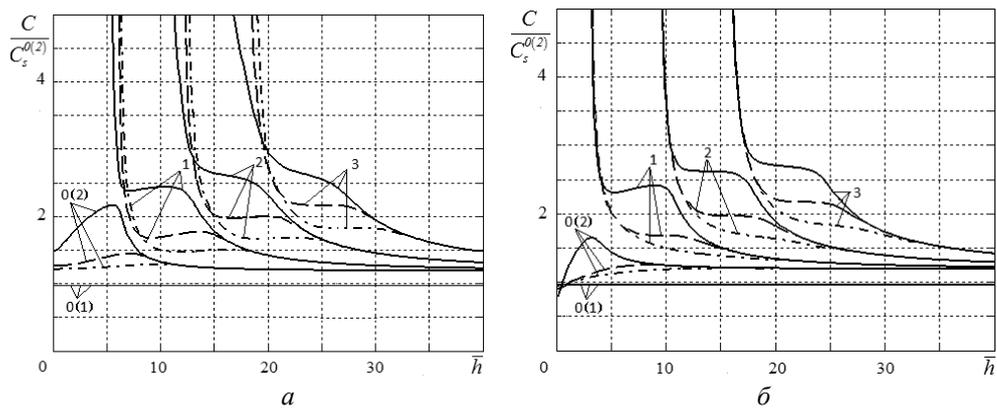


Рис. 9

В табл. 1 приведены значения фазовой скорости квазипоперечной волны для моды 3 при $\bar{h} = 20$ для различных начальных напряженных состояний, условий контакта между слоями композита и значений параметра слоистости.

Таблица 1

m	$\lambda^{(1)} = 1; \lambda^{(2)} = 1$		$\lambda^{(1)} = 1; \lambda^{(2)} = 0,8$		$\lambda^{(1)} = 1; \lambda^{(2)} = 1,2$	
	жесткий	нежесткий	жесткий	нежесткий	жесткий	нежесткий
1	1,857335	1,545271	1,343102	1,186721	1,429423	1,351818
0,25	1,800130	1,512568	1,338417	1,171116	1,429076	1,348832
0,125	1,598514	1,403519	1,307195	1,098194	1,422546	1,328876
0,010	1,286592	1,276425	1,056787	0,981924	1,264551	1,250787
0,005	1,285663	1,278134	1,041634	0,982294	1,264027	1,252127
0,0025	1,285472	1,279063	1,034734	0,982535	1,263969	1,252869
0,001	1,285425	1,279633	1,030833	0,982689	1,263977	1,253328
0,0005	1,285420	1,279824	1,029574	0,982741	1,263985	1,253482

Анализируя влияние начальных напряжений, условий контакта слоев и параметра слоистости на фазовую скорость квазипоперечной волны, сделаем следующие выводы:

- начальные напряжения существенно влияют на фазовые скорости осесимметричных волн в слоистом несжимаемом композитном материале;
- зависимость фазовой скорости от начальных напряжений для каждой моды определяется диапазоном частот;
- каждая мода имеет диапазон частот, в котором изменение фазовой скорости существенно зависит от начальных напряжений;
- существуют частоты, при которых фазовая скорость не зависит (или существенно не зависит) от начальных напряжений;
- значительное влияние начальные напряжения имеют на фазовую скорость зарождающихся волн;
- как правило, начальные напряжения изменяют значения критических частот;
- критические частоты при жестком сцеплении слоев больше, чем при нежестком;
- условие контакта между слоями композитного материала существенно влияет на частоты зарождения волн;
- для разных мод существуют диапазоны частот, при которых влияние условий контакта слоев незначительно;
- для рассмотренных начальных состояний влияние начальных напряжений, условий контакта между слоями и параметра слоистости больше при растяжении, чем при сжатии;
- при изменении отношения толщин слоев изменяются как критические частоты, так и характер зависимости фазовой скорости от частоты и от начальных напряжений;
- зависимость фазовой скорости от параметра слоистости для каждой моды определяется диапазоном частот;
- каждая мода имеет диапазон частот, в котором изменение фазовой скорости существенно зависит от соотношения толщин слоев композитного материала;
- существуют частоты, при которых толщина слоев композитного материала не влияет на значение фазовой скорости;
- при достижении параметром слоистости определенного минимального значения фазовая скорость изменяется незначительно;
- фазовая скорость распространения квазипоперечных длинных волн для композитных несжимаемых материалов с потенциалом неогукковского типа при полном проскальзывании, вычисленная относительно начального деформированного состояния, изменяется пропорционально удлинению в направлении распространения волны;
- при соответствующей длине волны в несжимаемом композитном материале, состоящем из одинаковых по толщине слоев, фазовая скорость распространения квазипоперечной волны очень мало зависит от толщины слоев.

