Я.М.Григоренко[1], Н.Н.Крюков[2]

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В -СПЛАЙНОВ

[1]*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,*
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; email: ayagrigorenko@yandex.ru;
[2]*Киевская государственная академия водного транспорта*
им. Петра Конашевича-Сагайдачного,
ул. Кирилловская., 9, 04071, Киев, Украина; email: mmkryukov@ukr.net

Abstract. An approach is proposed to solving the static problems of ring plates with variable parameters in two coordinate directions. The system of equations and boundary conditions are formulated in displacements and forces-moments. This approach is based on reduction of the two-dimensional problem to one-dimensional one by means of the spline collocations method and solving the last problem by a stable numerical method of discrete orthogonalization. The numerical results are given in tables and then analyzed.

Key words: bending of ring plates, method of spline-collocation, periodical B-splines, method of discrete orthogonalization.

Введение.

Исследование напряженно-деформированного состояния оболочек и пластин, подверженных действию разнообразных видов нагрузок при различных способах закрепления краев, приводит к формулировке и решению краевых задач, в общем случае, для систем дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Сложность решения этих задач обусловлена не только высоким порядком системы, переменностью коэффициентов, но и необходимостью точно удовлетворить заданным граничным условиям. Использование того или иного метода для получения решения с достаточной степенью точности в значительной мере зависит от геометрических и механических параметров, характеризующих некоторые особенности задачи, и вида граничных условий, что иногда ограничивает возможности решения задач в важных в прикладном отношении случаях переменности жесткости и закрепления оболочек и пластин. Кроме того, в задачах теории оболочек имеют место локальные и краевые эффекты, что накладывает определенные условия жесткости на краевые задачи, связанные с явлением неустойчивости счета в процессе вычислений [1, 2, 7, 9].

В последнее время в задачах вычислительной математики, математической физики и механики для их решения широко используют сплайн-функции [1, 4, 5, 8]. Это объясняется преимуществами аппарата сплайн-приближений по сравнению с другими. К числу основных преимуществ можно отнести следующие: устойчивость сплайнов относительно локальных возмущений, т.е. поведение сплайна в окрестности точки не сказывается на поведении сплайна в целом, как, например, это имеет место при полиномиальном приближении; хорошая сходимость сплайн-интерполяции в отличие от многочленной; простота и удобства в реализации алгоритмов построения и вычисления сплайнов на ЭВМ.

В связи с отмеченными особенностями сплайн-функции используются при решении задач теории деформируемых упругих тел. В частности, они эффективно применены для решения двумерных задач теории оболочек и пластин, трехмерных задач теории упругости [3, 4, 11]. При этом краевые задачи формулируются исключительно в перемещениях и подходы к их решению основаны на применении метода сплайн-коллокации в одном координатном направлении и численном решении в другом.

В случае исследования тонких оболочек с координатной поверхностью в виде поверхности вращения, замкнутых в окружном направлении, формулировка задачи в перемещениях существенно ограничивает класс решаемых задач.

В данной статье на примере решения задач об изгибе кольцевых пластин предложен подход, который базируется на использовании метода сплайн-коллокации [1, 6, 10], когда разрешающая система уравнений и краевые условия формулируются в перемещениях, усилиях и моментах, т.е. в смешанной форме.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим изотропную круглую пластину переменной толщины в двух координатных направлениях $h = h(r,\theta)$ под действием поверхностной нагрузки $q_z = q_z(r,\theta)$. За координатную плоскость выберем срединную плоскость, которая отнесена к полярной системе координат r, θ. Координата z отсчитывается по нормали к срединной плоскости.

Поскольку пластина замкнута в окружном направлении, в качестве разрешающих функций примем: w, ϑ_r, Q_r, M_r, где w – прогиб пластины; ϑ_r – угол поворота; Q_r – перерезывающее усилие; M_r – изгибающий момент.

Чистый изгиб пластины описывается следующей системой уравнений [2]:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\vartheta_r; \quad \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} = \frac{\nu}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{r}\vartheta_r + \frac{12\left(1-\nu^2\right)}{h^2}M_r;$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} = -\frac{h^2}{2(1+\nu)r^4}\frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(h^2\frac{\partial h}{\partial \theta}\right) - \frac{h^3}{6(1+\nu)}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} +$$

$$+\frac{h^2}{2r^4}\frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{h^3}{12r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{1}{4r^3}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(h^2\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)\vartheta_r - \frac{(2+\nu)h^2}{2(1+\nu)r^3}\frac{\partial h}{\partial \theta} - \tag{1.1}$$

$$-\frac{(3+\nu)h^3}{12(1+\nu)r^3}\frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}Q_r - \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 M_r}{\partial \theta^2} - q_z;$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = -\frac{h^2}{2(1+\nu)r^3}\frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{(3+\nu)}{12(1+\nu)}\frac{h^3}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{h^3}{12r^2}\vartheta_r -$$

$$-\frac{h^2}{2(1+\nu)r^2}\frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} - \frac{h^3}{6(1+\nu)r^2}\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} + Q_r - \frac{1-\nu}{r}M_r \quad \left(r_0 \le r \le r_1\right).$$

При формулировке краевой задачи для разрешающей системы уравнений (1.1) необходимо задавать на контурах пластины $r = r_0$, $r = r_1$ условия нагружения или закрепления. Приведем некоторые варианты краевых условий на контурах $r = r_0$, $r = r_1$:

1) контур жестко закреплен –

$$w = 0; \ \vartheta_r = 0; \tag{1.2}$$

2) контур свободный –

$$Q_r = 0;\ M_r = 0\ ; \qquad (1.3)$$

3) контур нагружен поперечной силой –

$$\vartheta_r = 0\ ;\quad Q_r = Q_0\ . \qquad (1.4)$$

§2. Метод решения.

Сначала решение краевой задачи для разрешающей система уравнений (1.1) будем искать в виде (вариант 1):

$$\left\{w(r,\theta),\ \vartheta_r(r,\theta),\ Q_r(r,\theta),\ M_r(r,\theta)\right\} = \sum_{i=0}^{N-1}\left\{w_i(r),\ \vartheta_{ri}(r),\ Q_{ri}(r),\ M_{ri}(r)\right\}\psi_i(\theta)\ , \qquad (2.1)$$

где $w_i(r)$, $\vartheta_{ri}(r)$, $Q_{ri}(r)$, $M_{ri}(r)$ $(i=\overline{0,N-1})$ – неизвестные функции, а $\psi_i(\theta)$ $(i=\overline{0,\ N-1},\ \ N>6)$ – линейные комбинации B-сплайнов 5-ой степени на равномерной сетке точек $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_N$, которые удовлетворяют условиям периодичности решения. В этом случае функции $\psi_i(\theta)$ имеют вид:

$$\Psi_0(\theta) = 2B_5^0(\theta)\ ;\ \Psi_1(\theta) = 2B_5^1(\theta)\ ;\ \Psi_2(\theta) = 2B_5^2(\theta)\ ;\ \Psi_i(\theta) = B_5^i(\theta)\quad \left(i=\overline{3,\ N-3}\right);$$

$$\Psi_{N-2}(\theta) = 2B_5^{N-2}(\theta)\ ;\ \ \Psi_{N-1}(\theta) = 2B_5^{N-1}(\theta)\ . \qquad (2.2)$$

Применим метод коллокаций и получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши, которая содержит $4\times N$ уравнений первого порядка:

$$\frac{d\overline{Y}}{dr} = B\overline{Y} + \overline{f} \qquad (2.3)$$

$$\left(\overline{Y} = \left\{\ \overline{Y_1^T}(r),\ \overline{Y_2^T}(r),\ \overline{Y_3^T}(r),\ \overline{Y_4^T}(r)\right\}^T\ ;\right.$$

$$\overline{Y_1^T}(r) = \{w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4\}\ ;\ \ \overline{Y_2^T}(r) = \{\vartheta_{r1},\ \vartheta_{r2},\ \vartheta_{r3},\ \vartheta_{r4}\}\ ;$$

$$\left.\overline{Y_3^T}(r) = \{Q_{r1},\ Q_{r2},\ Q_{r3},\ Q_{r4}\}\ ,\quad \overline{Y^T}_4(r) = \{M_{r1},\ M_{r2},\ M_{r3},\ M_{r4}\}\right).$$

На контурах $r = \text{const}$ задаем любые корректные краевые условия:

$$B_1\overline{Y}(r_0) = \overline{b_1}\ ;\ \ B_2\overline{Y}(r_1) = \overline{b_2}\ . \qquad (2.4)$$

Краевую задачу (2.3), (2.4) решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [1, 2].