Заключение.

В рамках линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями дана постановка и предложен метод решения задач о распространении осесимметричных волн в слоистом несжимаемом композитном материале с начальными напряжениями. Исследован случай распространения волн вдоль слоев композитного материала. Получены дисперсионные уравнения для квазипродольных волн и их длинноволновые приближения при полном контакте слоев и при полном проскальзывании слоев. Для материала с упругим потенциалом типа Трелоара проведены численные исследования и дан анализ полученных результатов.

РЕЗЮМЕ. У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуто постановку і метод розв'язання задач про поширення вісесиметричних хвиль в шаруватому нестисливому композитному матеріалі з початковими напруженнями. Досліджений випадок поширення хвиль уздовж шарів композитного матеріалу. Отримано дисперсійні рівняння для квазіпоперечних хвиль та їх довгохвильові наближення при повному контакті шарів і при повному їх проковзуванні. Для матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара проведено чисельні дослідження і аналіз отриманих результатів.

1. Глухов А.Ю. Про поширення віссиметричних хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів // Доп. НАН України. – 2016, № 8. – С. 33 – 39.
2. Глухов А.Ю. Віссиметричні хвилі в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів // Доп. НАН України. – 2016, № 10. – С. 42 – 46.
3. Гузь А.Н. Об определении приведенных упругих постоянных композитных слоистых материалов с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 3. – С. 216 – 219.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2 т. Т. 1. Общие вопросы / А.Н. Гузь. – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
5. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2 т. Т. 2. Закономерности распространения / А. Н. Гузь. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. Панасюк О.Н. Распространение плоских упругих волн в композитных слоистых материалах с начальными напряжениями при условии проскальзывания слоев / Механика деформируемого твёрдого тела – 2008: Тезисы докладов конференции молодых учёных // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 3. – С. 120.
8. Панасюк О.М. Про поширення хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 65 – 70.
9. Ситенок Н.А. Волны кручения в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 8. – С. 112 – 116.
10. Guz' A.N. Elastic Waves in Laminated Periodic Bodies with Initial (residual) Stresses // Book of Abst. of ICIAM 95, Hamburg, 3 – 7 July. – 1995. – P. 173.
11. Guz' A.N. Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2002, 38, N 1. – P. 23 – 59.
12. Guz' A.N., Khanh L.M. Wave Propagation in Composite Layered Materials with Large Initial Deformations // Sov. Appl. Mech. – 1976. – 12, N 1. P. 1 – 7.
13. Guz' A.N., Sitenok N.A., Zhuk A.P. Axially Symmetric Elastic Waves in a Laminated Compressible Composite Material with Initial Stresses // Sov. Appl. Mech. – 1984. – 20, N 7. – P. 589 – 596.
14. Khanh L.M. Wave Propagation Along Layers in Initially Strained Laminated Compressible Materials // Sov. Appl. Mech. – 1977. – 13, N 9. – P. 868 – 873.
15. Khanh L.M. Waves propagating obliquely through layers of a medium with initial strains // Sov. Appl. Mech. – 1979. – 15, N 3. – P. 197 – 201.
16. Khanh L.M. Propagation of Floquet waves in an elastic media with initial homogeneous deformations // Rev. Roum. sci. techn., Ser. mech. appl. – 1981. – 26, N 2. – P. 233 – 247.
17. Panasyuk O.N. Propagation of Quasishear Waves in Prestressed Materials with Unbonded Layers // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 3. – P. 276 – 282.

Поступила 29.08.2017

Утверждена в печать 30.01.2018