Поскольку уравнения (1.1) содержат старшие вторые частные производные функций ϑ_r, Q_r, M_r по θ, наряду с поиском решения в виде (2.1), когда все разрешающие функции $w,\ \vartheta_r,\ Q_r,\ M_r$ выражаются через B-сплайны пятой степени, рассмотрим вариант, когда используются B-сплайны третьей и пятой степени и решение определяется в виде (вариант 2):

$$w(r,\theta) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i(r)\,\psi_i(\theta)\ ;$$

$$\{\vartheta_r(r,\theta), Q_r(r,\theta), M_r(r,\theta)\} = \sum_{i=0}^{N-1}\{\vartheta_{ri}(r), Q_{ri}(r), M_{ri}(r)\}\,\varphi_i(\theta)\ . \qquad (2.5)$$

Здесь $\varphi(\theta)$ $(i=\overline{0, N-1},\ N>6)$ – линейные комбинации B-сплайнов 3-ей степени на равномерной сетке точек $\theta_0<\theta_1<\theta_2<...<\theta_N$, которые удовлетворяют условиям периодичности решения. В этом случае функции $\varphi_i(\theta)$ имеют вид:

$$\varphi_0(\theta)=2B_3^0(\theta);\ \ \varphi_1(\theta)=2B_3^1(\theta);\ \ \varphi_{N-1}(\theta)=2B_3^{N-1}(\theta);$$
$$\varphi_i(\theta)=B_3^i(\theta)\quad \left(i=\overline{2,\ N-2}\right). \tag{2.6}$$

После решения задачи (2.3), (2.4) искомые функции подставляем, соответственно, в решения (2.1), (2.5), а затем с их помощью определяем все факторы напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемых пластин.

§3. Числовые результаты и их анализ.

Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрим ряд задач.

1. Исследуем задачу о деформации кольцевой пластинки переменной толщины в окружном направлении $h=h_0\left(1+\gamma\cos\theta\right)$. Внешний контур $r=r_1$ пластинки жестко закреплен, а внутренний $r=r_0$ находится под действием нормального усилия Q_0 и закреплен так, что возможно лишь его нормальное перемещение, т.е. краевые условия имеют вид:

$$\vartheta_r=0,\ Q_r=Q_0\quad \text{при } r=r_0;\quad w=\vartheta_r=0\quad \text{при } r=r_1.$$

При этом для параметров принимаем значения: $r_0=0,4$, $r_1=1$, $E=1$, $\nu=0,3$, $\gamma=0,1$, $Q_0=-8$, $h_0=1$.

В табл. 1, 2 для каждой функции в первой строке приведены результаты при выборе решения в виде (2.1) с использованием только B-сплайнов пятой степени (вариант 1); во второй – при выборе решения в виде (2.5) с использованием B-сплайнов третьей и пятой степеней (вариант 2); в третьем – результаты из статьи [3] , когда краевая задача сформулирована в перемещениях с использованием B-сплайнов третьей и пятой степеней; в четвертом – результаты монографии [2] с использованием метода прямых.

В табл. 1 приведены распределения прогиба w и изгибающего момента M_r на внутреннем контуре $r=r_0$. Из таблицы видно, что результаты отличаются не больше, чем на 2%, что свидетельствует об эффективности и достаточной точности предложенного подхода.

Таблица 1

Функция	θ/π					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
w/h_0	0,7085	0,7379	0,8221	0,9428	0,1057·10	0,1105·10
	0,7084	0,7376	0,8220	0,9428	0,1056·10	0,1105·10
	0,7085	0,7379	0,8222	0,9429	0,1057·10	0,1105·10
	0,7182	0,7460	0,8243	0,9341	0,1035·10	0,1077·10
$M_r/10E_0$	0,2024	0,2000	0,1936	0,1853	0,1783	0,1755
	0,2023	0,2001	0,1935	0,1852	0,1782	0,1754
	0,2024	0,2001	0,1937	0,1852	0,1783	0,1756
	0,2040	0,2013	0,1939	0,1842	0,1761	0,1729

2. Рассмотрим также изгиб кольцевой пластинки, толщина которой изменяется в двух координатных направлениях по закону $h=h_0(1+\gamma\cos\theta)(1-2r/3)$, под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки $q_z=q_0$. Внутренний контур пластины жестко закреплен, а внешний – свободный. В этом случае краевые условия имеют следующий вид:

$$w = \vartheta_r = 0 \text{ при } r = r_0 ; \quad Q_r = M_r = 0 \text{ при } r = r_1 .$$

Краевая задача была решена для следующих значений параметров: $r_0 = 0,5$, $r_1 = 1$, $E = 1$, $\nu = 0,3$, $\gamma = 0,1$, $q_0 = 2,5$, $h_0 = 1$.

В табл. 2 приведены распределения прогиба w на внешнем контуре $r = r_1$ и изгибного момента M_r на внутреннем контуре $r = r_0$.

Таблица 2

Функция	θ/π					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{w}{10h_0}$	0,0917	0,0964	0,1104	0,1318	0,1533	0,1627
	0,0917	0,0964	0,1104	0,1318	0,1533	0,1630
	0,0914	0,0961	0,1103	0,1319	0,1538	0,1634
	0,0917	0,0964	0,1104	0,1318	0,1533	0,1627
M_r / E_0	-0,4569	-0,4561	-0,4538	-0,4501	-0,4462	-0,4445
	-0,4569	-0,4560	-0,4539	-0,4502	-0,4463	-0,4446
	-0,4558	-0,4552	-0,4533	-0,4504	-0,4472	-0,4458
	-0,4560	-0,4561	-0,4537	-0,4500	-0,4462	-0,4446

Максимального значения момент достигает в сечении $\theta = 0$, а прогиб – $\theta = \pi$. Из таблицы видно, что результаты отличаются не больше, чем на 1%, что свидетельствует об эффективности и достаточной точности предложенного подхода.

Заключение.

Приведенные результаты решения задач свидетельствуют, что формулировка краевой задачи в смешанной форме, т.е. в перемещениях, усилиях-моментах, и применение периодических В-сплайнов значительно расширяют класс задач за счет возможности формулировать любые корректные условия закрепления и нагружения на торцах, упрощают алгоритм и непосредственно, без дополнительных вычислений, позволяют определить все факторы НДС пластины. Такой подход также можно использовать при исследовании НДС различных оболочечных элементов с координатной поверхностью в виде поверхности вращения, замкнутых, в окружном направлении в различных постановках.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано підхід до розв'язання задач статики кільцевих пластин зі змінними параметрами в двох координатних напрямках. Система рівнянь і крайові умови формулюються в переміщеннях і зусиллях – моментах. Підхід базується на зведенні двовимірної крайової задачі до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокацій та розв'язання останньої стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Числові результати наведено у вигляді таблиць та проаналізовано.

1. *Григоренко Я.М., Крюков Н.Н.* Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 6. – С. 3 – 27.
2. *Григоренко Я.М., Крюков Н.Н.* Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – К.: Наук. думка, 1998. – 264 с.
3. *Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.М.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

4. *Крюков М. М. Яковенко Н.С.* Исследование изгиба кольцевых и секториальних пластин переменной толщины на основе сплайн-аппроксимации // Зб. наук. праць КУЕТТ. серія «Транспортні системи і технології». – К.: КУЕТТ, 2004. – В. 6. – С. 40 – 47.
5. *Ahlberg J.H., Nelson E.N., Walsh L.* The Theory of Splines and Their Application (Mathematics in Science and Engineering, v. 8.). – New York – London: Academic Press, 1972. – 284 p.
6. *Arcangeli R., De Silanes M.C.L., Torrens J.J.* Multidimensional Minimizing Splines: Theory and Application. – Springer, 2004. – 280 p.
7. *Bespalova E.I., Urusova G.P.* Stress State of Branched Shells of Revolution Subject to Transverse Shear and Reduction // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 410 – 419.
8. *Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Wille R., Yaremrenko S.N.* Numerical Solution of the Problem on the Stress-Strain State in Hollow Cylinders Using Spline-Approximations // J. Math. Sci. – 2012. – **180**, N 2. – P. 135 – 145.
9. *Grigorenko Ya. M., Rozhok L.S.* Influence of Cuvature on the Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 49 – 55.
10. *Grigorenko A.Ya., Yaremrenko S.N.* Analysis the Stress-Strain State of Inhomogeneous Hollow Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52,** N 4. – P. 342 – 349.
11. *Schumaker L.L.* Spline Functions: Basic Theory. – Cambridge University Press, 2007. – 600 p.

Поступила 02.12.2016 Утверждена в печать 30.01.2018